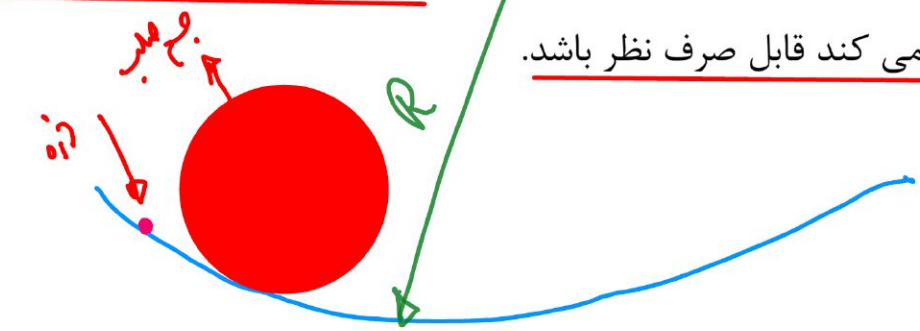
فصل دوم: سینماتیک ذرات

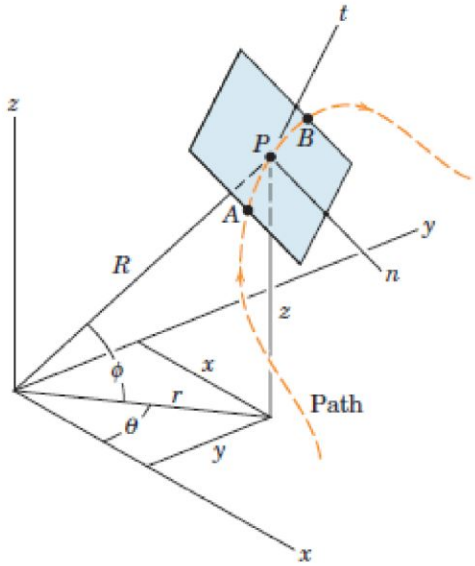
مقدمه

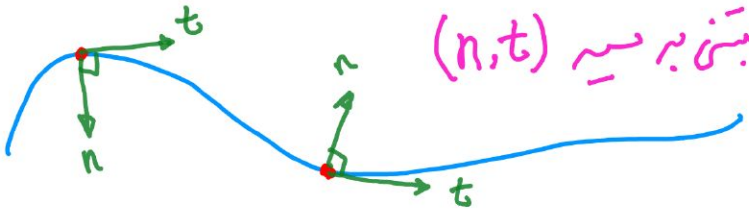
- سینماتیک را می توان مطالعه هندسه حرکت، بدون در نظر گرفتن عامل بوجود آورنده آن دانست.
- این بخش از دینامیک صرفا جنبه ریاضی دارد و تابع هیچ نوع قانون فیزیکی مانند نیوتن نمی باشد.
- به عبارت دیگر، سینماتیک عبارت از تکنیک تشریح حرکت است. این تکنیک شامل انتخاب یک دستگاه مرجع، بیان بردار وضع نقطه در این دستگاه مرجع بر حسب کمیات اسکالر (معمولا زمان) و مشتق گیری بردار وضع نسبت به یک دستگاه مرجع است.
- ملاحظات سینماتیکی در دینامیک بسیار مهم است. موثر بودن در فرمول بندی معادلات حرکت تا حد زیادی به توانایی شخص در تشکیل عبارات صحیح برای کمیات سینماتیکی مانند سرعت و شتاب نقاط دارد. بنابراین مباحث ارائه شده در این فصل کاملا ضروری است.
- ما مطالعات سینماتیک را با مطالعه سینماتیک ذرات یا نقاط شروع می کنیم. یک ذره جسمی است که ابعاد آن در مقایسه با شعاع انحنای مسیری که طی می کند قابل صرف نظر باشد.



انتخاب دستگاه مختصات جهت توصیف مناسب حرکت

- حرکت یک ذره P در هر زمان t را می توان با مشخص کردن مختصات مستطیلی یا کارتزین x, y, z مختصات استوانه ای r, θ, z یا مختصات کروی R, θ, φ توصیف نمود.
- همچنین می توان حرکت ذره را بوسیله ی اندازه گیری های انجام شده در طول مماس t و عمود n بر منحنی توصیف نمود. به این اندازه گیری ها متغیرهای مسیر path variables می گویند.





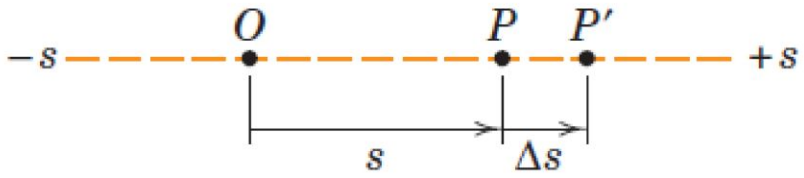
* بستگی به سیم (n,t)

- همچنین حرکت ذره می تواند نسبت به یک مرجع ثابت یا یک مرجع متحرک توصیف شود.

انتخاب دستگاه مناسب به تجربه و نحوه حرکت بستگی دارد.

حرکت مستقیم الخط Rectilinear Motion

- ذره ای را در نظر بگیرید که در طول یک خط راست حرکت می کند:



- مکان ذره P در هر لحظه t به صورت فاصله s از نقطه مرجع O مشخص می شود. برای سرعت و شتاب ذره روابط زیر برقرار است:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad (2/1)$$

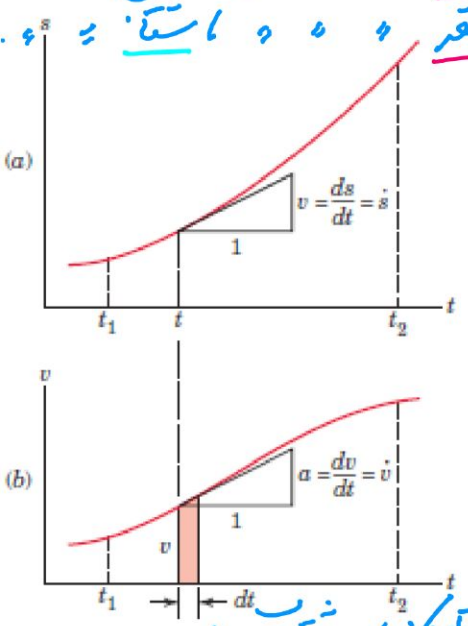
$a ds = \frac{dv}{dt} ds = dv \frac{ds}{dt} = v\, dv$

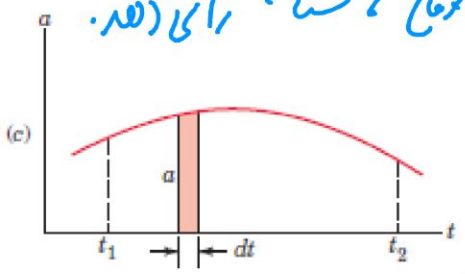
$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad \text{or} \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} \qquad (2/2)$$

$$v\,dv = a\,ds \quad \text{or} \quad \dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds \qquad (2/3)$$

تفسیر گرافیکی

- با مشاهده نمودارهای مکان، سرعت و یا شتاب بر حسب زمان یا بر حسب مکان می توان معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت را به صورت گرافیکی توصیف نمود:

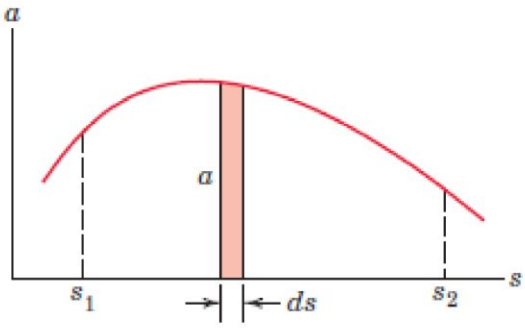




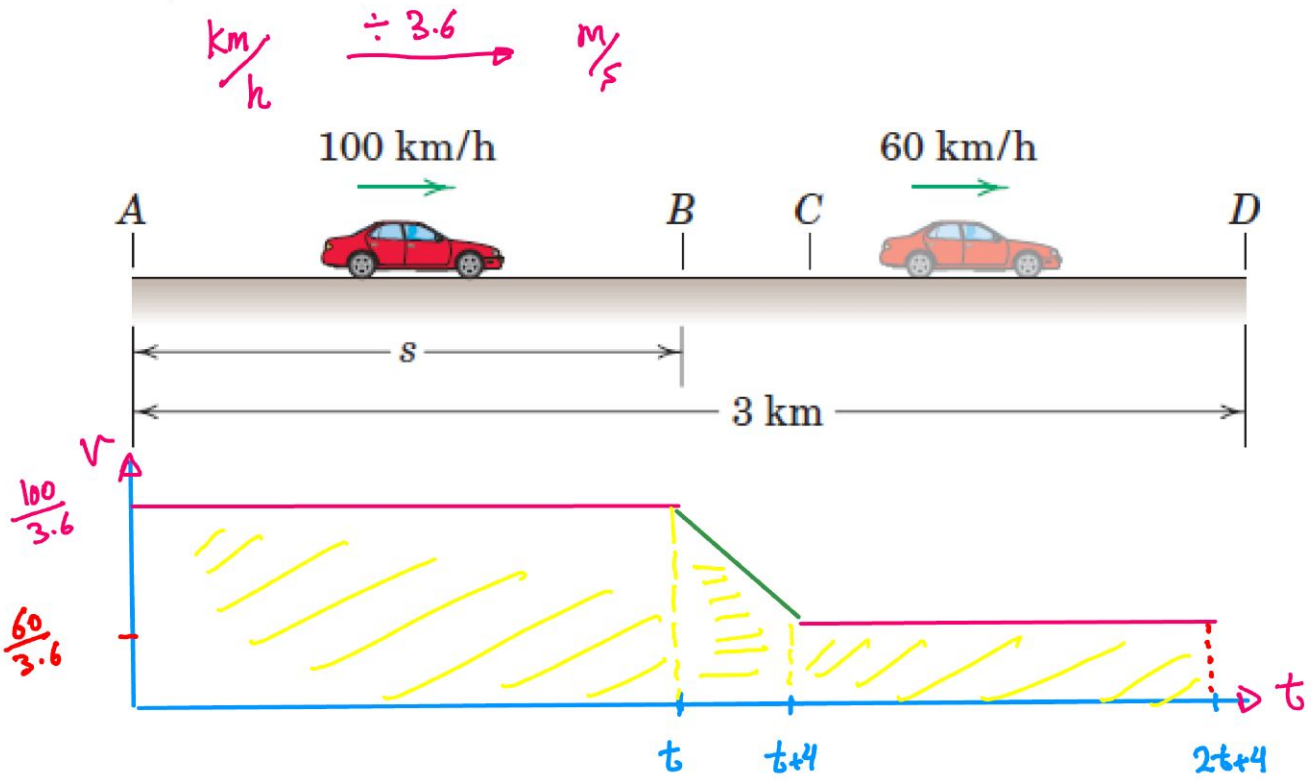
$$\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \qquad \text{or} \qquad s_2 - s_1 = (\text{area under } v\text{-}t \text{ curve})$$

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \qquad \text{or} \qquad v_2 - v_1 = (\text{area under } a\text{-}t \text{ curve})$$

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \int_{s_1}^{s_2} a\,ds \qquad \text{or} \qquad \tfrac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (\text{area under } a\text{-}s \text{ curve})$$



Example: In traveling a distance of 3 km between points A and D, a car is driven at 100 km/h from A to B for t seconds and 60 km/h from C to D also for t seconds. If the brakes are applied for 4 seconds between B and C to give the car a uniform deceleration, calculate t and the distance s between A and B.

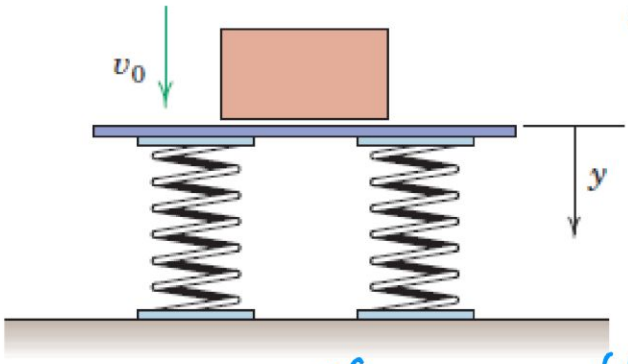


$$\int_0^{2t+4} v\,dt = \Delta s \longrightarrow \frac{100}{3.6}t + \frac{60}{3.6}t + \left(\frac{100}{3.6}+\frac{60}{3.6}\right)\frac{4}{2} = 3000$$

$$\longrightarrow t = 65.55 \text{ (s)}$$

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^{65.55} \frac{100}{3.6}\,dt = 1819.4 \text{ m}$$

Example: The body falling with v_0 speed strikes and maintains contact with the platform supported by a nest of springs. The acceleration of the body after impact is $a = g - cy$ where c is a positive constant and y is measured from the original platform position. If the maximum compression of the springs is observed to be δ, determine the constant c.



$0 \rightarrow y \rightarrow \delta$

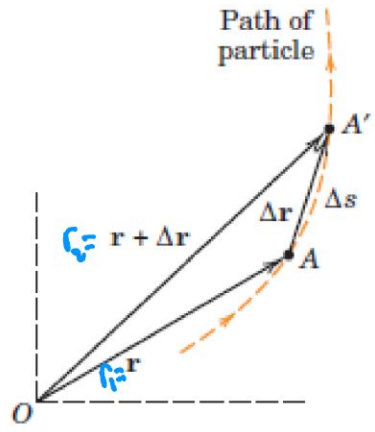
$$a\,dy = v\,dv \rightarrow \int_0^{\delta} a\,dy = \int_{v_0}^{0} v\,dv$$

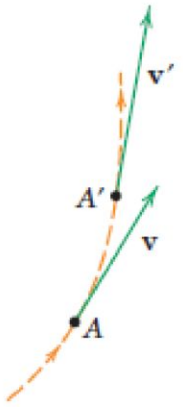
$$\int_0^{\delta} (g - cy)\,dy = \left(gy - \tfrac{c}{2}y^2\right)\Big|_0^{\delta} = -\frac{v_0^2}{2}$$

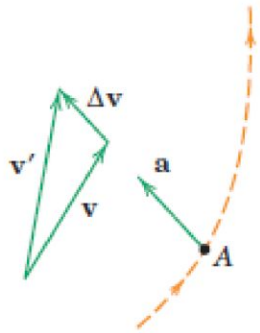
$$g\delta - \frac{c}{2}\delta^2 = -\frac{v_0^2}{2} \rightarrow c = \frac{2g}{\delta} + \frac{v_0^2}{\delta^2}$$

حرکت منحنی الخط صفحه ای Plane Curvilinear Motion

- فرض کنید ذره ای روی یک مسیر منحنی حرکت می کند که این مسیر داخل یک صفحه قرار دارد.







