# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول خطی، یا شبه خطی، را می‌توان به کمک روش لاگرانژ حل نمود. اگر معادله دیفرانسیل به صورت مقابل باشد:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$$

ابتدا دستگاه معادلات روبرو را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

اگر $u(x,y,z)=c_1$ و $v(x,y,z)=c_2$ جواب‌های ثابت دستگاه معادلات فوق باشند، جواب عمومی معادله را می‌توان به فرم $F(u,v)=0$ یا $v=F(u)$ نوشت. اگر حل دستگاه $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ به راحتی امکان پذیر نباشد، می‌توانیم از دستگاه معادلات زیر استفاده کنیم.

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{\lambda dx+\mu dy+\gamma dz}{\lambda P+\mu Q+\gamma R}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{2\times3+5\times4}{2\times3+5\times6}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2\times3+4\times4+6\times8}{2\times3+4\times6\quad 6\times12}=\frac{2}{3}$$

- جواب عمومی معادله $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x$ کدام است؟

۱) $x-z=y\phi(x^2+z^2)$ ۲) $x+z=\phi(\frac{x^2-z^2}{y})$

۳) $x+z=y\phi(x^2-z^2)$ ۴) $x-z=\phi(\frac{x^2+z^2}{y})$

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x}$$

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x}\rightsquigarrow x\,dx-z\,dz=0$$

$$\underbrace{x^2-z^2}_{u}=c_1$$

$$\frac{dx+dz}{z+x}=\frac{dy}{y}\longrightarrow \ln(x+z)=\ln y+\ln c_2\rightsquigarrow c_2=\underbrace{\frac{x+z}{y}}_{v}$$

$$f(u,v)=0 \quad \text{یا} \quad v=\Phi(u) \qquad \frac{x+z}{y}=\Phi(x^2-z^2)$$

- جواب معادله دیفرانسیل $xu_{xx}-2yu_{xy}+u_x=0$ کدام است؟

۱) $u(x,y)=\int\frac{\varphi(xy)}{y}dx+\psi(y)$ ۲) $u(x,y)=\int\frac{\varphi(x^2y)}{x}dy+\psi(x)$

۳) $u(x,y)=\int\frac{\varphi(xy)}{x}dx+\psi(x)$ ۴) $u(x,y)=\int\frac{\varphi(x^2y)}{x}dx+\psi(y)$

$$u_x=w\rightsquigarrow xw_x-2yw_y+w=0\longrightarrow \overset{P}{x}w_x\overset{Q}{-2y}w_y=\overset{R}{-w}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dw}{-w}\rightsquigarrow\begin{cases}\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{2y}\rightsquigarrow \underbrace{x^2y}_{u}=c_1\\ \frac{dx}{x}=\frac{dw}{-w}\rightsquigarrow \underbrace{xw}_{v}=c_2\end{cases}$$

$$v=\varphi(u)\rightsquigarrow xw=\varphi(x^2y)$$

$$w=\frac{\varphi(x^2y)}{x}\rightsquigarrow u_x=\frac{\Phi(x^2y)}{x}\longrightarrow u=\int\frac{\Phi(x^2y)}{x}dx+\psi(y)$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

جواب عمومی معادله $(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$ کدام است؟

۱) $f(\frac{y}{z},\frac{x^2+y^2+z^2}{z})=0$

۲) $f(\frac{y}{z},\frac{x^2-y^2+z^2}{z})=0$

۳) $f(\frac{x}{z},\frac{x^2+y^2+z^2}{z})=0$

۴) $f(\frac{y}{z},\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2})=0$

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}\rightsquigarrow \boxed{\frac{y}{z}}=c_1 \to u$$

$$\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{2x(x^2-y^2-z^2)+2y(2xy)+2z(2xz)}=\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{2x(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)}\rightsquigarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{z}=c_2 \to v$$

$$f(u,v)=0$$

---

اگر $u$ متغیر وابسته (تابع) و $x$ و $y$ متغیرهای مستقل باشند، فرم کلی معادلات خطی مرتبه اول با ضر ائب ثابت به‌صورت زیر خواهد بود:

