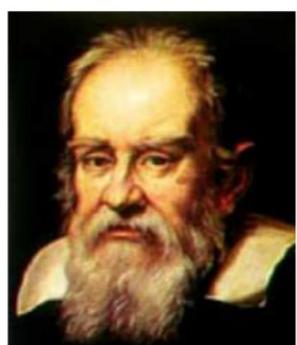


## فصل اول: مقدمه

### مقدمه

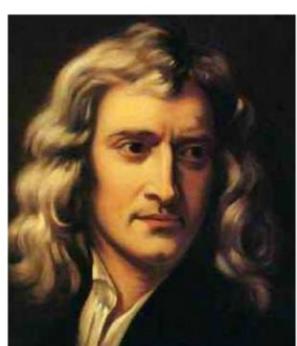
- دینامیک شاخه‌ای از مکانیک است که در آن حرکت اجسام تحت تاثیر نیروها مطالعه می‌شود.
- برای بررسی دینامیک لازم است که دانش مربوط به خواص نیروها (که در استاتیک مطالعه شد) و دانش مربوط به هندسه حرکت (سینماتیک) ترکیب شوند.
- سینماتیک را می‌توان مطالعه هندسه حرکت، بدون در نظر گرفتن عامل بوجود آورنده آن دانست.
- بر طبق قانون دوم نیوتون، یک ذره زمانی شتاب می‌گیرد که تحت نیروی برآیندی غیر صفر قرار بگیرد.  
سینتیک مطالعه ارتباط بین نیرو و تغییرات در حرکت است.

## تاریخچه دینامیک



• گالیلئو گالیله (Galileo Galilei) (۱۵ فوریه ۱۵۶۴ - ۸ ژانویه ۱۶۴۲) دانشمند و مخترع سرشناس ایتالیائی در سده‌های ۱۶ و ۱۷ میلادی بود. گالیله در فیزیک, نجوم, ریاضیات و فلسفه علم تبحر داشت و یکی از پایه‌گذاران تحول علمی و گذار به دوران دانش نوین بود. او روی سقوط آزاد اجسام، حرکت روی سطح شیب دار و حرکت پاندول تحقیقات زیادی داشت.

• سر ایزاک نیوتون Sir Isaac Newton زاده ۲۵ دسامبر ۱۶۴۲ - در گذشته ۲۰ مارس ۱۷۲۷ فیزیک دان، ریاضی دان، ستاره شناس، فیلسوف و شهروند انگلستان بوده‌است. وی در سال ۱۶۸۷ میلادی شاهکار خود «اصول ریاضی فلسفه‌ی طبیعی» را به نگارش درآورد. در این کتاب، او مفهوم گرانش عمومی را مطرح ساخت و با تشریح قوانین حرکت اجسام، علم مکانیک کلاسیک را پایه گذاشت. از دیگر کارهای مهم او بنیان گذاری حساب دیفرانسیل و انتگرال است. نام نیوتون با انقلاب علمی در اروپا و ارتقای نظریه‌ی خورشید-مرکزی پیوند خورده است. او نخستین کسی است که قواعد طبیعی حاکم بر گردش‌های زمینی و آسمانی را کشف کرد. وی همچنین توانست برای اثبات قانون های حرکت سیاره های کپلر برهان‌های ریاضی بیابد.



• لئونارد اویلر Leonhard Euler زاده ۱۵ آوریل ۱۷۰۷ - در گذشته ۱۸ سپتامبر ۱۷۸۳ ریاضیدان و فیزیکدان برجسته سوئیسی بود. او کشف‌های بسیار مهمی در زمینه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریه گراف داشته‌است. اویلر همچنین اصلاحات مهمی در زمینه‌های تجزیه و تحلیل ریاضی مانند مفهوم تابع ریاضی انجام داده‌است [۲] و برای کارهای خود در مکانیک, دینامیک سیالات, اپتیک و نجوم شهرت دارد. مشهورترین کار او در زمینه دینامیک استخراج معادلات سینماتیک و سینتیک اجام صلب است.



• ژان لرون دالامبر Jean le Rond D'Alembert متولد ۱۶ نوامبر ۱۷۱۷ در پاریس؛ در گذشت ۲۹ اکتبر ۱۷۸۳ در پاریس، ریاضیدان, فیزیکدان فرانسوی و همچنین فیلسوف عصر روشنگری بود. اصل dalamber نیز که به این دانشمند نامیده شده‌است، با قانون دوم نیوتون هم‌ارز است و از آن به راحتی مکانیک لاغرانژی به دست می‌آید.