- سرعت متوسط *average velocity* ذره بین نقاط A و A' به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{v}_{av} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$$

- average speed ذره برابر است با $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

- سرعت لحظه ای *instantaneous velocity* ذره برابر است با: $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$

یا به شکلی دیگر داریم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \qquad (2/4)$$

بایستی توجه شود که جهت سرعت، مماس بر منحنی مسیری است که ذره روی آن حرکت می کند. (چرا؟)

اندازه سرعت برابر است با:

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

شتاب متوسط *average acceleration* ذره بین نقاط A و A' به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

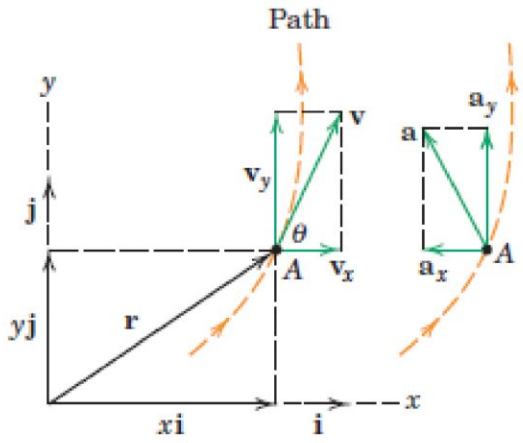
یا با تعریف مشتق، شتاب لحظه ای برابر است با:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \qquad (2/5)$$

بایستی توجه شود که جهت شتاب نه مماس بر منحنی مسیر ذره است و نه عمود بر آن.

مختصات مستطیلی Rectangular Coordinates (x-y)

- این سیستم دستگاه مختصات زمانی مناسب است که مولفه های x و y شتاب مستقل از یکدیگر ایجاد یا تعیین شده باشند.



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

(2/6)

$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = 0$

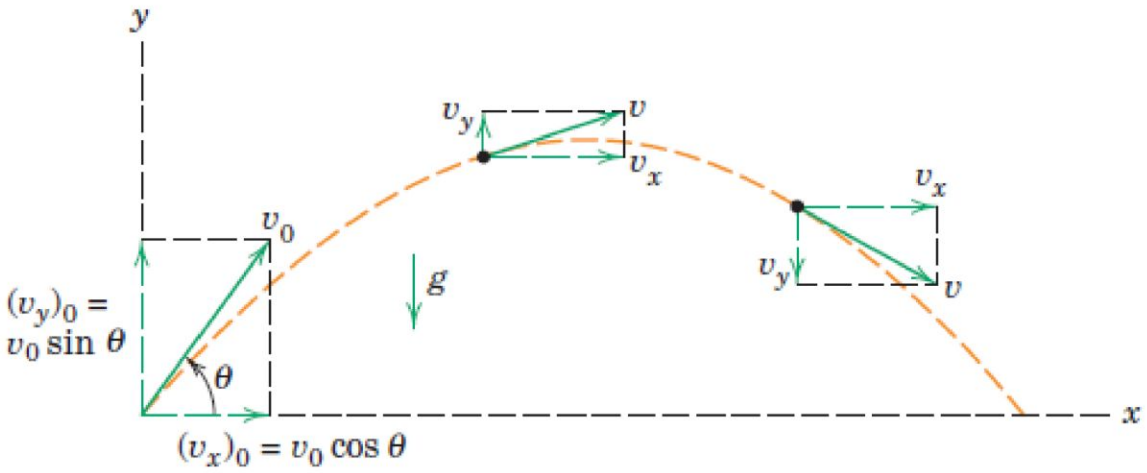
- جهت سرعت همواره مماس به مسیر حرکت ذره است.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

حرکت پرتابه Projectile Motion

- یک مثال کاربردی از تئوری سینماتیک دو بعدی در مختصات مستطیلی، مساله حرکت پرتابه است. **در اینجا ما از اثر درگ هوا، انحنا و دوران زمین صرف نظر می کنیم و فرض می کنیم که تغییر ارتفاع به قدر کافی کوچک است و فرض گرانش ثابت به اندازه کافی دقیق است.**



- با توجه به شکل داریم:

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \xrightarrow{\int} \begin{cases} \dot{x} = 0 + V_0 \cos\theta \\ \dot{y} = -gt + V_0 \sin\theta \end{cases} \xrightarrow{\int} \begin{cases} x = V_0 \cos\theta\, t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\theta\, t + y_0 \end{cases}$$

$$t = \frac{x - x_0}{V_0 \cos\theta}$$

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{V_0 \cos\theta}\right)^2 + V_0 \sin\theta \left(\frac{x - x_0}{V_0 \cos\theta}\right) + y_0$$

معادله سهمی

اوج $\longrightarrow$ $V_y = \dot{y} = 0 \longrightarrow$ زمان رسیدن به اوج $t = \dfrac{V_0 \sin\theta}{g}$

H ارتفاع اوج $y\left(t = \dfrac{V_0 \sin\theta}{g}\right) = -\frac{1}{2} g \left(\dfrac{V_0 \sin\theta}{g}\right)^2 + V_0 \sin\theta \left(\dfrac{V_0 \sin\theta}{g}\right) + y_0$

R برد $x\left(2\dfrac{V_0 \sin\theta}{g}\right) = V_0 \cos\theta \left(\dfrac{2 V_0 \sin\theta}{g}\right) + x_0$

با توجه به ثابت بودن شتابها، روابط حاکم بر سرعت و مکان ذره عبارتند از:

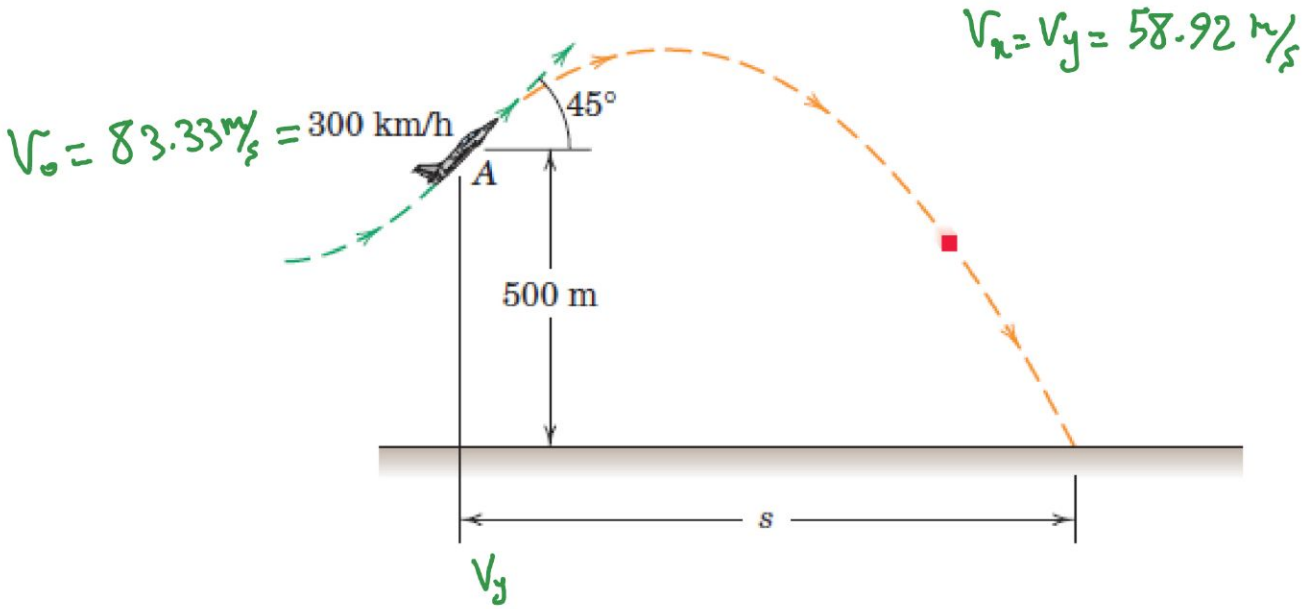
$$v_x = (v_x)_0 \qquad v_y = (v_y)_0 - gt$$

$$x = x_0 + (v_x)_0 t \qquad y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y{}^2 = (v_y)_0{}^2 - 2g(y - y_0)$$

This stroboscopic photograph of a bouncing ping-pong ball suggests not only the parabolic nature of the path, but also the fact that the speed is lower near the apex.

Example: The pilot of an airplane pulls into a steep 45° climb at 300 km/h and releases a package at position *A*. Calculate the horizontal distance *s* and the time *t* from the point of release to the point at which the package strikes the ground.



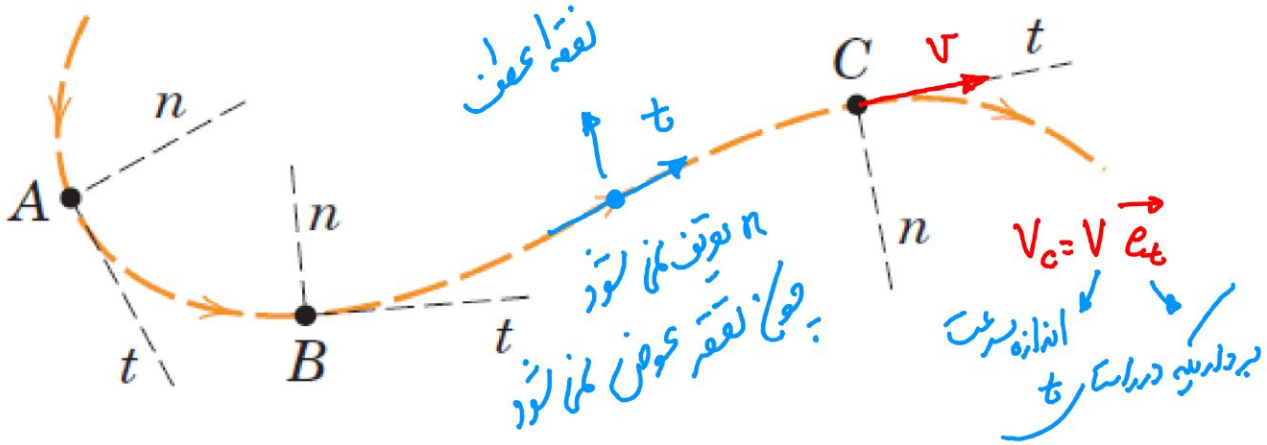
$$y = -\tfrac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\theta \, t + y_0$$

$$0 = -\tfrac{1}{2}(9.8) t^2 + 58.92\, t + 500 \rightarrow t = 12.81 \text{ s}$$

$$s = x = \underbrace{V_0 \cos\theta}_{V_x} t + x_0 = (58.92)(12.81) + 0 = 754.76 \text{ m}$$

مختصات مماسی-عمودی (n-t) Normal and Tangential Coordinates

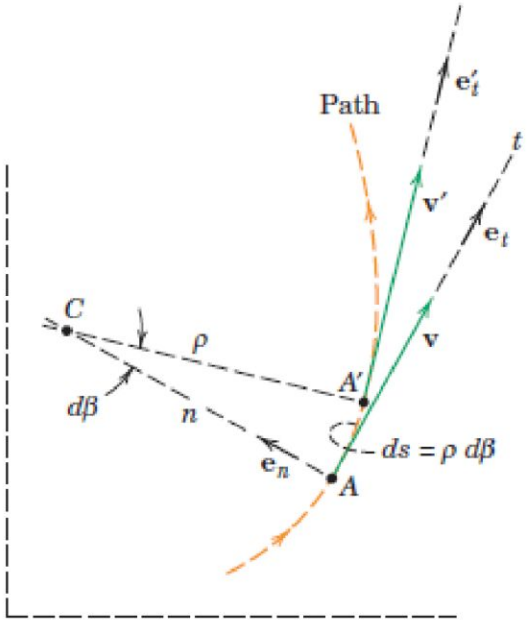
- یکی از روشهای توصیف حرکت منحنی الخط ذرات، استفاده از متغیرهای مسیر می باشد که اندازه گیریهای آن در طول مماس t و عمود n (شکل زیر) بر مسیر حرکت ذره صورت می پذیرد.



- دستگاه n-t با حرکت ذره در طول مسیر مطابق شکل حرکت می کند و جهت مثبت n به سمت مرکز شعاع انحنای هر نقطه از مسیر است.
- جهت n از یک سمت مسیر به سمت دیگر مسیر تغییر جهت می دهد اگر جهت انحنا تغییر کند.

سرعت و شتاب

- در طول یک بازه زمانی کوچک dt ذره به اندازه مسافت ds روی مسیر خود حرکت نموده و از نقطه A به نقطه A' حرکت می نماید.



- اگر شعاع انحنای مسیر را در نقطه A برابر با ρ در نظر بگیریم

مسافت طی شده برابر خواهد بود با $ds = \rho d\beta$

- اندازه سرعت ذره در این حالت برابر است با: $v = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\beta}{dt}$
- بردار سرعت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\mathbf{e}}_t = \rho\dot{\beta}\mathbf{e}_t$$

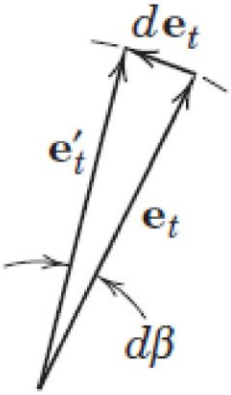
بردار یکه مماسی

(2/7)

شتاب ذره را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e}_t)}{dt} = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t \qquad (2/8)$$

برای تعیین مشتق بردار یکه مماسی یا همان $\dot{\mathbf{e}}_t$ می توان از شکل زیر استفاده نمود:



$$d\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_n\, d\beta \Longrightarrow \frac{d\mathbf{e}_t}{d\beta} = \mathbf{e}_n$$

$$\Longrightarrow \dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\beta}\mathbf{e}_n \qquad (2/9)$$

لذا برای شتاب داریم:

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n + \dot{v}\mathbf{e}_t \qquad (2/10)$$

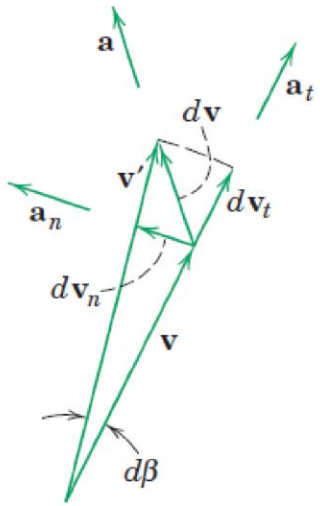
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta}$$

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_t{}^2}$$

در رابطه شتاب بدست آمده $a_t = \dot{v}$ آهنگ تغییرات سرعت ذره است.

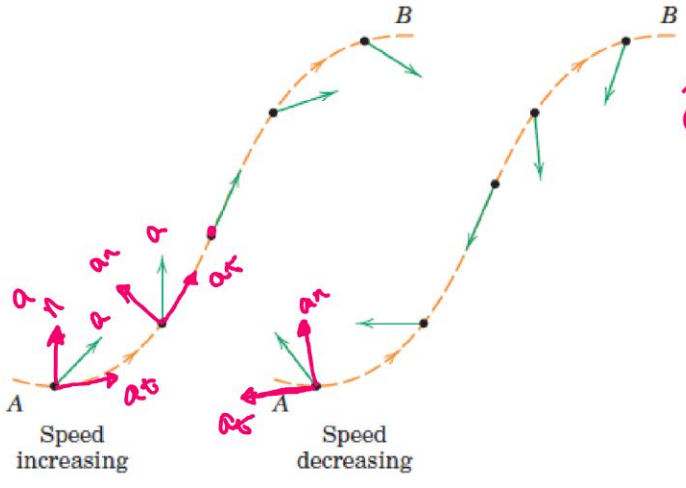
برای فهم ترم شتاب مماسی و نرمال می توان به شکل مقابل مراجعه کرد:



$$|d\mathbf{v}_n| = v\, d\beta$$

$$a_n = |d\mathbf{v}_n|/dt = v(d\beta/dt) = v\dot{\beta}$$

$$a_t = dv/dt = \dot{v} = \ddot{s}$$

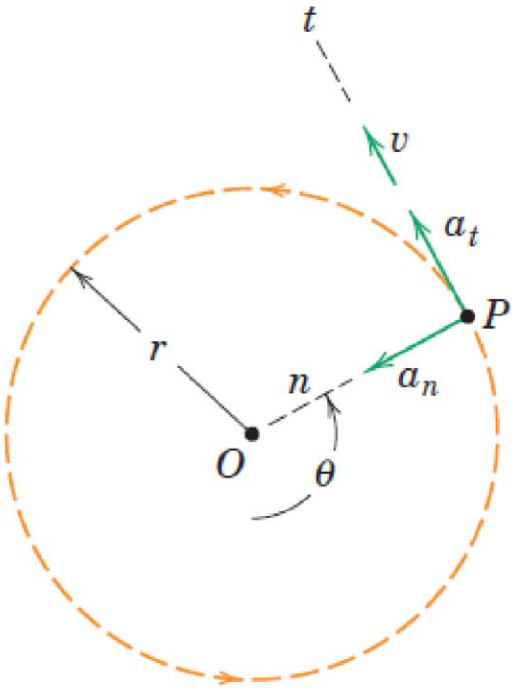


ترم شتاب عمودی همواره به سمت مرکز انحنای مسیر است.