$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0$ ($a$ و $b$ و $c$ ضرایب ثابت اند) $\rightsquigarrow a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=-cu$

جواب عمومی (جواب معادله همگن) معادله فوق را می‌توان به یکی از حالت‌های زیر نوشت:

$a\neq 0 \Rightarrow u=e^{-\frac{c}{a}x}f(ay-bx)$

$b\neq 0 \Rightarrow u=e^{-\frac{c}{b}y}f(ay-bx)$

$a,b\neq 0 \Rightarrow u=e^{-\frac{c}{2}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})}f(ay-bx)$

در این روابط، $f$، هر تابع اختیاری بر حسب متغیر $ay-bx$ می‌باشد. عبارت داخل پرانتز تابع اختیاری $f$ (یعنی $ay-bx$) را می‌توان در هر عدد ثابت دلخواه ضرب کرد.

$$u^2=e^{-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y}f^2(ay-bx)\to u=e^{-\frac{c}{2}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})}f(ay-bx)$$

$u(x,y)$ جواب معادله $u_x+2u_y-u=0$ عبارتست از:

۱) $u(x,y)=e^{x}\varphi(y-2x)$

۲) $u(x,y)=e^{-x}\varphi(y-2x)$

۳) $u(x,y)=e^{x}\varphi(2y-x)$

۴) $u(x,y)=e^{-x}\varphi(2y-x)$

$$u_x+2u_y=u$$

$$\to u=e^{x}\varphi(y-2x) \checkmark$$

$$\to u=e^{\frac{1}{2}y}\varphi(y-2x)$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

جواب معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر با شرط اولیه داده شده کدام است؟

$$x\frac{\partial u}{\partial t}-2xt\frac{\partial u}{\partial x}=2tu,\ u(0,x)=\frac{\sinh x}{x}$$

۱) $\frac{\sinh(t^2+x)}{x}$ ۲) $\frac{\cosh(t^2+x)}{x}$ ۳) $\frac{\sinh(t^2+x^2)}{x^2+t^2}$ ۴) $\frac{\cosh(t^2+x)}{x+t^2}$

$$\frac{dt}{x}=\frac{dx}{-2xt}=\frac{du}{2tu}$$

$$\frac{dx}{-x}=\frac{du}{u}\rightarrow \boxed{xu}=c_1 \rightarrow S$$

$$\frac{dt}{\cancel{x}}=\frac{dx}{-2\cancel{x}t}\rightarrow -2t\,dt=dx$$

$$c_2=\boxed{x+t^2} \rightarrow m$$

$$S=\varphi(m)\rightarrow xu=\varphi(x+t^2)$$

$$u=\frac{\varphi(x+t^2)}{x}\xrightarrow{u(0,x)=\frac{\sinh x}{x}}\varphi(x)=\sinh x\rightarrow \varphi(x+t^2)=\sinh(x+t^2)$$

---

اگر $u(x,t)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر باشد، مقدار $u(1,1)$ کدام است؟

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ u(x,0)=\frac{1}{1+x^2}\end{cases}$$

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{5}$

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{-1}=\frac{du}{0}\rightarrow du=0\rightarrow c_1=\boxed{u}\rightarrow S$$

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{-1}\rightarrow \boxed{x+t}=c_2\rightarrow m$$

$$S=f(m)\rightarrow u=f(x+t)$$

$$u(x,t)=f(x+t)\xrightarrow{u(x,0)=\frac{1}{1+x^2}}f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x+t)=\frac{1}{1+(x+t)^2}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{1+(x+t)^2}$$

$$u(1,1)=\frac{1}{5}$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مربوط به دسته منحنی‌هایی را که توسط رابطه کلی $F(u,v)=0$ (و یا $u=\varphi(v)$) بیان شده‌اند و در آن $u$ و $v$ توابعی از $z,y,x$ می‌باشند، می‌توان از حل معادله دترمینانی مقابل به دست آورد:

$$\begin{vmatrix} z_x & z_y & -1 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=0$$