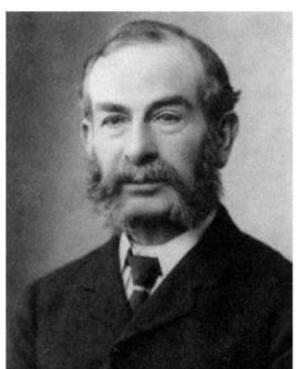
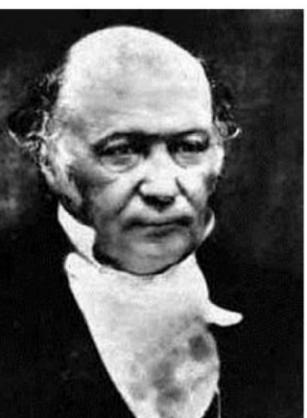
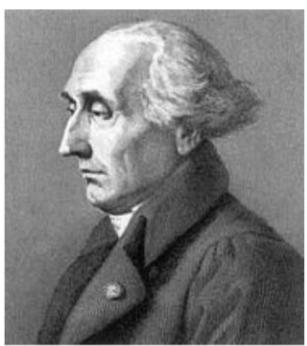
**ژوزف لویی لاگرانژ** Joseph-Louis Lagrange متولد ۲۵ زانویه ۱۷۳۶ در شهر تورین ایتالیا؛ در گذشت ۱۰ آوریل ۱۸۱۳ در پاریس، ریاضی‌دان و منجم ایتالیایی-فرانسوی بود. او از بزرگترین ریاضیدانان تمام ادوار تاریخ می‌باشد. پدر لاگرانژ، یک کارگزار پردرآمد فرانسوی‌الاصل در تورین بود. او در نوزده سالگی استاد ریاضی دانشسرای نظامی - سلطنتی در تورین شد و در آنجا اولین مقاله خود را در مورد معادلات دیفرانسیل منتشر کرد. سال ۱۷۵۶ لاگرانژ از طرف فریدریش دوم، به عنوان مدیر آکادمی علمی پروس و جانشین لئونارد اویلر در برلین خوانده شد. در زمان ناپلئون نیز، لاگرانژ به عنوان سناتور و کنت فرانسه صدا زده شد. نوآوری‌های اصلی لاگرانژ حساب تغییرات و کاربردهای آن در مکانیک، تئوری اعداد، تئوری احتمالات، انتشار امواج، مکانیک سماوی و معادلات دیفرانسیل هستند. نوآوری او در دینامیک منجر به ایجاد روابطی شد که قادر به استخراج معادلات حرکت یک سیستم پیچیده دینامیکی با تلاش کمتری نسبت به روش نیوتون بود.

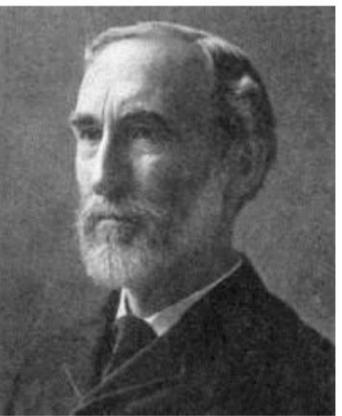
**گاسپار-گوستاو دو کوریولیس** Gaspard-Gustave de Coriolis، یا ساده‌تر، گوستاو کوریولیس (۲۱ مه ۱۷۹۲ – ۱۹ سپتامبر ۱۸۴۳) ریاضی‌دان، مهندسی مکانیک و دانشمند فرانسوی بود. شناخته‌شده‌ترین اثر وی کشف شتاب مشاهده شده در دستگاه مرجع دوار بود. البته او در زمینه کار و انرژی، برخورد اجسام، هیدرولیک و طراحی اجزا نیز نوآوری‌هایی داشت.