جمله مماسی شتاب در صورتیکه اندازه سرعت در حال افزایش باشد در جهت سرعت وگرنه خلاف جهت سرعت است.

حرکت دایروی Circular Motion

- به عنوان حالت خاصی از حرکت منحنی الخط می توان به حرکت دایروی اشاره نمود که در آن شعاع انحنای مسیر یعنی ρ دارای مقدار ثابتی است که با r نمایش می دهیم. زاویه β نیز با زاویه θ جایگزین می شود که نسبت به یک مرجع مناسبی اندازه گیری می شود.
- در این حالت روابط سرعت و شتاب عبارتند از:



$$\vec{V} = V\,\hat{e}_t = \rho\dot{\beta}\,\hat{e}_t = r\dot{\theta}\,\hat{e}_t$$

$$v = r\dot{\theta}$$

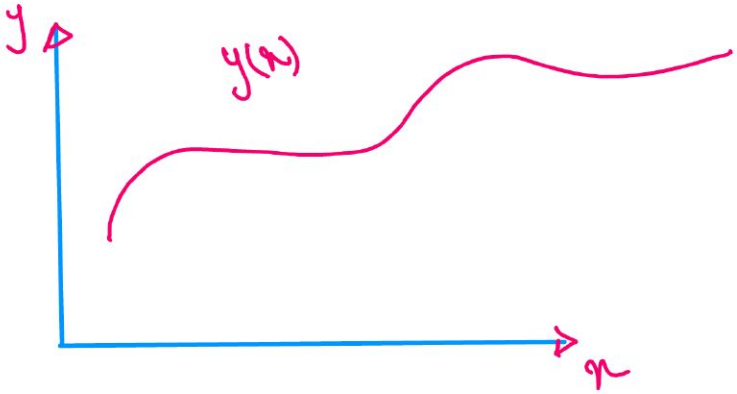
$$a_n = v^2/r = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta} \qquad (2/11)$$

$$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta}$$

$$\vec{a} = \dot{V}\,\hat{e}_t + \frac{V^2}{\rho}\,\hat{e}_n = \underbrace{r\ddot{\theta}}_{a_t}\,\hat{e}_t + \underbrace{r\dot{\theta}^2}_{a_n}\,\hat{e}_n$$

$$\vec{a} = R\alpha\,\hat{e}_t + R\omega^2\,\hat{e}_n$$

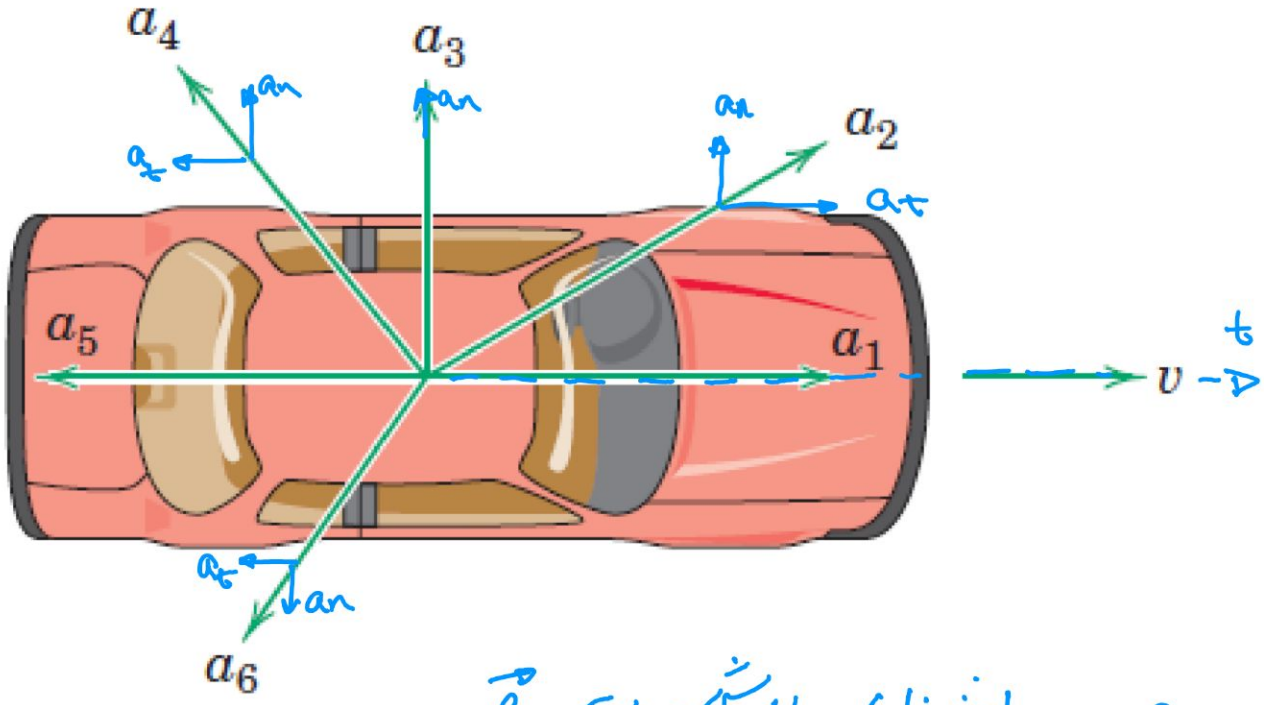
$$|a| = \sqrt{(R\alpha)^2 + (R\omega^2)^2}$$



اگر y برحسب x داده شده بود

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Example: Six acceleration vectors are shown for the car whose velocity vector is directed forward. For each acceleration vector describe in words the instantaneous motion of the car.



a_1 ← انحنا نداریم، افزایش سرعت

a_2 ← انحنا داریم، افزایش سرعت

a_3 ← سرعت ثابت، نه گاز نه ترمز

a_4 ← انحنا داریم، کاهش سرعت، ترمز

a_5 ← انحنا نداریم، ترمز

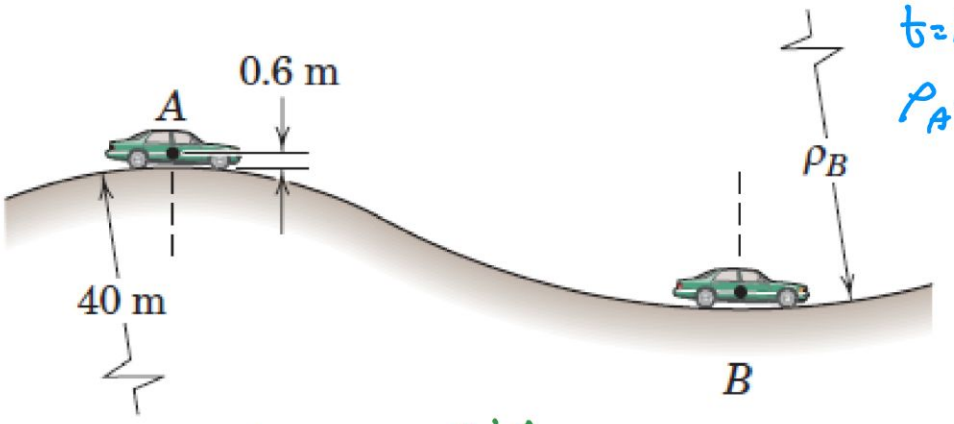
a_6 ← انحنا داریم، کاهش سرعت، ترمز

Example: The speed of a car increases uniformly with time from 50 km/h at *A* to 100 km/h at *B* during 10 seconds. The radius of curvature of the hump at *A* is 40 m. If the magnitude of the total acceleration of the mass center of the car is the same at *B* as at *A*, compute the radius of curvature of the dip in the road at *B*. The mass center of the car is 0.6 m from the road.

$V_A = 50$ km/h $V_B = 100$ km/h

$t = 10$ s

$\rho_A = 40$ m $\rho_B = ?$



$|a| = \text{Constant} \rightarrow v_A = v_B$?! ✗

✓ $|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| \rightarrow$

$\vec{a}_A = \dot{v}_A \vec{e}_t + \frac{v_A^2}{\rho_A} \hat{e}_n$

$\vec{a}_B = \dot{v}_B \vec{e}_t + \frac{v_B^2}{\rho_B} \hat{e}_n$

$|\vec{a}_A| = \sqrt{(\dot{v}_A)^2 + \left(\frac{v_A^2}{\rho_A}\right)^2}$ $|\vec{a}_B| = \sqrt{(\dot{v}_B)^2 + \left(\frac{v_B^2}{\rho_B}\right)^2}$

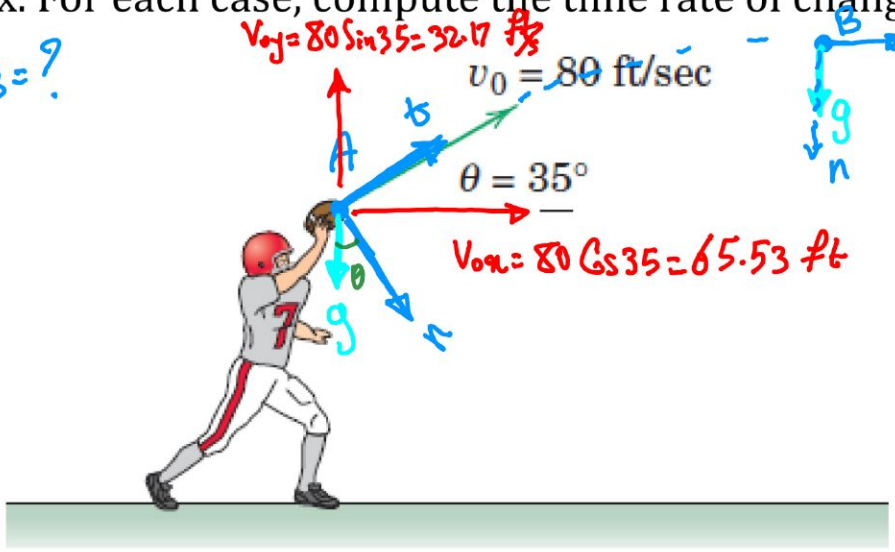
$\dot{v}_A^2 + \frac{v_A^4}{\rho_A^2} = \dot{v}_B^2 + \frac{v_B^4}{\rho_B^2} \rightarrow \rho_B = 162.4$ m

$\rho_A = 40.6$

$\rho_B = 162.4 + 0.6 = 163$ m

Example: A football player releases a ball with the initial conditions shown in the figure. Determine the radius of curvature of the trajectory (*a*) just after release and (*b*) at the apex. For each case, compute the time rate of change of the speed.

$\rho_A = ?$ $\rho_B = ?$



A. $a_t = -g \sin 35 = 32.17 \sin 35 = 18.45 = \dot{v}$

$a_n = g \cos 35 = 32.17 \cos 35 = 26.35 = \frac{v_0^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{80^2}{26.35} = 242.88$

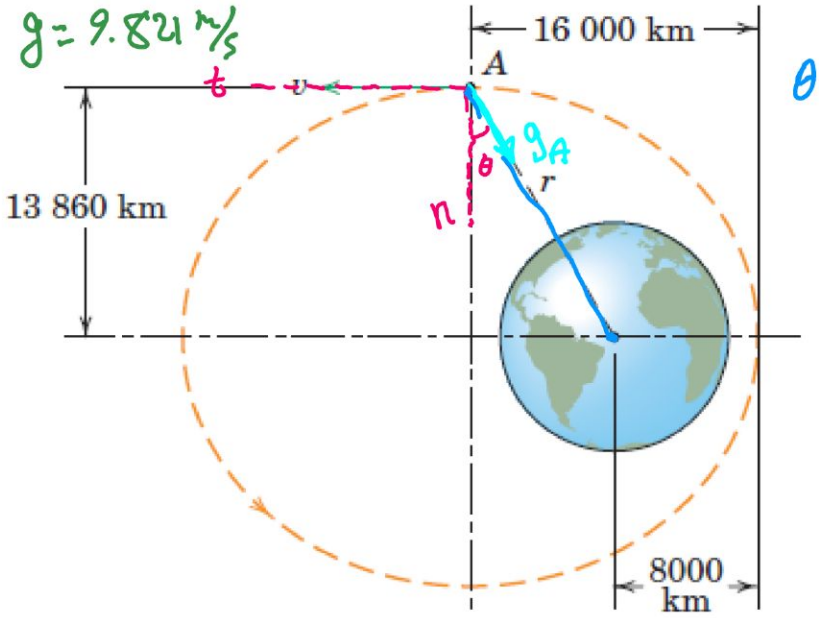
B $a_t = 0 = \dot{v}$

$a_n = g = 32.17 \ \frac{ft}{s^2} = \frac{(V_{ox})^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{(65.53)^2}{32.17} = 133.47$ ft

Example: An earth satellite which moves in the elliptical equatorial orbit shown has a velocity v in space of 17 970 km/h when it passes the end of the semiminor axis at A. The earth has an absolute surface value of g of 9.821 m/s2 and has a radius of 6371 km. Determine the radius of curvature of the orbit at A.

$V_A = 17970 \ km/h$ $\quad g = 9.821 \ m/s$

$R_e = 6371 \ km$



$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8000}{13860}\right) = 29.99^\circ$

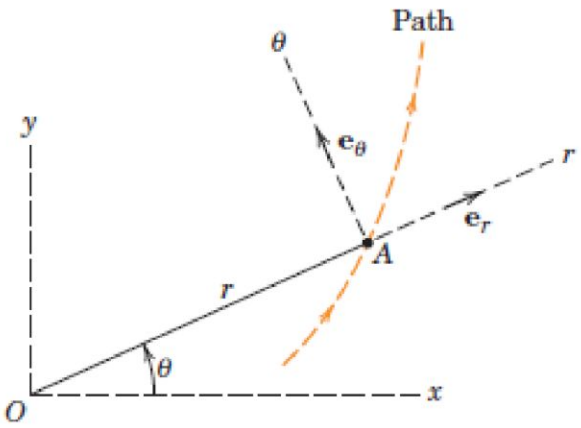
$$g_A = g\frac{R^2}{(R+h)^2} = g\frac{R^2}{r^2} = 9.821\ \frac{6371}{16003.11} = 1.55 \ m/s^2$$

$$a_n = g\cos\theta = 1.55\ \frac{13860}{16003.11} = 1.34 \ m/s^2$$

$$a_n = 1.34 = \frac{V^2}{\rho} \longrightarrow \rho = 18594579.19 \ m$$

مختصات قطبی Polar Coordinates (r-θ)

- اکنون سومین نوع توصیف حرکت منحنی الخط صفحه ای را بیان می کنیم که در آن حرکت ذره توسط فاصله آن از مبدا یا همان r و یک زاویه θ بین خطی که از محل ذره به مبدا وصل می شود و یک خط مرجع توصیف می شود.