با حذف تابع دلخواه $\varphi$ بین متغیر وابسته $z$ و متغیر مستقل $x,y$، کدام معادله دیفرانسیل با مشتق نسبی، حاصل می‌شود؟

$\varphi(x^2-z^2 \text{ و } xy)=0$

$x^2-z^2=f(xy)$ $\quad$ $xy=g(x^2-z^2)$

۱) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2$ ۲) $xz\frac{\partial z}{\partial x}-yz\frac{\partial z}{\partial y}=x^2$ ۳) $x\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial z}{\partial y}=x^2$ ۴) $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=x^2$

$u=x^2-z^2$

$v=xy$ $\rightsquigarrow \begin{vmatrix} z_x & z_y & z_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=0 \rightsquigarrow \begin{vmatrix} z_x & z_y & -1 \\ 2x & 0 & -2z \\ y & x & 0 \end{vmatrix}=0$

$-1$

هرگاه $z$ تابعی همگن از درجه $n$ برحسب متغیرهای $x$ و $y$ باشد، آنگاه طبق رابطه اویلر، می‌توان چنین نوشت: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$

$z=f(x,y)$ $\quad$ $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)=\lambda^n z$

$z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\tan^{-1}\left(\frac{2x^3y}{x^4+y^4}\right) \longrightarrow$ همگن از درجه ۰

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$z=x^2+y^2 \longrightarrow$ همگن از درجه ۲

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z=2(x^2+y^2)$

فرض کنید $z=z(x,y)$ در معادله $\Phi(\frac{z}{x^3},\frac{y}{x})=0$ صدق نماید. $z$ در کدام معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کند؟

۱) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3z$ ۲) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

۳) $x^2\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial x}=3z$ ۴) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$

درجه ۰

$\Phi\left(\frac{z}{x^3},\frac{y}{x}\right)=0$

درجه ۰

$z$ همگن از درجه ۳ $\longrightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3z$

$\Phi\left(\frac{z}{x^2y^3},\ \ln\frac{x-y}{x+y}\right)=0 \longrightarrow$ $z$ همگن از درجه ۵ $\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=5z$

# انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} = F(u, u_x, u_y, x, y)$$

## $B^2 - 4AC < 0$ : بیضی گون

معادله دیفرانسیل کمکی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

دارای دو جواب مختلط مزدوج یکدیگر می‌باشد.

$$\varphi(x,y) = c_1$$

$$\psi(x,y) = c_2$$

$$r = \varphi(x,y), \quad s = \psi(x,y) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{r+s}{2} \\ \beta = \frac{r-s}{2i} \end{cases}$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

$$u = F(\alpha + i\beta) + G(\alpha - i\beta)$$

## $B^2 - 4AC = 0$ : سهمی گون

معادله دیفرانسیل کمکی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}$$

فقط یک دسته جواب به صورت زیر دارد:

$$\varphi(x,y) = c$$

$r = \varphi(x,y)$

$s =$ تابع دلخواه مستقل از $\varphi$

$$u_{ss} = H(r, s, u, u_r, u_s)$$

$$u = F(r) + s\,G(r)$$

## $B^2 - 4AC > 0$ : هذلولی گون

معادله دیفرانسیل کمکی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

دارای دو جواب حقیقی متمایز است.

$$\varphi(x,y) = c_1$$

$$\psi(x,y) = c_2$$

$r = \varphi(x,y)$

$s = \psi(x,y)$

$$u_{rs} = H(r, s, u, u_r, u_s)$$

$$u = F(r) + G(s)$$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = g(x,y)$$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = H(u, u_x, u_y, x, y)$$

① تعیین نوع معادله

$$\Delta = B^2 - 4AC \begin{cases} \Delta > 0 & \text{هذلولی گون} \\ \Delta = 0 & \text{سهمی گون} \\ \Delta < 0 & \text{بیضی گون} \end{cases}$$