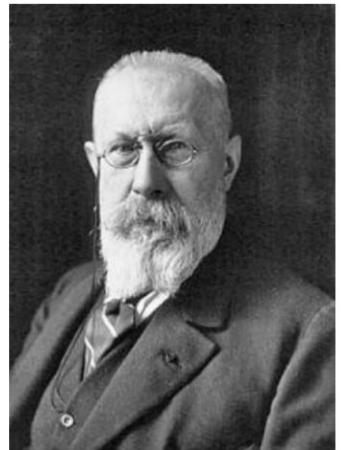
#### • سرویلیام روآن همیلتون (Sir William Rowan Hamilton)

اویت ۱۸۰۵ در دوبلین - ۲ سپتامبر ۱۸۶۵ در نزدیک دانسینک)، ریاضیدان و فیزیکدان ایرلندی. همیلتون در دوبلین ریاضی تحصیل کرد و سال ۱۸۲۷ (یعنی در ۲۲ سالگی)، استاد ستاره‌شناسی و ستاره‌شناس سلطنتی (Royal Astronomer) ایرلند شد. در ابتدا به فیزیک نور و خواص هندسی اش پرداخت. در هجده سالگی همیلتون موفق به کشف قاعده همیلتون در مکانیک شد. از لحاظ زبانشناسی نیز همیلتون در هفت سالگی به طور باور نکردنی زبان عبری بلد بود و تا قبل از تولد سیزده سالگیش هم او در مجموع ۱۲ زبان از جمله زبانهای کلاسیک و مدرن اروپایی، فارسی، عربی، هندو، سانسکریت، و مالایایی را آموخته بود. او همچنین تا آخر عمرش همیشه خود را برای تفریح و سرگرمی با متنهای فارسی و عربی مشغول می‌کرد.

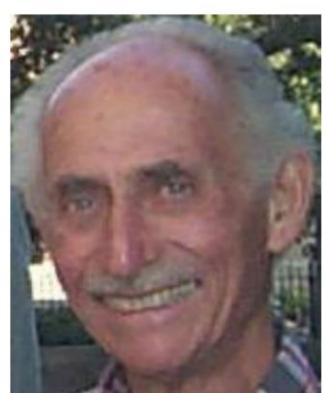
• ادوراد راث Edward Routh ۱۸۳۱ الی ۱۹۰۷ ریاضیدان انگلیسی بود که در کانادا به دنیا آمد. نوآوری‌های اصلی او در دینامیک در زمینه تحلیل اجسام صلب بود. او در زمینه تحلیل پایداری دینامیکی ابزارهای مناسبی را توسعه داد که در دینامیک سیالات بسیار مفید هستند.



 جوسایا ویلارد گیبس (در انگلیسی: Josiah Willard Gibbs) زاده ۱۸۳۹ میلادی - در گذشته ۱۹۰۳ میلادی). ریاضی‌فیزیکدان مشهور آمریکایی بود. آثار او در ریاضی فیزیک، به عنوان پایه‌های اصلی ترمودینامیک شیمیایی مطرح است و بسیار به گسترش این دانش کمک کرده است. او یکی از پایه‌گذاران تحلیل بُرداری بوده است. گیبس در سال ۱۸۶۳ به عنوان اولین دریافت کننده، دکترای مهندسی در ایالات متحده از دانشگاه ییل فارغ التحصیل شد.

 پاول ایمیلی اپل Paul Appell ریاضیدان فرانسوی ۱۸۵۵ الی ۱۹۳۰ است. او کاربرد ابزارهای ریاضی به هندسه و مکانیک را توسعه داد. زحمات او در دینامیک منجر به ارائه فرم جدید از روابط برای استخراج معادلات دینامیکی شد که در ادامه فعالیتهای گیبس صورت پذیرفت.

 والتر ریتز Walther Ritz فیزیکدان سویسی ۱۸۷۸ الی ۱۹۰۹ است. او از اصل همیلتون برای توسعه معادلات به یک فرم عمومی استفاده نمود که این فرم بعدها پایه ای برای تحلیل المان محدود شد. او معادلات ارتعاشات یک ورق را توسعه داد. بیشتر کارهای او تحقیقات در زمینه فیزیک اتمی بود.

 توماس کین Thomas R. Kane متولد ۱۹۲۴ پروفسور دانشگاه استنفورد به علت فرم مناسبی که برای استخراج معادلات حرکت ارائه نمود بسیار مشهور شد. این فرم برای استخراج معادلات حرکت برای سیستمهای دینامیکی چند جسمی با قیدهای غیر هولونومیک بسیار مناسب است.