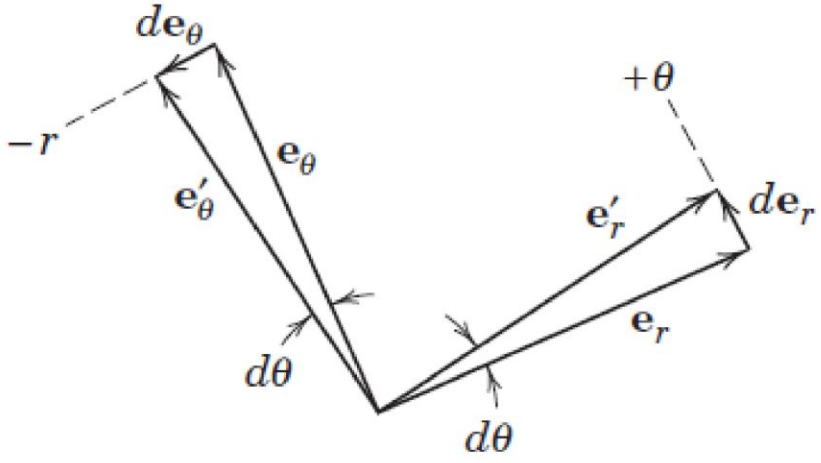


- این دستگاه زمانی برای توصیف حرکت ذره موثر است که حرکت ذره از طریق تغییر فاصله شعاعی آن از مبدا و یک زاویه کنترل یا اندازه گیری شود.
- بردارهای یکه $\boldsymbol{e}_r$ و $\boldsymbol{e}_\theta$ در جهات مثبت r و θ می باشند.
- بردار مکان ذره یا همان $\vec{\boldsymbol{r}}$ در نقطه A یک اندازه برابر با فاصله شعاعی r و یک جهت که با بردار یکه $\vec{\boldsymbol{e}}_r$ مشخص می شود دارد. لذا می توان مکان ذره در نقطه A را توسط بردار زیر نشان داد:

$$\vec{\mathbf{r}} = r\vec{\mathbf{e}}_r$$

تعیین سرعت و شتاب ذره در دستگاه قطبی

- برای اینکه سرعت و شتاب را تعیین نماییم نیاز است که مشتق بردارهای یکه $\boldsymbol{e}_r$ و $\boldsymbol{e}_\theta$ را نسبت به زمان تعیین نماییم.
- وقتی یک زمان خیلی کوچک dt می گذرد بردارهای یکه سیستم از $\boldsymbol{e}_r$ و $\boldsymbol{e}_\theta$ به $\boldsymbol{e'}_r$ و $\boldsymbol{e'}_\theta$ تغییر می کنند. این تغییر از طریق یک دوران $d\theta$ در جهت مثبت θ ایجاد می شود:



- با توجه به شکل داریم:

$$d\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta\, d\theta \qquad d\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r\, d\theta$$

با تقسیم روابط گفته شده بر $d\theta$ خواهیم داشت:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \qquad \text{and} \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r$$

در صورتیکه روابط را به جای $d\theta$ بر dt تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$d\mathbf{e}_r/dt = (d\theta/dt)\mathbf{e}_\theta \qquad d\mathbf{e}_\theta/dt = -(d\theta/dt)\mathbf{e}_r$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\mathbf{e}_r \qquad (2/12)$$

تعیین سرعت Velocity: برای تعیین سرعت کافی است از رابطه مکان ذره $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ نسبت به زمان مشتق بگیریم:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad (2/13)$$

لذا مولفه شعاعی و زاویه ای سرعت و همچنین اندازه سرعت برابر خواهند بود با:

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

تعیین شتاب Acceleration: برای تعیین شتاب کافی است از رابطه سرعت نسبت به زمان مشتق گیری داشته باشیم:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r) + (\dot{r}\,\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta)$$

با جایگزینی مشتق بردارهای یکه خواهیم داشت:

$$\vec{\mathbf{a}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}_\theta \qquad (2/14)$$

لذا مولفه شعاعی و زاویه ای شتاب و همچنین اندازه شتاب برابر خواهند بود با:

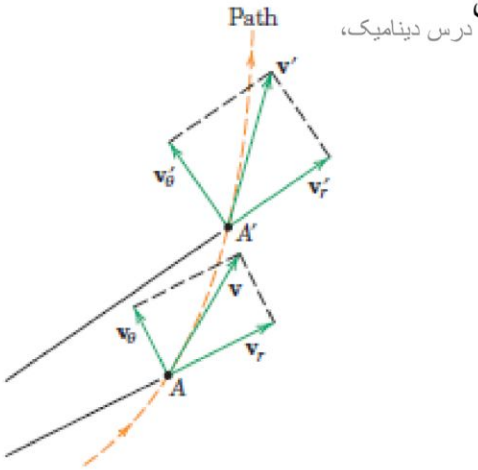
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

مولفه زاویه ای شتاب یعنی a_θ را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

تفسیر گرافیکی

❑ فرض کنید که ذره یک حرکت بی نهایت کوچک را روی مسیر خود طی نموده و از نقطه A به A′ رسیده است. داریم:



درس دینامیک،

- تغییر اندازه v_r :

$$dv_r = d\dot{r}$$

- تغییر جهت v_r :

$$v_r\, d\theta = \dot{r}\, d\theta$$

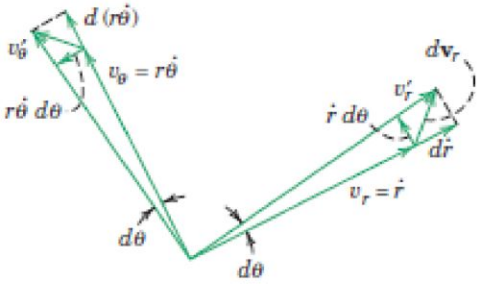
- تغییر اندازه v_θ :

$$d(r\dot{\theta})/dt = r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$$

- تغییر جهت v_θ :

$$v_\theta\, d\theta = r\dot{\theta}\, d\theta$$

با در نظر گرفتن جهت تغییرات بالا و در مجموع خواهیم داشت:



$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

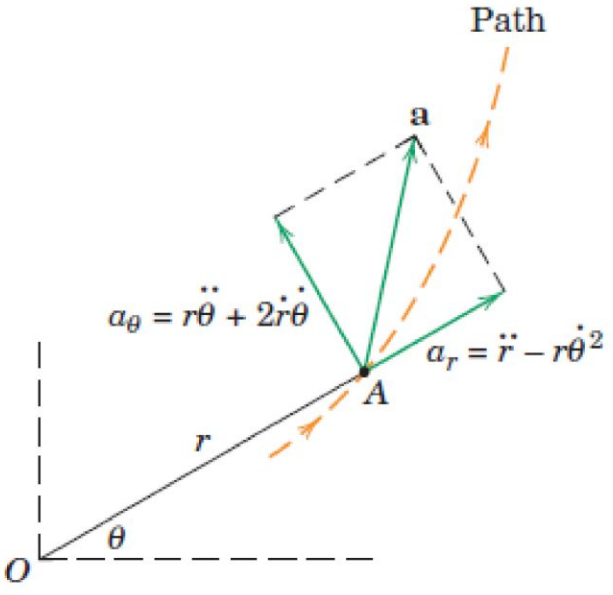
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

ترم $\ddot{r}$ شتابی است که ذره در جهت شعاعی دارد اگر هیچ تغییری در θ صورت نپذیرد.

جمله $-r\dot{\theta}^2$ مولفه عمودی شتاب است اگر r ثابت باشد (مانند حرکت دایره ای).

جمله $r\,\ddot{\theta}$ شتاب مماسی است که ذره تجربه می کند اگر r ثابت باشد، البته این جمله فقط بخشی از شتاب است که در اثر تغییر در اندازه سرعت v_θ با فرض ثابت بودن r رخ می دهد.

جمله $2\,\dot{r}\dot{\theta}$ ناشی از دو اثر است. یکی از تغییر در اندازه v_θ به دلیل تغییر در شعاع اتفاق می افتد و دیگری از تغییر در جهت سرعت v_r اتفاق می افتد.



نکته مهم: بایستی توجه کنیم که

$$a_r \neq \dot{v}_r$$

$$a_\theta \neq \dot{v}_\theta$$

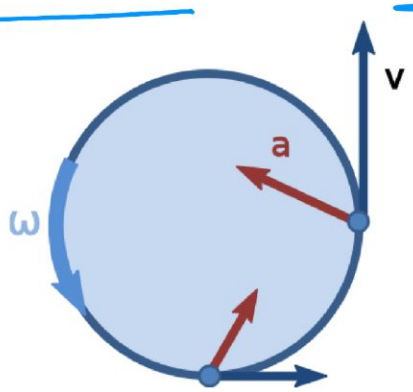
حرکت دایروی Circular Motion

- حرکت دایره ای را می توان به خوبی در دستگاه قطبی بیان نمود.
- برای یک حرکت دایره ای با توجه به ثابت بودن شعاع داریم:

$$v_r = 0 \qquad v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta}$$

- این توصیف همان مولفه های مماسی-عمودی که قبلا در دستگاه مماسی-عمودی توسعه دادیم را به دست می دهند. در این حالت جهت t و θ منطبق هستند و جهت n خلاف جهت r است.

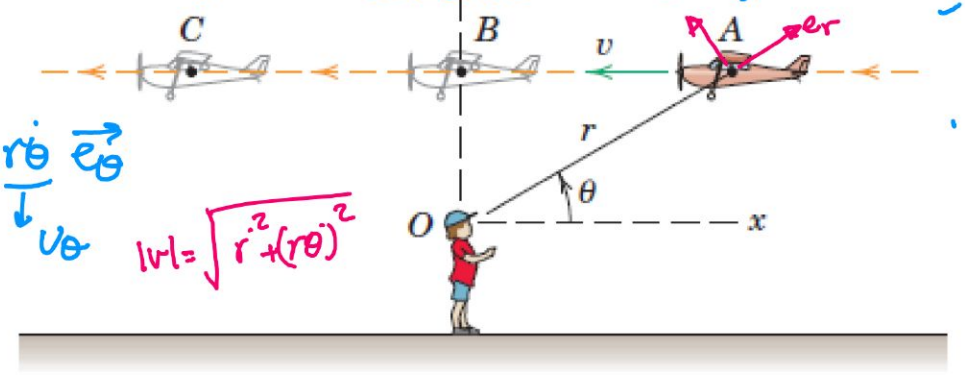


Example: A model airplane flies over an observer O with constant speed in a straight line as shown. Determine the signs (plus, minus, or zero) for r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, θ, $\dot{\theta}$, and $\ddot{\theta}$ for each of the positions A, B, and C.

$V=Cte \rightarrow a=0 \begin{cases} a_r=0 \rightarrow \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0 \\ a_\theta=0 \rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0 \end{cases}$

e_θ لذا همیشه

* r فاصله همیشه مثبت است
* چون دوران افزایشی است θ مقدارش مثبت است و $\dot{\theta}$ هم مثبت است.



$\vec{V}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\dot{r}$: v_r , $r\dot{\theta}$: v_θ

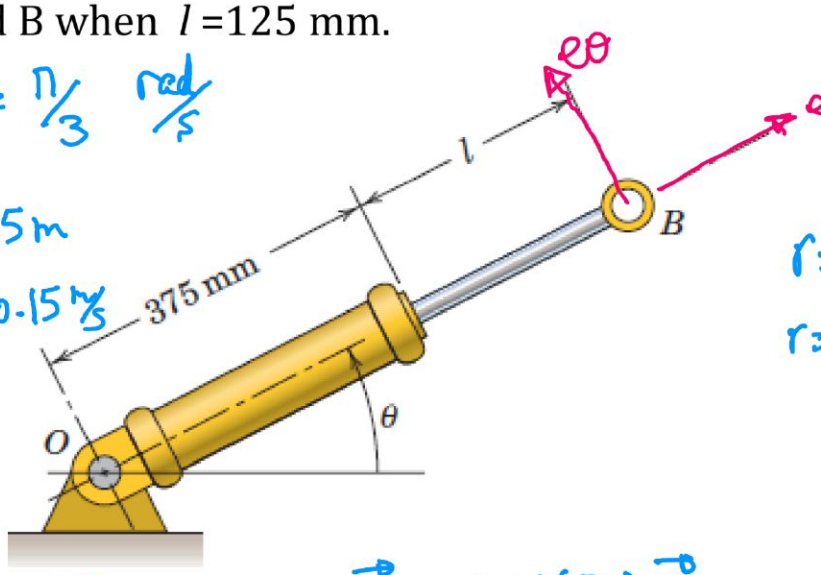
$|v|=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2}$

A.
- $r>0$
- $\dot{r}<0$
- $\ddot{r}>0$
- $\theta>0$
- $\dot{\theta}>0$
- $\ddot{\theta}>0$

B
- $r>0$
- $\dot{r}=0$
- $\ddot{r}>0$
- $\theta>0$
- $\dot{\theta}>0$
- $\ddot{\theta}=0$

C
- $r>0$
- $\dot{r}>0$
- $\ddot{r}>0$
- $\theta>0$
- $\dot{\theta}>0$
- $\ddot{\theta}<0$

Example: As the hydraulic cylinder rotates around O, the exposed length l of the piston rod P is controlled by the action of oil pressure in the cylinder. If the cylinder rotates at the constant rate $\dot{\theta} = 60\ deg/s$ and l is decreasing at the constant rate of 150 mm/s, calculate the magnitudes of the velocity $\boldsymbol{v}$ and acceleration $\boldsymbol{a}$ of end B when l =125 mm.



$\dot{\theta} = 60 \frac{deg}{s} \times \frac{\pi}{180} = \pi/3 \ rad/s$

$l = 125\ mm = 0.125\ m$

$\dot{r} = \dot{l} = -150 \ mm/s = -0.15 \ m/s$

$r = 375 + 125 = 500\ mm$

$r = 0.5\ m$

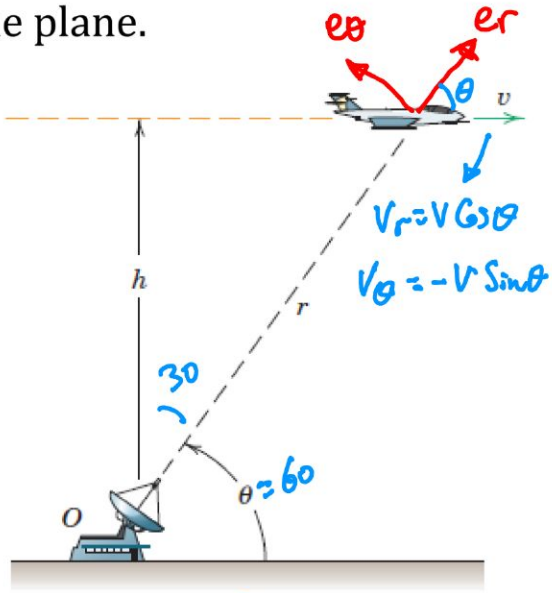
$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -0.15\vec{e}_r + (0.5)(\pi/3)\vec{e}_\theta$

$|\vec{v}| = \sqrt{0.15^2 + 0.52^2} = 0.54 \ m/s$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$ $\quad \ddot{r} = \ddot{\theta} = 0$

$\vec{a} = -0.54\vec{e}_r - 0.31\vec{e}_\theta$ $\quad |\vec{a}| = 0.61 \ m/s^2$

Example: A jet plane flying at a constant speed v at an altitude h=10 km is being tracked by radar located at O directly below the line of flight. If the angle θ is decreasing at the rate of 0.020 rad/s when $\theta = 60^o$, determine the value of $\ddot{r}$ at this instant and the magnitude of the velocity **v** of the plane.