② تغییر متغیرهای لازم جهت استاندارد (کانونیک) کردن معادله

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{\underbrace{2A}_{Au_{xx}}} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{B \mp \sqrt{\Delta}}{\underbrace{2C}_{Cu_{yy}}}$$

$$\text{if } \Delta > 0 \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} \rightsquigarrow c_1 = \Phi(x,y) \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} \rightsquigarrow c_2 = \psi(x,y) \end{cases}$$

$$u_{xx} - 4u_{yy} = 0$$

تغییر متغیرهای لازم جهت استاندارد کردن معادله کدامند؟

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \pm 2 \rightsquigarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2 \rightsquigarrow y = 2x + c_1 \\ \dfrac{dy}{dx} = -2 \rightsquigarrow y = -2x + c_2 \end{cases}$$

$$c_1 = \boxed{y - 2x} \quad , \quad c_2 = \boxed{y + 2x}$$

$$r = y - 2x \qquad s = y + 2x$$

۳) بازنویسی معادله برحسب متغیرهای جدید

متغیرهای قدیم $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$

تابع $u$

متغیرهای جدید $\begin{cases} r \\ s \end{cases}$

$$u_{xx} = (r_x)^2 u_{rr} + (s_x)^2 u_{ss} + 2 r_x s_x \overset{u_{sr}}{u_{rs}} + r_{xx} u_r + s_{xx} u_s$$

$$u_{yy} = (r_y)^2 u_{rr} + (s_y)^2 u_{ss} + 2 r_y s_y u_{rs} + r_{yy} u_r + s_{yy} u_s$$

$$u_{xy} = (r_x r_y) u_{rr} + (s_x s_y) u_{ss} + (r_x s_y + r_y s_x) u_{rs} + r_{xy} u_r + s_{xy} u_s$$

$$u_x = r_x u_r + s_x u_s$$

$$u_y = r_y u_r + s_y u_s$$

---

$$\Delta > 0 \longrightarrow \begin{cases} r \\ s \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} u_{rs} = G(r, s, u, u_r, u_s)$$

$$u_{rs} = 0 \longrightarrow u = G(r) + F(s)$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow \begin{cases} r \\ s \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} u_{ss} = G(u, u_r, u_s, r, s)$$

دلخواه یا مستقل از r

$$u_{ss} = 0 \longrightarrow u = F(r) + s\,G(r)$$

---

$$\Delta < 0 \longrightarrow \begin{cases} c_1 \\ c_2 = c_1^* \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = Re\{c_1\} \\ \beta = Im\{c_1\} \end{cases}$$

جایگذاری

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}} = G(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0 \longrightarrow u = F(\alpha + i\beta) + G(\alpha - i\beta)$$

---

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

با توجه به تغییر متغیر $v = x$ ، $z = xy$ ، معادله $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y$ را حل کنید:

۱) $u(x,y) = \phi(\cancel{y}) + \psi(x^2y^2)$

۲) $u(x,y) = \phi(\cancel{x}) + \psi(xy)$

۳) $u(x,y) = \phi(\cancel{x}) + \psi(xy)$

۴) $u(x,y) = \psi(xy) + \varphi(x)$

$$\underset{B}{x}\, u_{xy} - \underset{C}{y}\, u_{yy} - u_y = 0$$

$A = 0$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$\Delta = x^2 - 4 \times 0 \times (-y) = x^2 > 0$$

هذلولی گون

$$u_{zv} = 0 \longrightarrow u = \varphi(z) + \psi(v)$$

$$u = \varphi(xy) + \psi(x)$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

با کدامیک از تبدیلات زیر معادله $\underbrace{y^2}_{A}u_{xx} \underbrace{-2xy}_{B}u_{xy} + \underbrace{x^2}_{C}u_{yy} = \frac{y^2}{x}u_x + \frac{x^2}{y}u_y$ به فرم کانونی در می‌آید؟

۱) $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = y$

۲) $\xi = -x^2 + y^2$, $\eta = x$

۳) $\xi = x^2 + y$, $\eta = y$

۴) $\xi = -x^2 + 2y$, $\eta = x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy + \sqrt{0}}{2y^2} = -\frac{x}{y} \rightsquigarrow y\,dy + x\,dx = 0$$

$$\boxed{y^2 + x^2} = c_1 \rightarrow \xi$$

صورت کانونیک معادله $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{4t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)$ ✗