## کاربردها

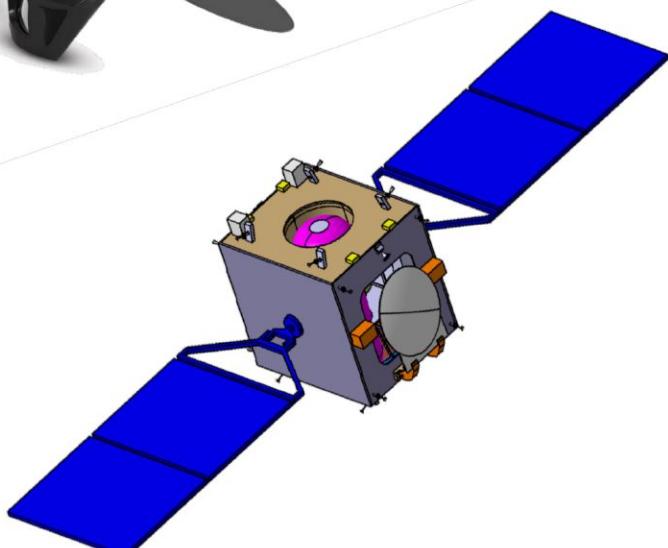
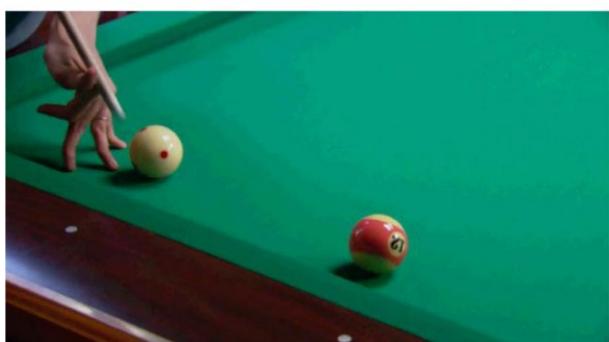
- برای ماشین آلاتی که دارای اجزایی با شتاب های قابل ملاحظه ای هستند در طراحی آنها بایستی تحلیل های دینامیکی صورت پذیرد.

- نمونه هایی از سیستم های مهندسی که تحلیل دینامیکی آنها اهمیت دارد شامل موارد زیر است:



- موشکها
- ماهواره
- وسایل حمل و نقل هوایی و زمینی
- ابزارهای رباتیکی
- پمپ، توربین، موتورهای رفت و برگشتی، ابزارهای ماشینکاری و ...

## برخی مسائل جالب



## قانون دوم نیوتن

$\sum \mathbf{F}$  این قانون اساس علم دینامیک است که می‌گوید اگر به جسمی به جرم  $m$  نیروی برآیندی به اندازه  $\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}$  (1/1) وارد شود جسم شتابی می‌گیرد که از رابطه  $\mathbf{F} = ma$  زیر بدست می‌آید:

شتاب وارد شده در رابطه بالا نسبت به یک مرجع لخت (مرجع لخت مرجعی است که محورهای آن هیچ شتاب خطی یا حرکت دورانی در فضا ندارند) داده شده است.

اگر آزمایشات روی سطح زمین انجام گردد و همه اندازه‌گیری‌ها نسبت به یک مرجع متصل به زمین صورت پذیرد، نتایج بدست آمده اند کی خطای دارند، زیرا شتاب اندازه‌گیری شده شتاب مطلق واقعی نخواهد بود. خطای دارند با لحاظ کردن یک ترم شتاب تصحیح کننده ناشی از دوران زمین اصلاح نمود. این تصحیح برای اکثر مسائل مهندسی که شامل حرکت سازه‌ها و ماشینها روی سطح زمین است، قابل صرف نظر می‌باشد. در این موارد شتاب اندازه‌گیری شده نسبت به مرجع متصل شده به سطح زمین می‌تواند به عنوان شتاب مطلق در نظر گرفته شود. در این حالت خطای ایجاد شده در استفاده از رابطه (1/1) بسیار کوچک است.

در مسائل زیادی که مربوط به طراحی موشک و ماهواره هستند، شتاب زمین دیگر قابل صرف نظر نیست و برای بررسی حرکت این اجسام لازم است از دستگاههای مرجع لخت استفاده گردد.