$V = Constant \rightarrow a = 0 \rightarrow a_r = 0$

$a_\theta = 0$

$h = 10\ km$

$\dot{\theta} = -0.02\ rad/s$

$\ddot{\theta} = 0$

$\theta = 60^\circ$

$a_r = 0 \rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \rightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2$

$\ddot{r} = (11547)(-0.02)^2 = 4.62\ m/s^2$

$Cos30 = \frac{h}{r}$

$r = \frac{h}{Cos30} = 11547\ m$

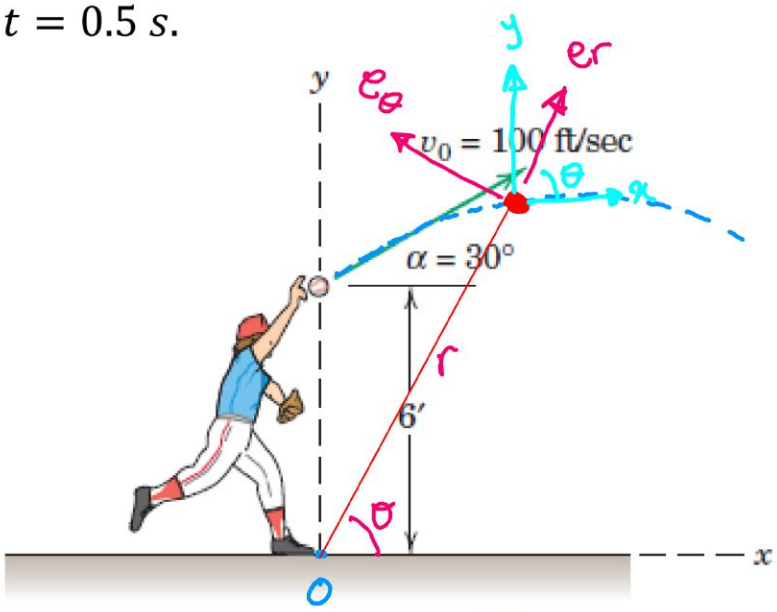
$\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$V_r = \frac{1}{2}V$

$V_\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}V = r\dot{\theta} = (11547)(-0.02) \rightarrow V = 266.67\ m/s$

Example: At time $t=0$, the baseball player releases a ball with the initial conditions shown in the figure. Determine the quantities for r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, θ, $\dot{\theta}$, and $\ddot{\theta}$ all relative to the x-y coordinate system shown, at time $t = 0.5\ s$.

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$



در راستای افقی:
$$a_x = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0$$
$$V_x = V_{0x} = V_0 \cos 30 = 86.6$$
$$x = V_0 \cos\alpha\, t + x_0 = 43.3$$

در راستای عمودی:
$$a_y = -g = -32.17\ \frac{ft}{s^2} = \ddot{y}$$
$$V_y = -gt + V_0 \sin\alpha = 33.92\ \frac{ft}{s}$$
$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha\, t + y_0 = 26.97\ ft$$

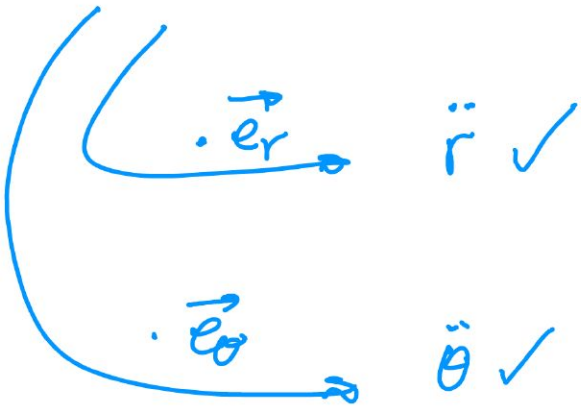
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = 51.01\ ft$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = 31.91°$$

$$\vec{V} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$
$$(86.6\,\hat{i} + 33.92\,\hat{j}) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

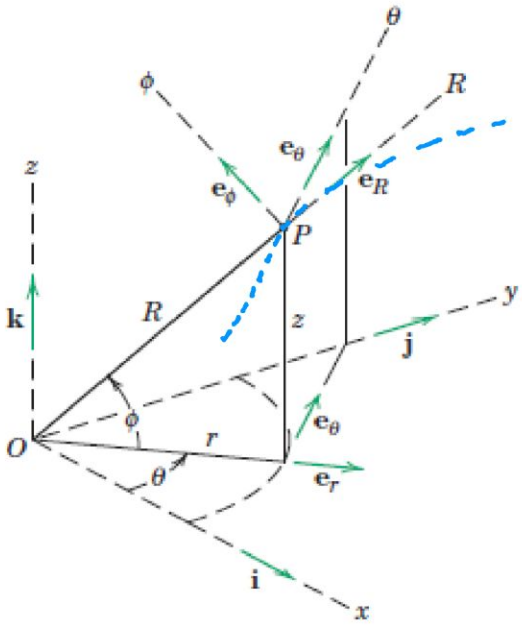
طرفین عبارت بالا را در $\vec{e}_\theta$ ضرب داخلی کنیم $\xrightarrow{\cdot\,\vec{e}_\theta}$
$$(86.6\,\hat{i} + 33.92\,\hat{j})\cdot(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) = r\dot{\theta}$$
$$-86.6\sin(31.91) + 33.92\cos(31.91) = 51.01\,\dot{\theta}$$
$$\rightarrow \dot{\theta} = \checkmark$$

$$\xrightarrow{\cdot\,\vec{e}_r} (86.6\,\hat{i} + 33.92\,\hat{j})\cdot(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}) = \dot{r}$$
$$86.6\cos(31.91) + 33.92\sin(31.91) = \dot{r}$$
$$\rightarrow \dot{r} = \checkmark$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta$$



حرکت منحنی الخط در فضا Space Curvilinear Motion



- حرکت کلی سه بعدی یک ذره در طول یک منحنی فضایی را در نظر بگیرید.
- حرکت ذره را می توان در یکی از سه دستگاه متداول مختصات مستطیلی یا کارتزین x, y, z ، مختصات استوانه ای r, θ, z ، یا مختصات کروی R, θ, φ توصیف نمود.
- البته دستگاه مماسی-عمودی را نیز می توان برای توصیف حرکت ذره در فضا نیز به کار برد. در این حالت در هر لحظه می توان فرض کرد که منحنی داخل یک صفحه قرار دارد که به آن صفحه plane osculating می گویند. در حرکت فضایی صفحه osculating در حال تغییر با زمان است. در هر لحظه بردارهای مماسی و عمودی در جهت های t و n در صفحه osculating قرار دارند.

Example: The velocity and acceleration of a particle are given for a certain instant by **v**= 6**i** - 3**j** +2**k** m/s and **a** = 3**i** - **j** - 5**k** m/s2. Determine the angle between **v** and **a**, $\dot{v}$, and the radius of curvature in the osculating plane.

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = |v||a|\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|v||a|} = \frac{18+3-10}{\sqrt{36+9+4}\ \sqrt{9+1+25}} = \frac{11}{41.41}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{41.41}\right) = 74.59^\circ$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} = \dot{v}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

$\cdot\vec{e}_t$

$$(3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k})\cdot\vec{e}_t = \dot{v}$$

$$\vec{v} = |v|\,\vec{e}_t \rightarrow \vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{|v|} = \frac{6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}}{7} = \frac{6}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{k}\vec{k}$$

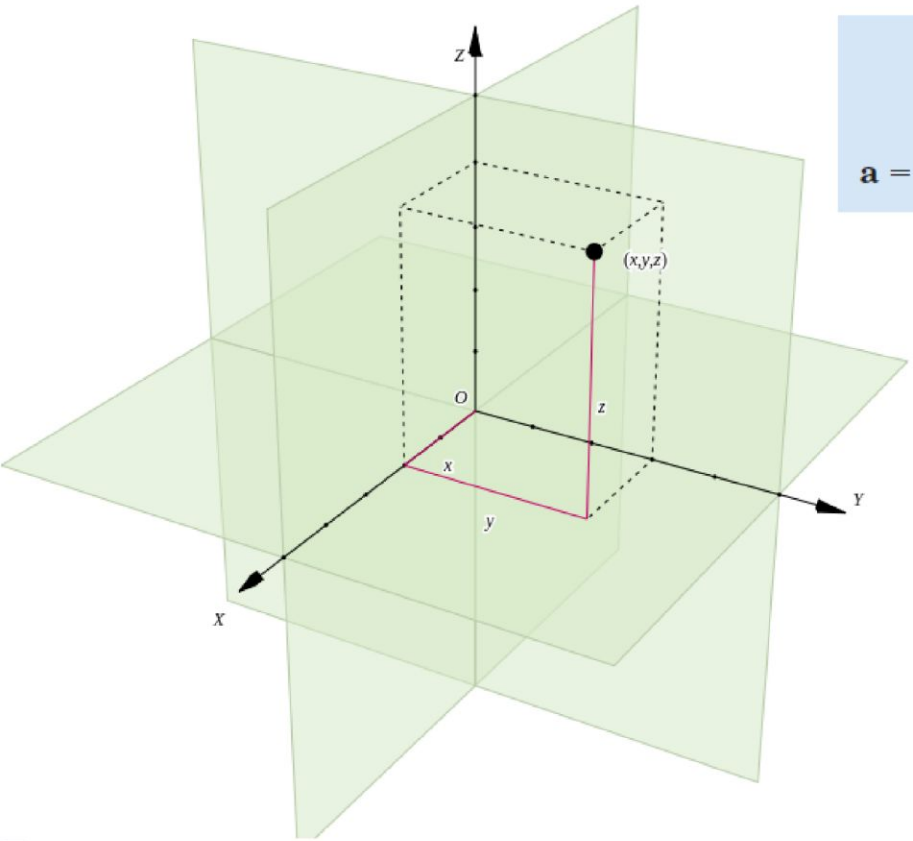
$$\dot{v} = (3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k})\cdot\left(\frac{6}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}\right) = \frac{11}{7}$$

$$|a| = \sqrt{9+1+25} = 7 = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \Rightarrow 35 = \left(\frac{11}{7}\right)^2 + \frac{7^4}{\rho^2}$$

$$\rho = 8.59\,m$$

مختصات مستطیلی یا کارتزین سه بعدی Rectangular Coordinates (x-y-z)

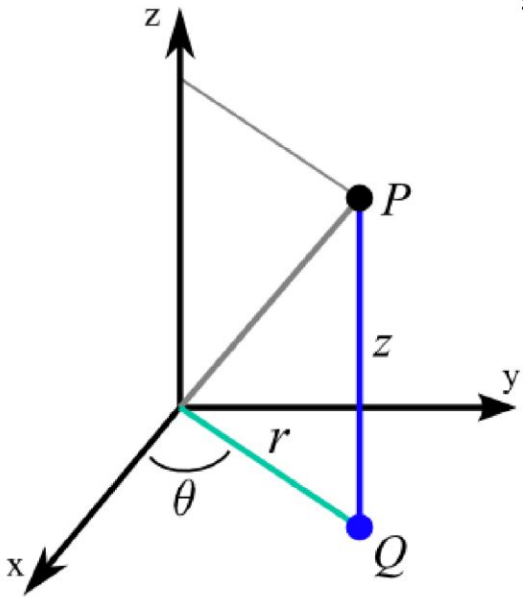
- در حالت حرکت سه بعدی یا حرکت در فضا خواهیم داشت:



$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \qquad (2/15)$$
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

دستگاه مختصات استوانه ای Cylindrical Coordinates (r-θ-z)

- دستگاه مختصات استوانه ای حالت عمومی تر دستگاه قطبی است که در آن حرکت به جای دو بعد در سه بعد صورت می گیرد. یعنی در واقع علاوه بر فاصله از مبدا r و زاویه حرکت θ، ارتفاع حرکت یعنی z هم وجود دارد.



- بردار مکان ذره $\mathbf{R}$ در مختصات استوانه ای به صورت زیر قابل بیان است:

$$\vec{\mathbf{R}} = r\vec{\mathbf{e}}_r + z\vec{\mathbf{k}}$$

- بردار سرعت را می توان با مشتق گیری از بردار مکان تعیین نمود:

$$\vec{\mathbf{v}} = \dot{r}\vec{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\vec{\mathbf{k}} \qquad (2/16)$$

- لذا مولفه های سرعت در سه راستای z , θ , r عبارتند از:

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v_z = \dot{z}$$
$$v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2 + {v_z}^2}$$

برای تعیین شتاب در دستگاه مختصات استوانه ای کافی است از بردار سرعت مشتق بگیریم:

$$\vec{\mathbf{a}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\vec{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(2/17)}$$

لذا مولفه های شتاب در سه راستای z, θ , r عبارتند از:

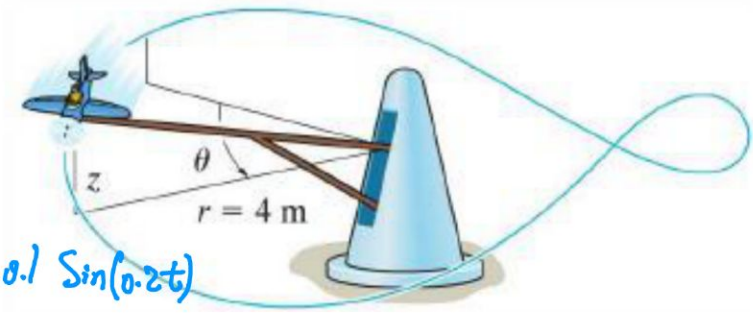
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2 + {a_z}^2}$$

بایستی دقت کنیم که چون جهت بردارهای یکه $\boldsymbol{e_r}$, $\boldsymbol{e_\theta}$ با زمان تغییر می کنند مشتق این بردارها صفر نیست ولی مشتق بردار یکه $\boldsymbol{k}$ صفر است زیرا جهت آن با زمان ثابت است. داریم:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \quad , \quad \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r \quad , \quad \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}$$

Example: The airplane on the amusement park ride moves along a path defined by the equations $r = 4$ m, $\theta = 0.2t$ rad, and $z = 0.5\cos(\theta)$ m, where t is in seconds. Determine the cylindrical components of the velocity and acceleration of the airplane when $t = 6$ s.



$r = 4m = Constant \longrightarrow \dot{r} = 0$

$\theta = 0.2t$ rad $\longrightarrow \dot{\theta} = 0.2$, $\ddot{\theta} = 0$

$Z = 0.5\cos\theta$ m $\longrightarrow \dot{z} = -0.5\dot{\theta}\sin\theta = -0.1\sin(0.2t)$

$V, a = ?$ $\quad t = 6$

$\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k} = \underbrace{0}_{V_r} + \underbrace{4(0.2)\vec{e}_\theta}_{V_\theta} - \underbrace{0.1\sin(1.2t)\vec{k}}_{V_z}$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$

$\ddot{r} = \ddot{\theta} = 0 \qquad \ddot{z} = -0.02\cos(0.2t)$

$a_r\big|_{t=6} = 0 - 4\times 0.2^2 = -0.16$

$a_\theta\big|_{t=6} = 0$

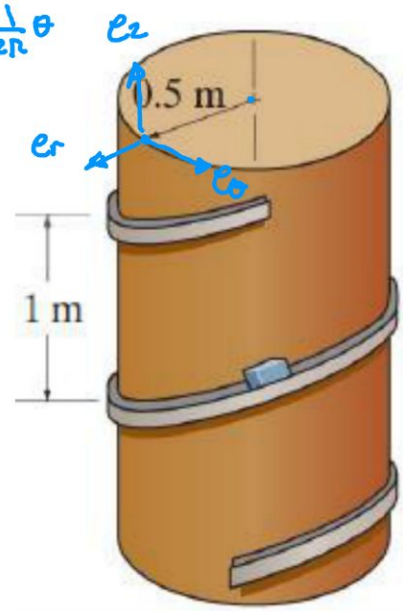
$a_z\big|_{t=6} = -0.02\cos(1.2) = -0.0072$

Example: The box slides down the helical ramp with a constant speed of v = 2 m/s. Determine the magnitude of its acceleration. The ramp descends a vertical distance of 1 m for every full revolution. The mean radius of the ramp is r = 0.5 m .