۲) $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial u} = \frac{1}{4(t-u)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial u}\right)$ ✓

۳) $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{4(t-u)}\frac{\partial \phi}{\partial u}$ ✗

۴) $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} = 0$ ✗

$$\underset{A}{1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \underbrace{-x^2}_{C} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad \Delta = B^2 - 4AC = 0 + 4x^2 > 0$$

$B = 0$

هذلولی گون

هذلولی $\longrightarrow Z_{ut} = \cdots$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial t}$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

جواب $u(x,y)$ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر کدام است؟

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$$

$A=1 \quad B=-1 \quad C=-2$

۱) $g(y-x)+h(x+\frac{1}{2}y)$

۲) $g(y+x)+h(x+\frac{1}{2}y)$

۳) $g(y+x)+h(x-\frac{1}{2}y)$

۴) $g(y-x)+h(x-\frac{1}{2}y)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}\rightsquigarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-2 \longrightarrow \boxed{y+2x}=c_1\\ \frac{dy}{dx}=1 \longrightarrow \boxed{y-x}=c_2\end{cases}$$

$$u=g(y+2x)+f(y-x)=h(x+\tfrac{1}{2}y)+f(y-x)$$

$\times\frac{1}{2}$

---

کدام گزینه جواب معادله دیفرانسیل جزئی زیر است؟

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-6\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+11\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-6\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0$$

$\lambda^3 \quad \lambda^2 \quad \lambda \quad 1$

۱) $u=f(x+y)+k(x^2+xy-6y^2)$ ✗

۲) $u=f(x-y)+g(2x-y)+h(3x-y)$ ✗

۳) $u=f(x+y)+g(2x+y)+h(3x+y)$

۴) $u=f(x-y)+k(x^2-xy+6y^2)$ ✗

$$u=f(y+\lambda x)\rightsquigarrow\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0\rightarrow\lambda=1,\ \lambda=2,\ \lambda=3$$

$\lambda=1\rightsquigarrow f(y+x)$

$\lambda=2\rightsquigarrow f(y+2x)$

$\lambda=3\longrightarrow f(y+3x)$

---

جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مقابل کدام است؟

$$u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}+6u_x+12u_y+9=0$$

$D_x^2 \quad D_xD_y \quad D_y^2 \quad D_x \quad D_y$

۱) $u=e^{-3x}F(2x-y)+e^{-2x}G(y+x)$

۲) $u=e^{-2x}[xF(y+x)+G(y+x)]$

۳) $u=e^{3x}F(2x-y)+e^{2x}G(y+x)$

۴) $u=e^{-3x}[xF(2x-y)+G(2x-y)]$

$$[D_x^2+4D_xD_y+4D_y^2+6D_x+12D_y+9]u=0$$

$$[D_x+2D_y+3][D_x+2D_y+3]u=0\rightarrow\begin{cases}u_x+2u_y+3u=0\\ u_x+2u_y+3u=0\end{cases}$$

$$e^{-3x}f(y-2x)+xe^{-3x}g(y-2x)=e^{-3x}[xg(y-2x)+f(y-2x)]$$

$$=e^{-3x}[xF(2x-y)+G(2x-y)]$$

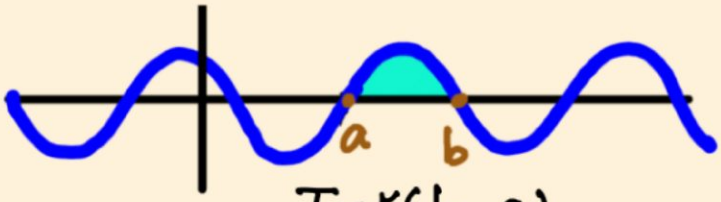
# ویژگی توابع مثلثاتی

$$F=\begin{cases}\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{cases} \rightsquigarrow F''=-\lambda^2 F \longrightarrow F''+\lambda^2 F=0$$