## شتاب گرانشی

$$g = \frac{G m_e}{R^2} \quad (1/2)$$

شتاب گرانشی با استفاده از قانون گرانش به صورت رابطه مقابل می‌باشد:

در این رابطه  $m_e$  جرم زمین ( $5.976 \times 10^{24} \text{ kg}$ ),  $R$  شعاع میانگین زمین ( $6.371 \times 10^6 \text{ m}$ ), و  $G$  ثابت جهانی گرانش است که با

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \quad , \quad g_0 = g|_{h=0} = 9.825 \text{ m/s}^2 \quad (1/3)$$

جایگزینی در رابطه بالا به مقدار  $g = 9.825 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  می‌رسیم. تغییرات  $g$  بر حسب ارتفاع از سطح دریا به صورت زیر است:

شتاب گرانش داده شده در رابطه (1/2)، شتاب مطلق اندازه‌گیری شده نسبت به دستگاه مرجع در مرکز زمین است که با زمین نمی‌چرخد. با توجه به چرخش زمین، شتاب اندازه‌گیری شده یک جسم در حال سقوط آزاد نسبت به یک دستگاه مرجع متصل به سطح زمین، اندکی کمتر از این شتاب است.

مقدار دقیق شتاب گرانشی نسبت به مرجع متصل به سطح زمین (با در نظر گرفتن پخی آن در قطبین و بالحاظ کردن چرخش زمین)، به صورت فرمول گرانش جهانی (International Gravity Formula) به صورت زیر بدست آمده است:

$$g = 9.780\,327(1 + 0.005\,279 \sin^2 \gamma + 0.000\,023 \sin^4 \gamma + \dots)$$

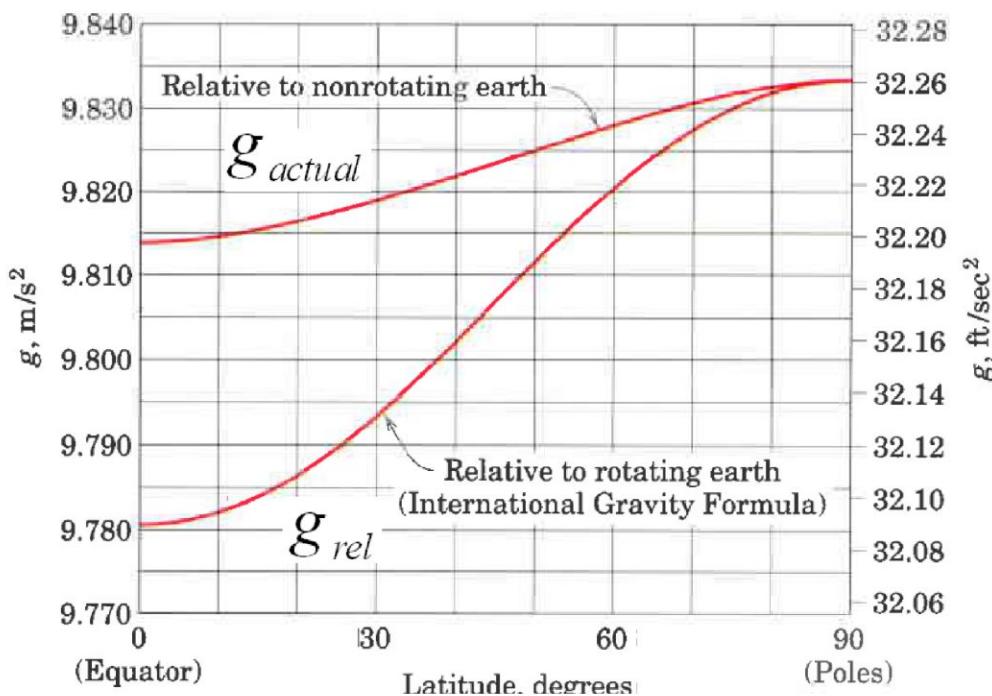
در این رابطه  $\gamma$  عرض جغرافیایی و  $g$  شتاب بر حسب متر بر مجدور ثانیه است. این رابطه بر اساس مدل بیضوی زمین و بالحاظ کردن دوران بدست آمده است.

# شتاب گرانشی

شتاب مطلق گرانش (شتاب نسبت به یک دستگاه غیر چرخان روی زمین) را می‌توان از روی رابطه زیر تعیین نمود:

$$g_{actual} = g_{rel} + R_e \omega^2 \cos^2 \gamma = g_{rel} + 3.382 \times 10^{-2} \cos^2 \gamma$$

(نسبت)  $g_{rel}$  (نسبت به یک مرجع غیر چرخان روی زمین) و نسبتی  $g_{actual}$  شکل زیر شتاب واقعی به یک مرجع چرخان متصل به زمین روی سطح زمین) نشان می‌دهد.