$V = 2\,m/s = \text{Constant}$ $\quad r = 0.5$

$a = ?$ $\quad z =$

$z = +\frac{1}{2\pi}\theta$



$$\begin{array}{cc} \theta & z \\ 2\pi & -1 \end{array} \longrightarrow z = -\frac{1}{2\pi}\theta$$

$$\dot{z} = -\frac{1}{2\pi}\dot{\theta} \qquad \ddot{z} = -\frac{1}{2\pi}\ddot{\theta}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{k} = 0 + 0.5\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}\vec{k}$$

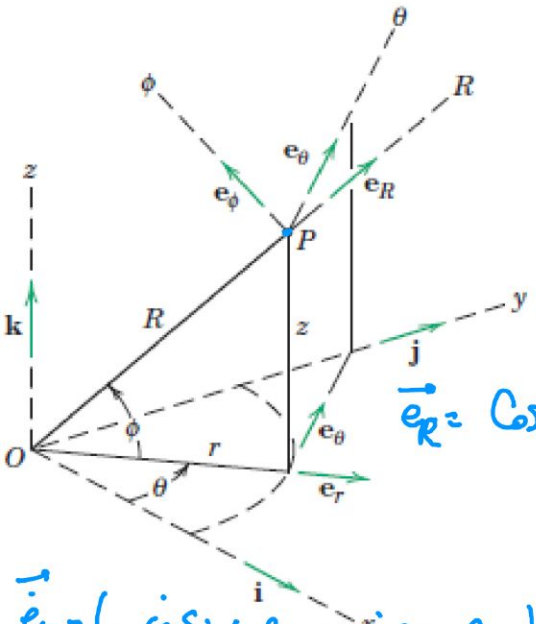
$$2 = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \left(0.5^2 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\right)} \longrightarrow \dot{\theta} = -3.81\ rad/s \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$\vec{a} = (\cancelto{0}{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (\cancelto{0}{r\ddot{\theta}} + \cancelto{0}{2\dot{r}\dot{\theta}})\vec{e_\theta} + \cancelto{0}{\ddot{z}}\vec{k}$$

$$\vec{a} = -7.26\,\vec{e_r}$$

شتاب مرکزگرا داریم و به جهت حرکت هم بستگی ندارد

Spherical Coordinates (R-θ-ϕ) دستگاه مختصات کروی



- اگر برای توصیف حرکت یک ذره در فضا از یک فاصله R و دو زاویه θ و ϕ استفاده شود حرکت ذره در دستگاه مختصات کروی بیان شده است.
- مکان ذره را می توان با سه پارامتر R (فاصله ذره تا مبدا)، زاویه θ (زاویه تصویر بردار ذره روی صفحه xy با محورx، این زاویه همان زاویه تعریف شده در مختصات قطبی و استوانه ای است) و زاویه ϕ (زاویه ی بین صفحه xy و بردار مکان ذره) مشخص می شوند.
- بردار مکان ذره در دستگاه مختصات کروی عبارت است از:

$$\vec{r} = R\,\vec{e}_R$$

- برای سرعت ذره داریم:

$$\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{R}\,\boldsymbol{e}_R + R\;\dot{\boldsymbol{e}}_R$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v} = \dot{R}\,\boldsymbol{e}_R + R\cos\phi\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + R\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi$$

یا به عبارتی داریم:

$$\mathbf{v} = v_R\mathbf{e}_R + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi \qquad \textbf{(2/18)}$$

جاییکه:

$$v_R = \dot{R}$$
$$v_\theta = R\dot{\theta}\,\cos\phi$$
$$v_\phi = R\dot{\phi}$$

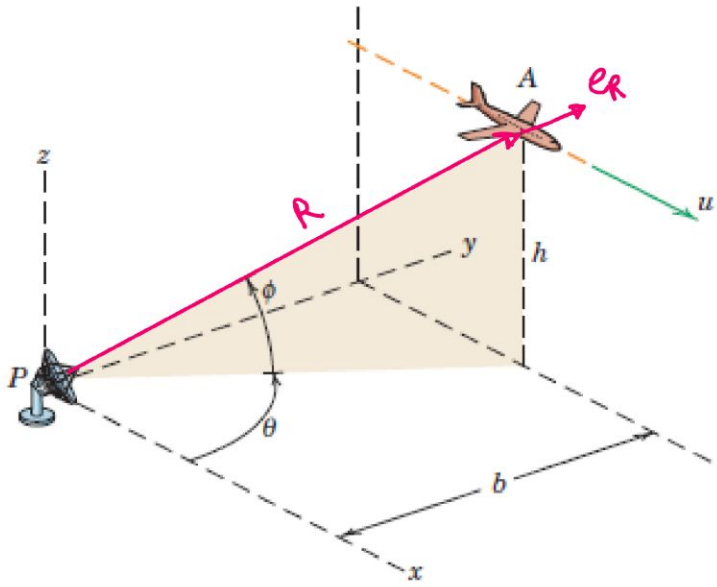
برای بردار شتاب داریم:

$$\mathbf{a} = a_R\mathbf{e}_R + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi \qquad \textbf{(2/19)}$$

جاییکه:

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi$$
$$a_\theta = \frac{\cos\phi}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta}) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$$
$$a_\phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$$

Example: The radar antenna at P tracks the jet aircraft A, which is flying horizontally at a speed u and an altitude h above the level of P. Determine the expressions for the components of the velocity in the spherical coordinates of the antenna motion.



$V = u = \text{Constant}$

$$\vec{V} = \dot{R}\,\vec{e}_R + R\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = u\,\vec{i}$$

$\cdot\,\vec{e}_R \rightarrow \quad \dot{R} = u\vec{i}\cdot\vec{e}_R$

$$\vec{e}_R = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} + \sin\varphi\,\vec{k}$$

$$\dot{R} = u\cos\theta\cos\varphi$$

$\cdot\,\vec{e}_\varphi \rightarrow \quad R\dot{\varphi} = u\vec{i}\cdot\vec{e}_\varphi$

$$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{k} - \sin\varphi(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

$$\dot{\varphi} = \frac{-u\sin\varphi\cos\theta}{R}$$

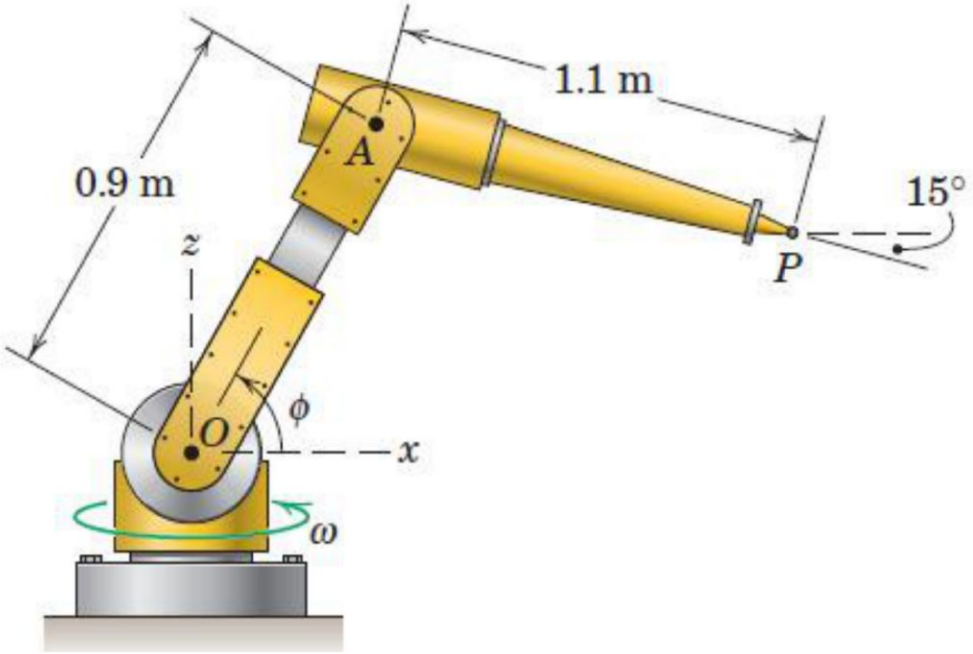
$\cdot\,\vec{e}_\theta \rightarrow \quad R\dot{\theta}\cos\varphi = u\vec{i}\cdot\vec{e}_\theta \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{-u\sin\theta}{R\cos\varphi}$

Example: The member OA of the industrial robot telescopes, At the instant represented $\phi = 60^0$, $\dot{\phi} = 1.2\frac{rad}{s}$, $\ddot{\phi} = 0.8\frac{rad}{s^2}$, $\overline{OA} = 0.9\,m$, $\dot{\overline{OA}} = 0.5\frac{m}{s}$, $\ddot{\overline{OA}} = -6\frac{m}{s^2}$. The base of the robot is revolving at the constant rate $\omega = 1.4\frac{rad}{s}$. Calculate the magnitudes of the velocity and acceleration of joint A.

$R = 0.9 \quad \dot{R} = 0.5 \quad \ddot{R} = -6$

$\varphi = 60^\circ \quad \dot{\varphi} = 1.2 \quad \ddot{\varphi} = 0.8$

$\omega = \dot{\theta} = 1.4 \rightarrow \ddot{\theta} = 0$



$\vec{v} = \dot{R}\vec{e}_R + R\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

$v = \sqrt{0.5^2 + 0.63^2 + 1.08^2} = 1.35\ m/s$

$\vec{a} = a_R\vec{e}_R + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$

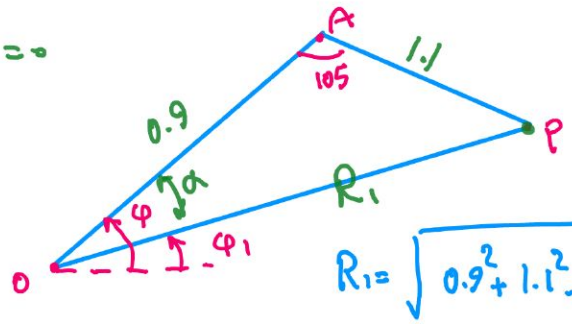
$a_R = \ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos\varphi = -7.74$

$a_\theta = -1.92 \qquad a_\varphi = 2.68$

$|a| = \sqrt{7.74^2 + 1.92^2 + 2.68^2} = 8.42\ m/s^2$

Example: Consider the industrial robot of the previous problem. The telescoping member OA is now fixed in length at 0.9 m. The other conditions remain at $\phi = 60^o, \dot{\phi} = 1.2\ rad/s, \ddot{\phi} = 0.8\frac{rad}{s^2}$, $\omega = 1.4\ rad/s$, $\dot{\omega} = 0$ and angle OAP is locked at 105°. Determine the magnitudes of the velocity and acceleration of the end point P.

$R = 0.9 \quad \dot{R} = \ddot{R} = 0$



$R_1 = \sqrt{0.9^2 + 1.1^2 - 2(0.9)(1.1)\cos(105)} = 1.59$

$R_1 = 1.59 \quad \dot{R}_1 = \ddot{R}_1 = 0$

$\frac{1.1}{\sin\alpha} = \frac{1.59}{\sin 105} \rightarrow \alpha = 41.9^\circ$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi - \alpha = 60 - 41.9 = 18.1 \\ \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} = 1.2 \ , \ \ddot{\varphi}_1 = 0.8 \end{cases}$$

$$\vec{V_P} = \dot{R}_1 \vec{e}_R + R_1 \dot{\theta} \cos\varphi_1 \vec{e}_\theta + R_1 \dot{\varphi} \vec{e}_{\varphi_1}$$

$$\vec{V_P} = 0 + (1.59)(1.4)\cos\varphi_1 \vec{e}_\theta + (1.59)(1.2)\vec{e}_{\varphi_1}$$

$$|V_P| = \sqrt{2.12^2 + 1.908^2} = 2.85\ m/s$$

حرکت نسبی Relative Motion (Translating Axes)

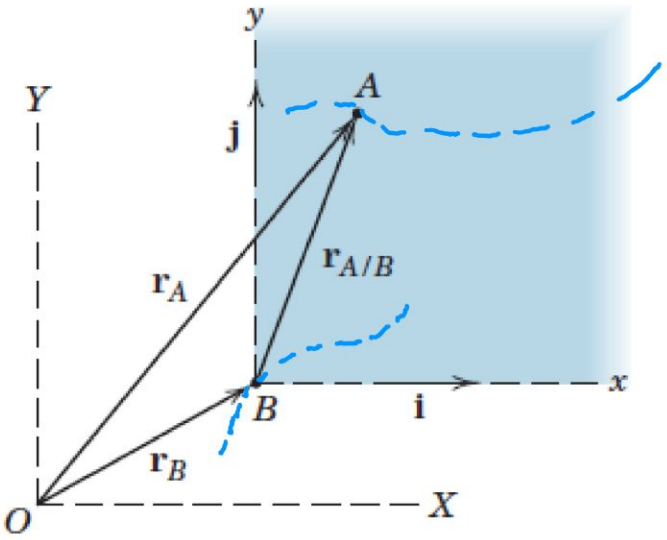
- در بخشهای قبل ما حرکت ذره را در یک دستگاه ثابت بررسی نمودیم. لذا مقادیر بدست آمده برای جابجایی، سرعت و شتاب مقادیر مطلق هستند.
- با این حال همیشه خوب یا ممکن نیست که از دستگاه ثابت برای توصیف حرکت استفاده شود. در بسیاری از مسائل مهندسی تحلیل حرکت با اندازه گیری نسبت به یک سیستم مرجع متحرک، ساده می شود. این اندازه گیری ها وقتی با حرکت مطلق دستگاه متحرک تلفیق شوند می توانند حرکت مطلق جسم را محاسبه نمایند. به این کار تحلیل ***حرکت نسبی*** می گویند.

انتخاب سیستم مختصات

- حرکت دستگاه مختصات متحرک نسبت به یک سیستم مختصات ثابت مشخص می شود.
- دستگاه مختصات ثابت بایستی یک دستگاه لخت یا اینرسی باشد یعنی دستگاهی که شتابی در فضا ندارد.
- برای مسائل مهندسی، دستگاه لخت را می توان هر دستگاهی در نظر گرفت که حرکت مطلق آن با توجه به مساله مورد نظر قابل اغماض باشد.
- برای بسیاری از مسائل مهندسی اتصال دستگاه ثابت به زمین فرض قابل قبولی است.
- برای بررسی حرکت ماهواره دور زمین یک سیستم مختصات غیردوار لحاظ می شود که مبدا آن روی محور دوران زمین است.
- برای سفر بین سیاره ای، بایستی یک دستگاه غیردوار متصل به خورشید استفاده نمود.
- بنابراین انتخاب دستگاه ثابت وابسته به نوع مساله مورد نظر است.

Vector Representation نمایش برداری

- دو ذره A و B را در نظر بگیرید که دارای حرکات منحنی الخط مستقل در یک صفحه (یا در صفحات موازی) هستند.