$$F''+\lambda^2 F=0 \rightsquigarrow F=k_1\sin\lambda x+k_2\cos\lambda x$$

$$=k_3\sin\lambda(x+\theta)=k_4\cos\lambda(x+\theta)$$

$$\begin{cases}F''+\lambda^2 F=0\\ F(a)=0,\ F(b)=0\end{cases}$$




$T=2(b-a)$

$$\lambda_n=\frac{2\pi n}{T}=\frac{n\pi}{b-a}$$

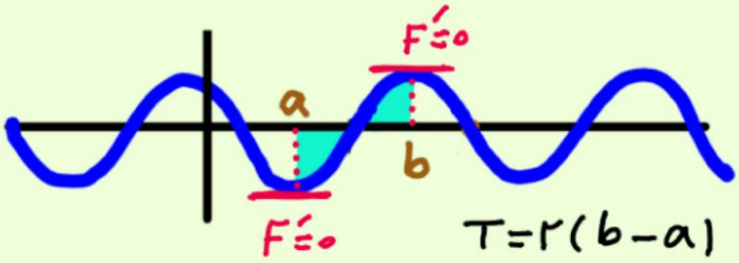
$$\sin\lambda_n(x-a) \text{ یا } \sin\lambda_n(b-x)$$

$$F=\sin\frac{n\pi}{b-a}(b-x)$$

$$\begin{cases}F''+\lambda^2 F=0\\ F(0)=F(L)=0\end{cases}$$

$$F=\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad n=1,2,\dots$$

$$\begin{cases}F''+\lambda^2 F=0\\ F'(a)=0,\ F'(b)=0\end{cases}$$




$T=2(b-a)$

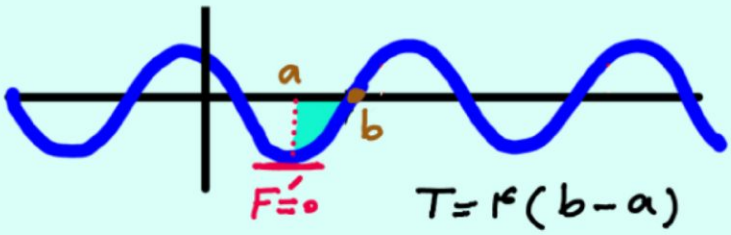
$$\lambda_n=\frac{2\pi n}{T}=\frac{n\pi}{b-a} \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$F=\cos\lambda_n(b-x)=\cos\frac{n\pi}{b-a}(b-x)$$

$$\begin{cases}F''+\lambda^2 F=0\\ F'(0)=F'(L)=0\end{cases} \rightsquigarrow F=\cos\frac{n\pi x}{L} \qquad n=0,1,2,\dots$$

# ویژگی توابع مثلثاتی

$$\begin{cases} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F'(a) = 0 \,,\; F(b) = 0 \end{cases}$$




$T = 4(b-a)$

$$\lambda_{2n-1} = \frac{(2n-1)2\pi}{T} = \frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}$$

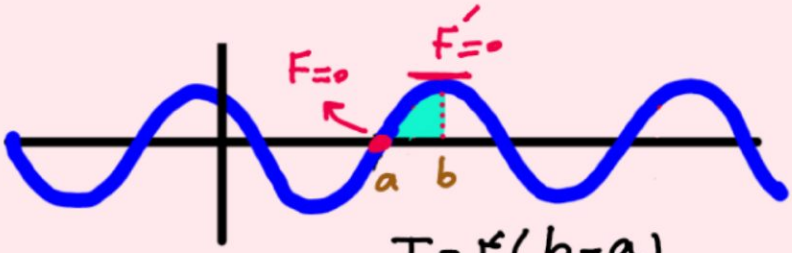
$$F = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}(x-a)$$

$$F' = \text{''}\ \sin \frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}(x-a)$$

$$\begin{cases} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F'(0) = 0 \,,\; F(L) = 0 \end{cases}$$

$$\cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

$$\begin{cases} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(a) = 0 \,,\; F'(b) = 0 \end{cases}$$




$T = 4(b-a)$

$$\lambda_{2n-1} = \frac{(2n-1)2\pi}{T} = \frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}$$