مقدار استاندارد استفاده شده برای شتاب گرانشی نسبت به زمین دوار در سطح دریا در عرض جغرافیایی ۴۵ درجه برابر با  $9.80665 \text{ m/s}^2$  یا  $32.1740 \text{ ft/s}^2$  می‌باشد. این مقدار اندکی با فرمول جهانی گرانش تفاوت دارد و دلیل آن این است که زمین به طور دقیق یک بیضی نیست. همچنین تغییرات چگالی در مقدار شتاب گرانشی محلی تاثیر دارد.

در اکثر مسائل مهندسی نزدیک سطح زمین ما از اختلاف بین شتاب گرانشی مطلق (نسبت به زمین غیر دوار) و شتاب نسبی (نسبت به مرجع متصل به زمین) صرف نظر می‌کنیم و از اثرات غیر همگن بودن زمین نیز چشم پوشی می‌نماییم. مقدار لحاظ شده برای شتاب گرانشی در اکثر مسائل  $9.81 \text{ m/s}^2$  در سیستم یکای SI و برابر  $32.2 \text{ ft/s}^2$  در سیستم امریکایی U.S. می‌باشد.

**وزن ظاهری:** با توجه به چرخش زمین وزن ظاهری اندازه گیری شده یک جسم روی سطح زمین با وزن واقعی آن طبق رابطه

زیر تفاوت دارد:

$$W_{apparent} = m g_{rel} = m (g_{actual} - R_e \omega^2 \cos^2 \gamma) = m g_{actual} - m R_e \omega^2 \cos^2 \gamma$$

$$\Rightarrow W_{apparent} = W_{actual} - m R_e \omega^2 \cos^2 \gamma = W_{actual} - \frac{3.382 \cos^2 \gamma}{100} m$$

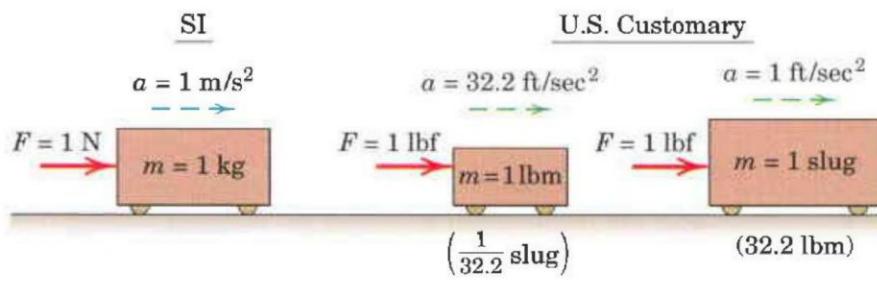
# سیستم واحدها (Systems of Units)

در سیستم SI نیرو بر حسب نیوتن، جرم بر حسب کیلوگرم و شتاب بر حسب متر بر مجدور ثانیه بیان می شود و

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$$

در سیستم آمریکایی U.S. واحد نیرو پوند (pounds force, lb)، واحد جرم اسلگ (slug) و واحد شتاب فوت بر مجدور ثانیه ( $\text{ft/s}^2$ ) بیان می شود و داریم  $1 \text{ lb} = 1 \text{ slug}$ .  $1 \text{ ft/s}^2 = 32.2 \text{ lbm}$ . واحد دیگری که برای جرم در سیستم آمریکایی استفاده می شود پوند مس (lbm) است و رابطه‌ی آن با اسلگ به صورت  $1 \text{ slug} = 32.2 \text{ lbm}$  است.

اگر به جسمی به جرم یک کیلوگرم نیروی یک نیوتنی در راستای افقی وارد شود جسم شتابی به اندازه یک متر بر مجدور ثانیه می گیرد. و اگر به جسمی به جرم یک اسلگ نیروی یک پوندی در راستای افقی وارد شود جسم شتابی به اندازه یک فوت بر مجدور ثانیه می گیرد.