- ما مبدا دستگاه متحرک (غیر دوار) x-y را به ذره B می چسبانیم و حرکت ذره A را از دید ناظر B بررسی می کنیم. بردار مکان مطلق ذره A برابر است با:

$$\vec{\mathbf{r}}_A = \vec{\mathbf{r}}_B + \vec{\mathbf{r}}_{A/B}$$

حال با مشتق گیری از بردار مکان نسبت به زمان می توان سرعت و با مشتق گیری از سرعت شتاب را تعیین نمود:

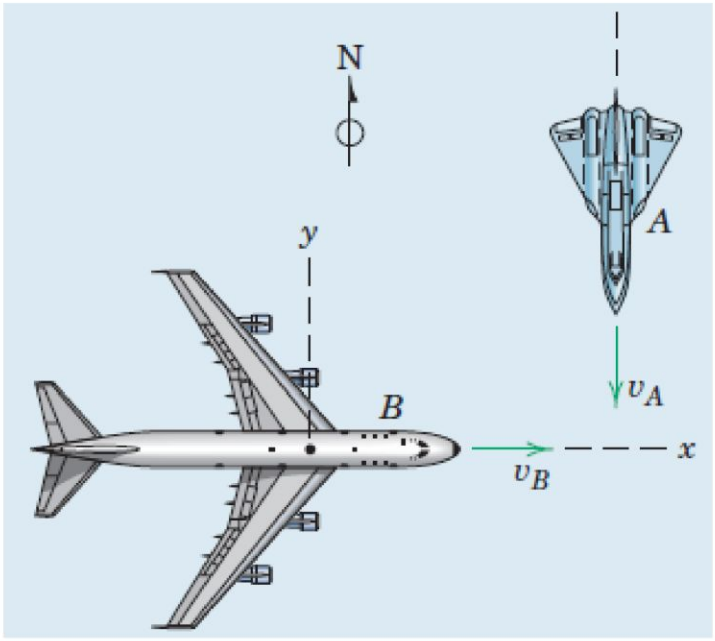
$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\mathbf{r}}_{A/B} \quad \text{or} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \qquad (2/20)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B + \ddot{\mathbf{r}}_{A/B} \quad \text{or} \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \qquad (2/21)$$

این معادلات بیان می کند سرعت مطلق ذره A برابر با سرعت مطلق ذره B به علاوه سرعت نسبی ذره A نسبت به ذره B است.

ما می توانیم حرکت نسبی را در دستگاه های مختلفی (نظیر کارتزین، مماسی-عمودی، یا قطبی بیان نماییم).

Example: The passenger aircraft B is flying east with a velocity v_B =800 km/h. A military jet traveling south with a velocity v_A=1200 km/h passes under B at a slightly lower altitude. What velocity does A appear to have to a passenger in B, and what is the direction of that apparent velocity?



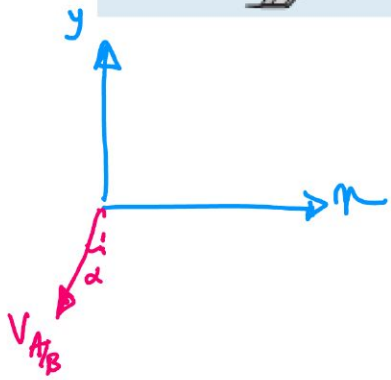
$\vec{V}_B = 800\,\hat{i}$

$\vec{V}_A = 1200\,(-\hat{j})$

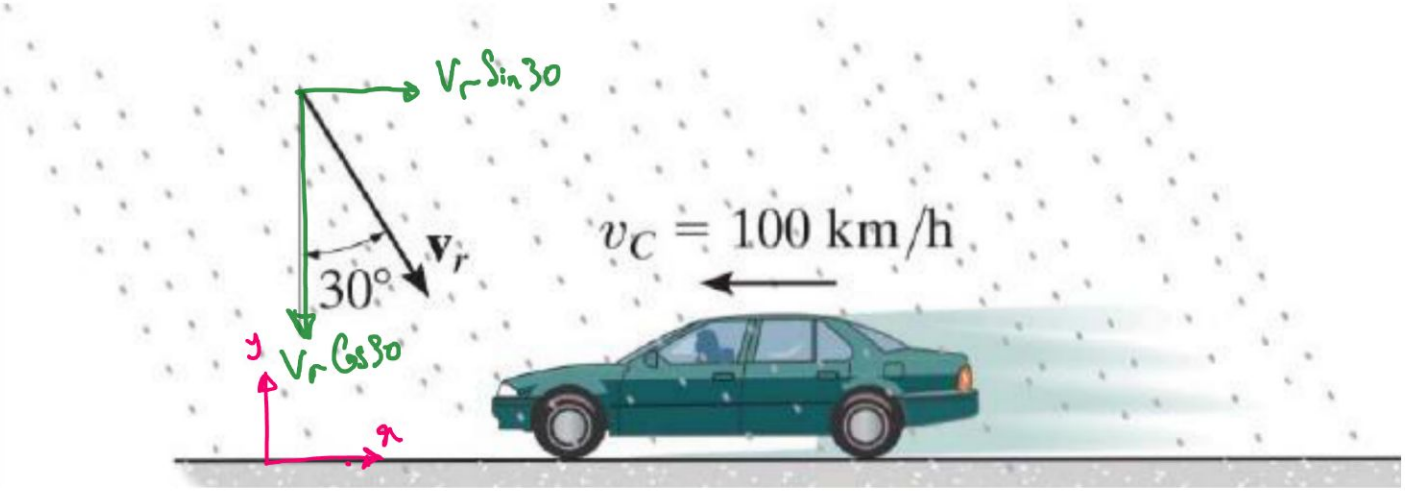
$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = -1200\,\hat{j} - 800\,\hat{i}$

$|V_{A/B}| = 1442.2$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{800}{1200} = 33.7$



Example: The car is traveling at a constant speed of 100 km/h. If the rain is falling at 6 m/s in the direction shown, determine the velocity of the rain as seen by the driver.

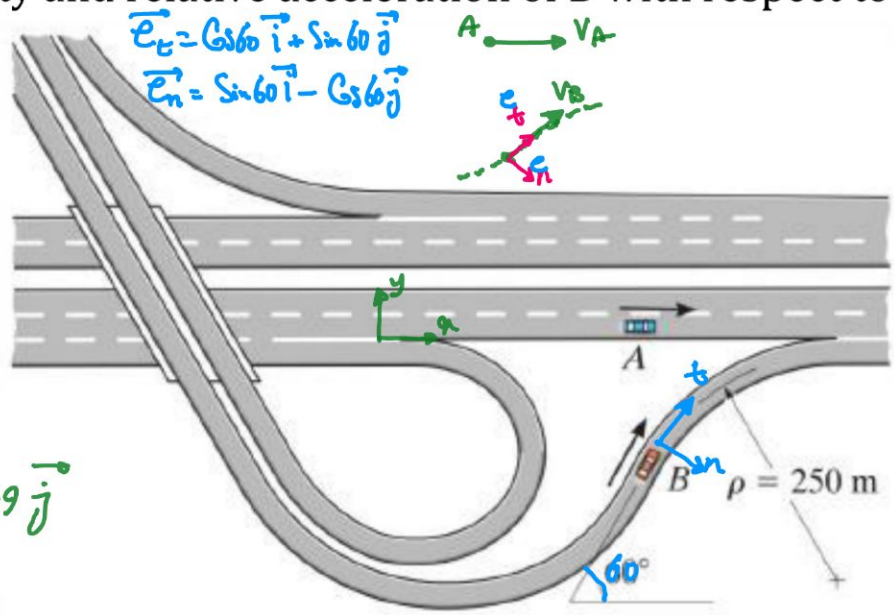


$\vec{V_c} = -\frac{100}{3.6}\vec{i} = -27.8\,\vec{i}$ $\qquad$ $\vec{V_r} = 3\vec{i} - 5.2\vec{j}$

$\vec{V_{r/c}} = \vec{V_r} - \vec{V_c} = (30.8)\,\vec{i} - 5.2\,\vec{j}$

$|V_{r/c}| = 31.24$

Example: At the instant shown car A is traveling with a velocity of 30 m/s and has an acceleration of 2 m/s2 along the highway. At the same instant B is traveling on the trumpet interchange curve with a speed of 15 m/s, which is decreasing at 0.8 m/s2. Determine the relative velocity and relative acceleration of B with respect to A at this instant.



$\vec{e}_t = \cos 60\,\vec{i} + \sin 60\,\vec{j}$

$\vec{e}_n = \sin 60\,\vec{i} - \cos 60\,\vec{j}$

$\vec{V}_A = 30\,\vec{i} \qquad \vec{a}_A = 2\,\vec{i}$

$\vec{V}_B = 15\,\vec{e}_t = 15\cos 60\,\vec{i} + 15\sin 60\,\vec{j}$

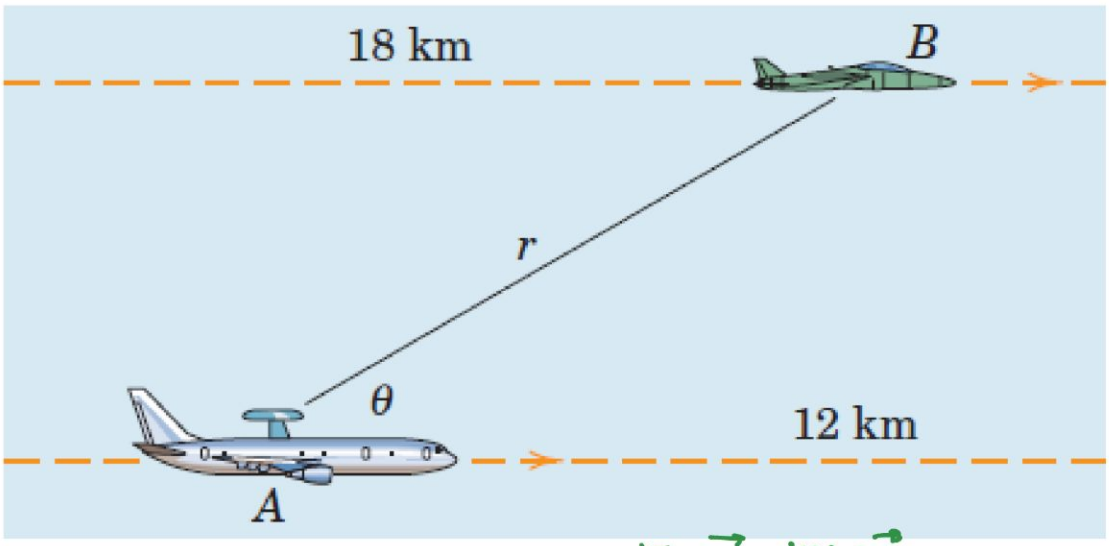
$\vec{V}_B = 7.5\,\vec{i} + 12.99\,\vec{j}$

$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = -22.5\,\vec{i} + 12.99\,\vec{j}$

$\vec{a}_B = \dot{v}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_n = -0.8\,\vec{e}_t + 0.9\,\vec{e}_n = 0.38\,\vec{i} + 0.24\,\vec{j}$

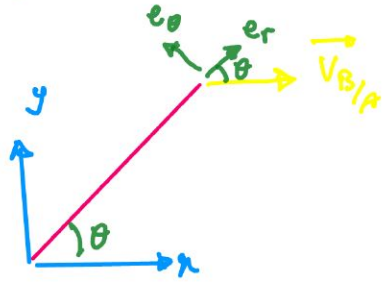
$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = -1.62\,\vec{i} - 1.14\,\vec{j}$

Example: The aircraft A with radar detection equipment is flying horizontally at an altitude of 12 km and is increasing its speed at the rate of 1.2 m/s each second. Its radar locks onto an aircraft B flying in the same direction and in the same vertical plane at an altitude of 18 km. If A has a speed of 1000 km/h at the instant when $\theta = 30^0$, determine the values of $\ddot{r}$ and $\ddot{\theta}$ at this same instant if B has a constant speed of 1500 km/h.



$\vec{V}_A = \frac{1000}{3.6}\vec{i} = 277.8\,\vec{i}$ $\quad \vec{V}_B = \frac{1500}{3.6}\vec{i} = 416.7\,\vec{i}$

$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = 138.9\,\vec{i}$



$\vec{V}_{B/A} = 138.9\,\vec{i} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = 138.9\cos\theta\,\vec{e}_r - 138.9\sin\theta\,\vec{e}_\theta$ ($\theta = 30$)

$\dot{r} = 120.3$ $\quad r\dot{\theta} = -69.5 \rightarrow \dot{\theta} = -0.005$ $\quad r = \frac{6000}{\sin 30} = 12000\,m$

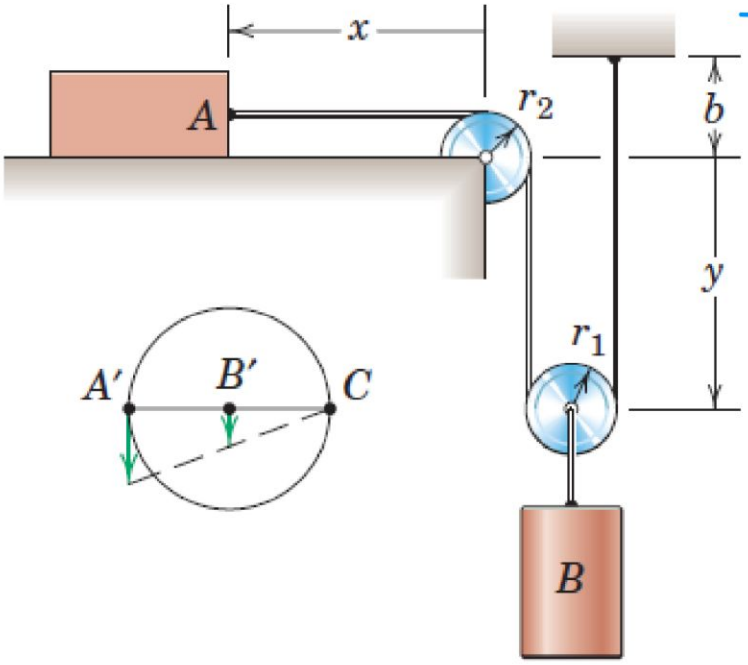
$\vec{a}_B = 0\,\vec{i}$ $\quad \vec{a}_A = 1.2\,\vec{i}$ $\quad \vec{a}_{B/A} = -1.2\,\vec{i}$

$\vec{a}_{B/A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -1.2\cos\theta \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -1.2\sin\theta \end{cases} \rightarrow \ddot{r}\ \checkmark \quad \ddot{\theta}\ \checkmark$$

حرکت مقید ذرات متصل به هم Constrained Motion of Connected Particles

- گاهی اوقات حرکت ذرات توسط تعدادی عضوهای اتصالی، به هم مرتبط هستند.