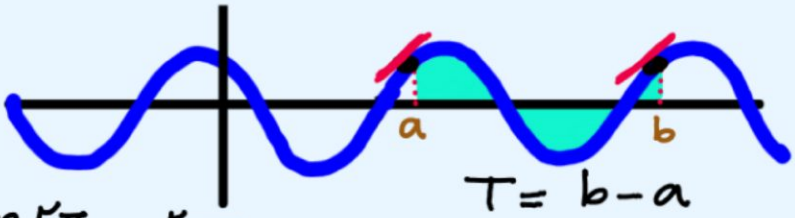
$$F = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}(x-a)$$

$$F' = \text{''}\ \cos \frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}(x-a)$$

$$\begin{cases} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(0) = 0 \,,\; F'(L) = 0 \end{cases}$$

$$\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{cases} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(a) = F(b) \\ F'(a) = F'(b) \end{cases}$$



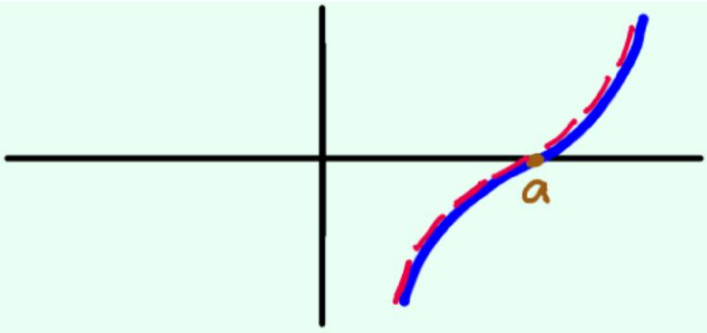

$T = b-a$

$$\lambda_n = \frac{n2\pi}{T} = \frac{2\pi n}{b-a}$$

$$F = k_0\left(\tfrac{1}{2}\right) \,,\; k_1 \cos \frac{2\pi n x}{b-a} \,,\; k_2 \sin \frac{2\pi n x}{b-a}$$

# ویژگی توابع نمایی و هیپربولیک

$$\begin{cases} G'' - \lambda^2 G = 0 \\ G(a) = 0 \end{cases}$$

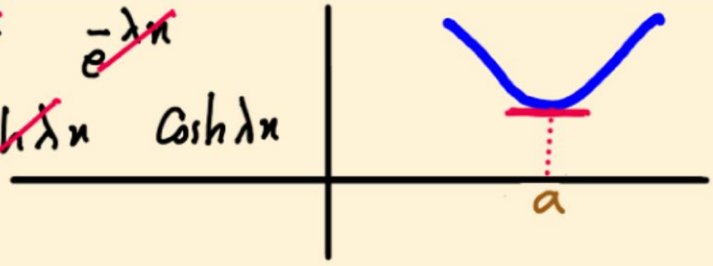



$$G = \sinh \lambda (x-a)$$

$$\begin{cases} G'' - \lambda^2 G = 0 \\ G'(a) = 0 \end{cases}$$

$\cancel{e^{\lambda x}}$ $\cancel{e^{-\lambda x}}$

$\cancel{\sinh \lambda x}$ $\cosh \lambda x$

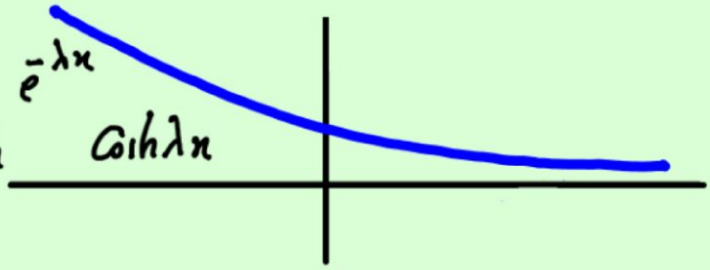



$$G = \cosh \lambda (x-a)$$

$$\begin{cases} G'' - \lambda^2 G = 0 \\ \lim\limits_{x \to \infty} G = 0 \end{cases}$$