Newton's Second Law

## دو نوع از مسائل دینامیکی

□ نوع اول: در این حالت شتاب ذره یا مشخص است و یا با توجه به داده‌های سینماتیکی حرکت قابل محاسبه است. در این حالت می‌توان نیروی وارد بر ذره را مستقیماً از رابطه  $F = ma$  بدست آورد.

$$\sum F = m a$$

از همه قابل محاسبه

□ نوع دوم: در مسائل نوع دوم نیروهای وارد بر ذره داده شده و ما بایستی حرکت جسم را با استفاده از قانون دوم نیوتن بدست آوریم. اگر نیروها ثابت باشد، شتاب نیز ثابت بوده و به راحتی محاسبه می‌شود. وقتی که نیروها تابعی از زمان، مکان یا سرعت باشند، معادله  $\frac{d}{dt} \sum F = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$  یک معادله دیفرانسیل بدست می‌دهد که با انتگرال گیری جابجایی و سرعت را بدست می‌دهند.

□ مسائل نوع دوم به دلیل نیاز به انتگرال گیری معمولاً مشکل تر هستند، مخصوصاً زمانی که نیرو تابعی ترکیبی از دو یا متغیرهای بیشتری باشد.

## حرکت مقید و بدون قید

از نظر فیزیکی دو نوع مختلف حرکت وجود دارد (که هر دو از قانون نیوتون قابل بررسی هستند). حرکت نوع اول بدون قید است که در آن ذره به صورت آزاد بدون حرکت روی ریل مکانیکی یک مسیری را دنبال می کند که وابسته به حرکت اولیه و نیروهای وارد بر آن می باشند که از طریق منابع خارجی به آن وارد شده اند. نوع دوم حرکت مقید است که در آن مسیر حرکت ذره به صورت جزئی یا کلی توسط ریلهای مکانیکی موجود مشخص می شود. یک قطار متحرک روی ریل مقید است که در طول ریل حرکت کند. ولی برای یک پرتابه هیچ قیدی برای حرکت وجود ندارد. برای یک ذره مقید برخی از نیروها ناشی از منابع خارجی هستند و برخی دیگر در اثر واکنش بدلیل وجود ریلهای ایجاد شده اند.

تعداد درجات آزادی و انتخاب سیستم مختصات مناسب اغلب به تعداد و هندسه قیدهای موجود در مساله وابسته است. به عنوان مثال اگر یک ذره آزادانه بتواند در فضا حرکت کند (همانند حرکت یک ماهواره، هواپیما یا موشک) می گوییم که این ذره سه درجه آزادی دارد زیرا برای تعیین مکان مرکز جرم ذره نیاز به مشخص نمودن سه مختصات مستقل می باشد.

اگر ذره ای مقید باشد که روی یک سطح حرکت کند (مانند حرکت یک توپ روی یک کاسه) می گوییم که دو درجه آزادی برای حرکت ذره وجود دارد. و اگر لغزنده تنها بتواند در مسیر یک محور حرکت کند تنها یک درجه آزادی دارد و برای مشخص کردن مکان ذره تنها یک مختصات تعمیم یافته مورد نیاز است.

### دیاگرام آزاد

برای بررسی حرکت ذره ما بایستی تمام نیروهای وارد بر آن را لحاظ نماییم. در شروع مباحث دینامیکی، برای بررسی حرکت، فرض ما بر این است که اجسام مورد بررسی ذره هستند. یعنی ما صرفا علاقه مند به بررسی حرکت مرکز جرم آنها هستیم و فرض ما بر این است که نیروهای وارد بر اجسام از مرکز جرم آنها می گذرند. وقتی که ما سینتیک اجسام صلب را بررسی می کنیم اثر نیروهایی که از مرکز جرم جسم نمی گذرند را لحاظ خواهیم نمود.

تنها راه مطمئن برای لحاظ نمودن دقیق تمام نیروهای وارد بر جسم این است که ما ذره مورد نظر را از تمام اجسام در حال تماس و تاثیر گذار مجزا نموده و اثر آنها را توسط نیروهایی که به ذره مورد نظر وارد می کنند جایگزین نماییم. در دیاگرام آزاد جسم تمام نیروهای معلوم و مجھول وارد بر ذره لحاظ می شوند. فرق مسائل استاتیکی با دینامیکی در این است که برآیند نیروهای وارد بر جسم در مسائل استاتیکی صفر است در حالیکه برآیند نیروهای وارد بر جسم در مسائل دینامیکی متناسب با شتاب جسم است.