حالت یک درجه آزادی: شکل مقابل را در نظر بگیرید که در آن حرکت ذرات A و B به یکدیگر ارتباط دارد. برای طول طناب با توجه به شکل داریم:

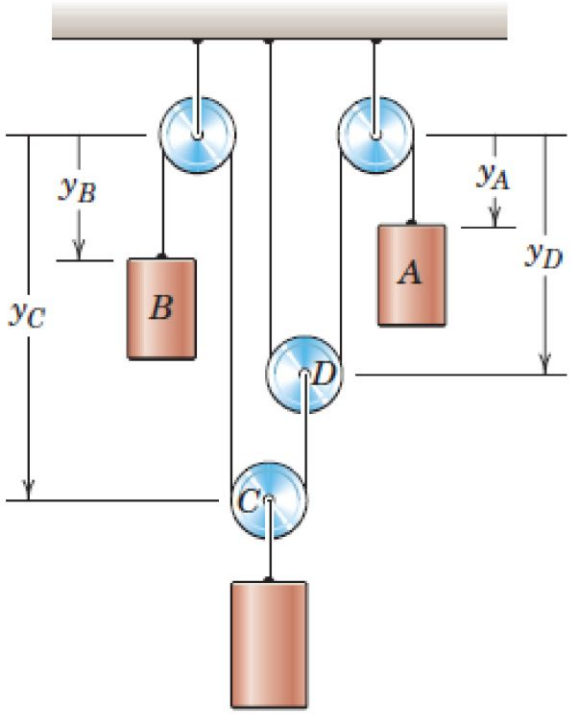
$$L = x + \frac{\pi r_2}{2} + 2y + \pi r_1 + b$$

با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$0 = \dot{x} + 2\dot{y} \quad \text{or} \quad 0 = v_A + 2v_B$$

$$0 = \ddot{x} + 2\ddot{y} \quad \text{or} \quad 0 = a_A + 2a_B$$

این رابطه می گوید که اندازه سرعت ذره A دو برابر اندازه سرعت ذره B است و اگر ذره B به پایین حرکت کند یعنی VB>0 ، ذره A حتما به سمت راست حرکت می کند یعنی VA<0.



حالت دو درجه آزادی: شکل مقابل یک سیستم دو درجه آزادی را نشان می دهد که در آن مکان قرقره C (سیلندر پایینی) به مکان سیلندرهای A و B بستگی دارد. رابطه حاکم بر طول کابل ها عبارت است از:

$$L_A = y_A + 2y_D + \text{constant}$$

$$L_B = y_B + y_C + (y_C - y_D) + \text{constant}$$

لذا خواهیم داشت:

$$0 = \dot{y}_A + 2\dot{y}_D \quad \text{and} \quad 0 = \dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D$$

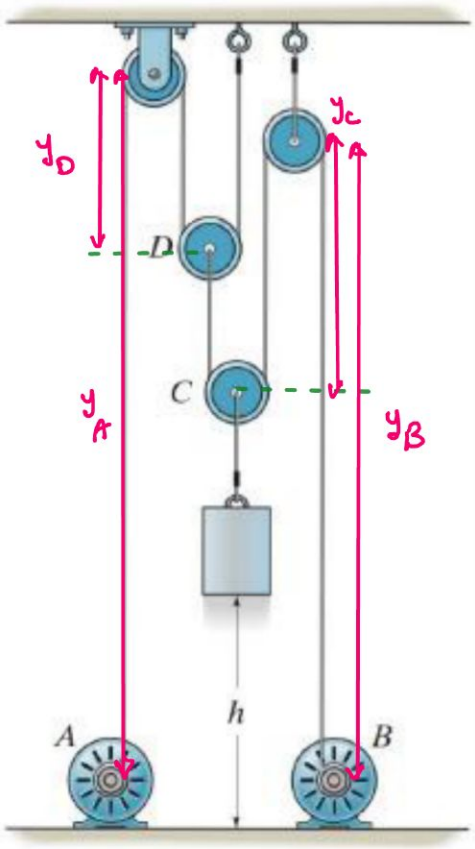
$$0 = \ddot{y}_A + 2\ddot{y}_D \quad \text{and} \quad 0 = \ddot{y}_B + 2\ddot{y}_C - \ddot{y}_D$$

با حذف سرعت و شتاب D داریم:

$$\dot{y}_A + 2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C = 0 \quad \text{or} \quad v_A + 2v_B + 4v_C = 0$$

$$\ddot{y}_A + 2\ddot{y}_B + 4\ddot{y}_C = 0 \quad \text{or} \quad a_A + 2a_B + 4a_C = 0$$

Example: If motors at A and B draw in their attached cables with constant speeds of $v_A = 0.5\frac{m}{s}$ and $v_B = 0.7\frac{m}{s}$. Determine the speed of the block.



$$L_A = y_A + 2y_D + \text{Constant}$$

$$\dot{L}_A = \dot{y}_A + 2\dot{y}_D + 0 \rightarrow -0.5 = 2\dot{y}_D$$

$$\dot{y}_D = -0.25\ m/s$$

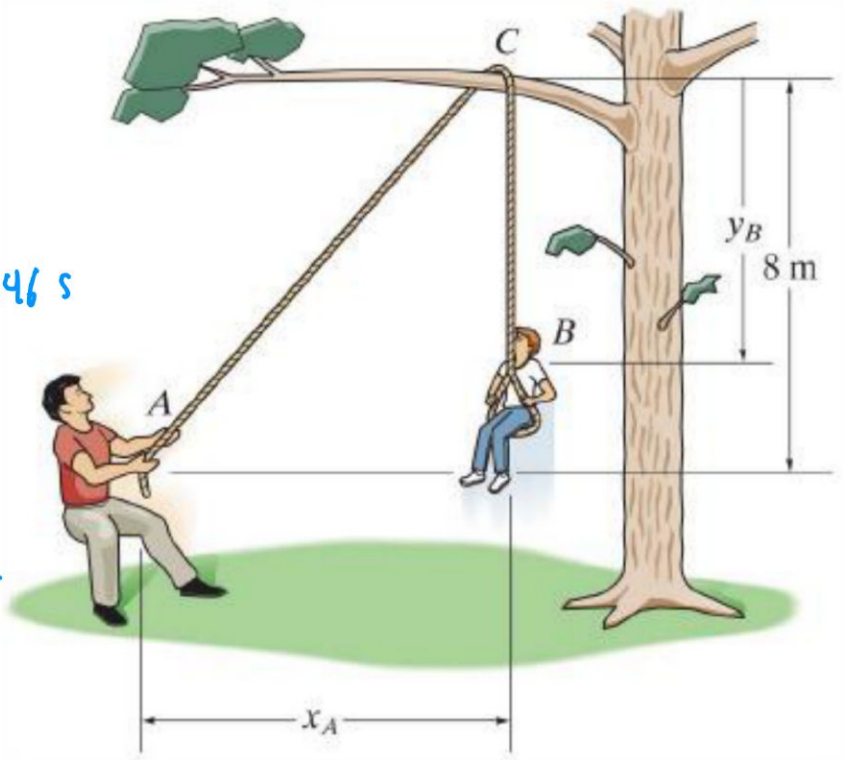
$$L_B = y_B + y_C + (y_C - y_D) + \text{Constant}$$

$$\dot{L}_B = \dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D$$

$$-0.7 = 2\dot{y}_C + 0.25 \rightarrow \dot{y}_C = 0.45$$

سرعت بلوک برابر با $0.45\ m/s$ به سمت بالا

Example: The man pulls the boy up to the tree limb C by walking backward. If he starts from rest when $x_A = 0$ and moves backward with a constant acceleration $a_A = 0.2\frac{m}{s^2}$, determine the speed of the boy at the instant $Y_B = 4\,m$. Neglect the size of the limb. When $X_A = O$, $Y_B = 8\,m$, so that A and B are coincident, i.e., the rope is 16 m long.



$x_A = 0 \qquad a_A = 0.2\ m/s^2$

$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = \frac{1}{2}(0.2)t^2$

$x_A = 0.1\,t^2 \longrightarrow t = 9.46\ s$

$l = y_B + \sqrt{64 + x_A^2}$

$16 = 4 + \sqrt{64 + x_A^2} \rightarrow x_A = 8.95\,m$

$\dot{x}_A = 0.2\,t = 1.89\,m$

$\dot{l} = \dot{y}_B + \frac{x_A \dot{x}_A}{\sqrt{64 + x_A^2}} \rightarrow 0 = \dot{y}_B + \frac{(0.1t^2)(0.2t)}{\sqrt{64 + 0.01t^4}}$

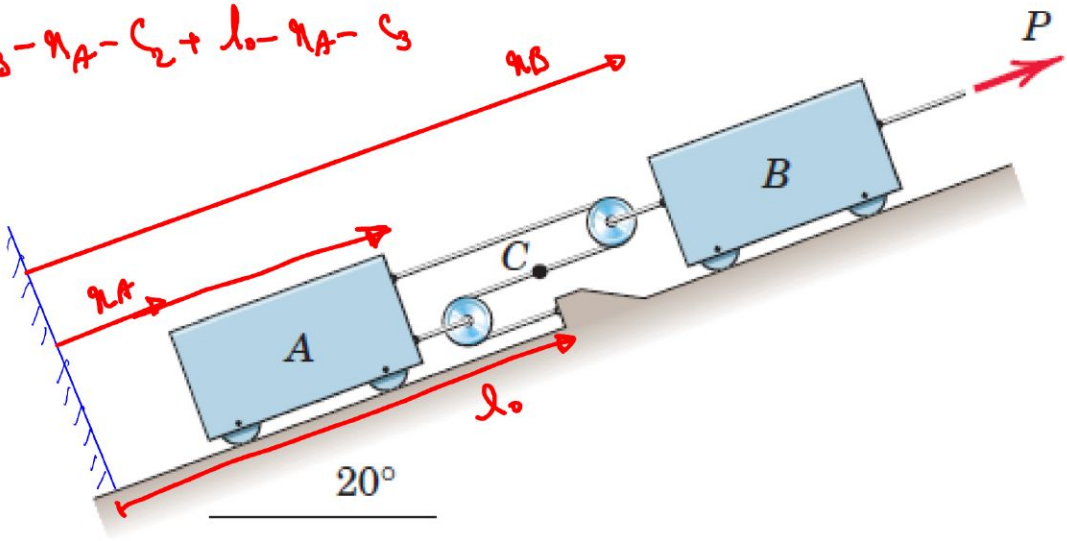
$\dot{y}_B = \frac{-0.02\,(9.4)^3}{\sqrt{64 + 0.01(9.4)^4}} = -1.39\ m/s^2$

Example: Under the action of force P, the constant acceleration of block B is $6\frac{ft}{s^2}$ up the incline. For the instant when the velocity of B is 3 ft/sec up the incline, determine the velocity of B relative to A, the acceleration of B relative to A, and the absolute velocity of point C of the cable.

$$l = x_B - x_A - C_1 + x_B - x_A - C_2 + l_0 - x_A - C_3$$

$$0 = \dot{x}_B - \dot{x}_A + \dot{x}_B - \dot{x}_A - \dot{x}_A$$

$$\begin{cases} \dot{x}_A = \frac{2}{3}\dot{x}_B \\ \ddot{x}_A = \frac{2}{3}\ddot{x}_B \end{cases}$$



$V_B = 3 \longrightarrow V_A = 2$

$a_B = 6 \longrightarrow a_A = 4$

مسائل مروری

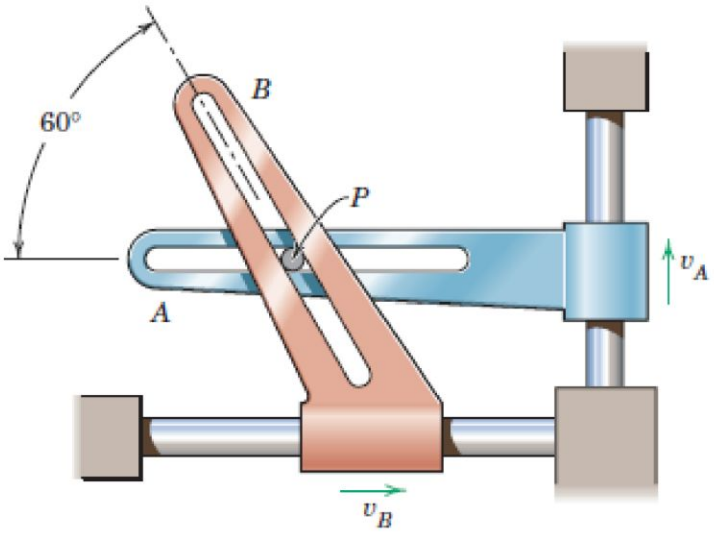
REVIEW PROBLEMS

Example: The motion of pin P is controlled by the two moving slots A and B in which the pin slides. If B has a velocity v_B = 3 m/s to the right while A has an upward velocity v_A = 2 m/s , determine the magnitude of the velocity of the pin.

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{P/A} = \vec{V}_B + \vec{V}_{P/B}$$

$$2\vec{j} + V_{P/A}\vec{i} = 3\vec{i} + V_{P/B}(-\cos 60\,\vec{i} + \sin 60\,\vec{j})$$

$$V_{P/B} = 2.3 \text{ m/s}$$

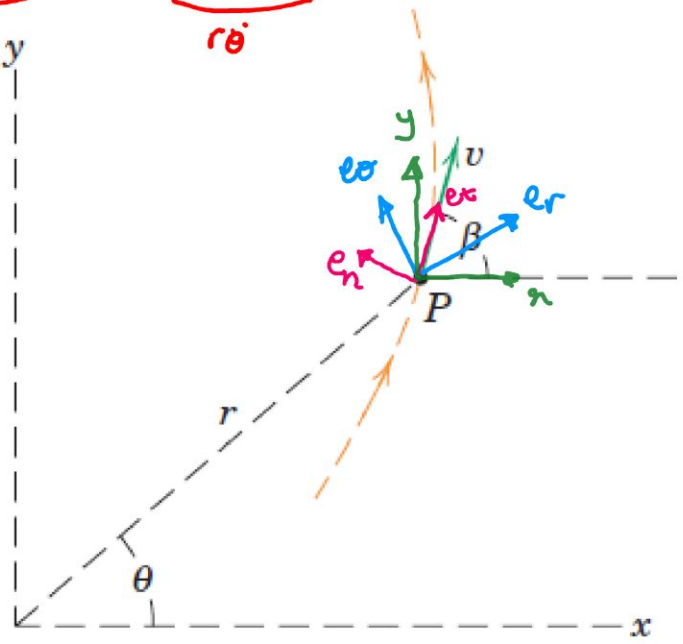


$$\vec{V}_{P/B} = \vec{V}_P - \vec{V}_B \rightarrow \vec{V}_P = \left(3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\vec{i} + 2\vec{j} = 1.85\,\vec{i} + 2\vec{j}$$

Example: Particle P moves along the curved path shown. At the instant represented, $r = 2\,m$, $\theta = 30^o$, and the velocity **v** makes an angle $\beta = 60^o$ with the horizontal x-axis and has a magnitude of 3.2 m/s. If the y- and r-components of the acceleration of P are 5 m/s2 and -1.83 m/s2, respectively, at this position, determine the corresponding radius of curvature ρ of the path and the x-component of the acceleration of the particle. Solve graphically or analytically.

$\vec{v} = 3.2\,\vec{e_t} = 3.2\cos 60\,\vec{i} + 3.2\sin 60\,\vec{j} = \underbrace{3.2\cos 30}_{\dot r}\,\vec{e_r} + \underbrace{3.2\sin 30}_{r\dot\theta}\,\vec{e_\theta}$

$\begin{cases} \dot r = 3.2\cos 30 = 2.77 \\ r\dot\theta = 3.2\sin 30 = 1.6 \rightarrow \dot\theta = 0.8\ rad/s \end{cases}$



$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = a_x\vec{i} + 5\vec{j}$

$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta} = -1.83\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta}$

$a_x\vec{i} + 5\vec{j} = -1.83\,\vec{e_r} + a_\theta\,\vec{e_\theta}$

$\cdot\vec{e_r} \rightarrow (a_x\vec{i} + 5\vec{j})\cdot\vec{e_r} = -1.83 \rightarrow a_x = -4.98\ m/s^2$

$\vec{a} = -4.98\,\vec{i} + 5\vec{j} = \dot v\,\vec{e_t} + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{e_n}$

$\cdot\vec{e_n} \rightarrow (-4.98\vec{i} + 5\vec{j})\cdot(\vec{e_n}) = \frac{v^2}{\rho} = \frac{3.2^2}{\rho} \rightarrow \rho \simeq 1.5\ m$