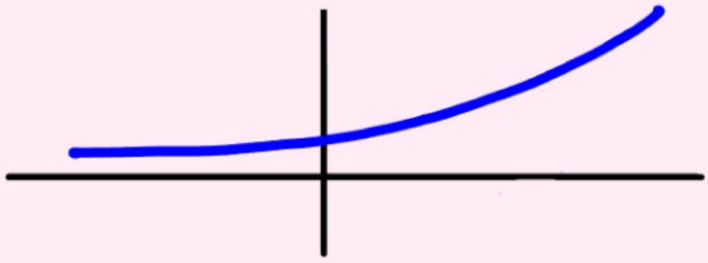
$\cancel{e^{\lambda x}}$ $e^{-\lambda x}$

$\cancel{\sinh \lambda x}$ $\cosh \lambda x$



$$G = e^{-\lambda x}$$

$$\begin{cases} G'' - \lambda^2 G = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} G = 0 \end{cases}$$



$$G = e^{\lambda x}$$

## معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

$$aF'' + bF' + cF = 0$$

$F'' \longrightarrow r^2$

$F' \longrightarrow r$

$F \longrightarrow 1$

$$ar^2 + br + c = 0$$ معادله مشخصه

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \longrightarrow F = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow F = k_1 e^{r_1 x} + k_2 x e^{r_2 x}$$

$$\Delta < 0 \longrightarrow r = \alpha \pm i\beta \longrightarrow F = e^{\alpha x}\left[k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)\right]$$

## معادله کوشی - اویلر

$$ax^2 F'' + bxF' + cF = 0$$

$F \longrightarrow 1$

$xF' \longrightarrow \lambda$

$x^2 F'' \longrightarrow \lambda(\lambda - 1)$

$$a\lambda(\lambda-1) + b\lambda + c = 0$$ معادله مشخصه

$$a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c = 0 \longrightarrow \Delta = B^2 - 4AC = (b-a)^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \longrightarrow F = k_1 x^{\lambda_1} + k_2 x^{\lambda_2}$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \longrightarrow F = k_1 x^{\lambda_1} + k_2 x^{\lambda_1} \ln x$$

$$\Delta < 0 \longrightarrow \lambda = \alpha \pm i\beta \longrightarrow F = x^{\alpha}\left[k_1 \cos(\beta \ln x) + k_2 \sin(\beta \ln x)\right]$$

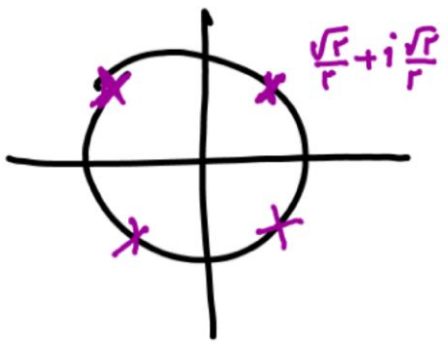
$$F' + \alpha F = 0 \longrightarrow F = k e^{-\alpha x}$$

---

$$F^{(4)} - \beta^4 F = 0 \longrightarrow \begin{cases} k_1 \sin \beta x \\ k_2 \cos \beta x \\ k_3 \sinh \beta x \\ k_4 \cosh \beta x \end{cases}$$

---

$$F^{(4)} + \beta^4 F = 0 \longrightarrow \begin{cases} k_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x\right) \\ k_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x\right) \\ k_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x\right) \\ k_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\beta x\right) \end{cases}$$



# روش تفکیک متغیرها

برای حل معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ از روش جداسازی (تفکیک) متغیرها، توابع $F$ و $G$ در جواب $u(x,t) = F(x)G(t)$ به چه شکل خواهند بود؟

$u_{tt} = FG''$

$u_{xxxx} = F^{(4)}G$

۱) $G(t) = a\cos\beta^2 t + b\sin c\beta^2 t \quad , \quad F(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$

۲) $G(t) = ae^{c\beta^2 t} + be^{c\beta^2 t} \quad , \quad F(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$

۳) $G(t) = a\cos c\beta^2 t + b\sin c\beta^2 t \quad , \quad F(x) = A\cos\beta x + D\sinh\beta x$

۴) $G(t) = a\cos c\beta^2 t + b\sin c\beta^2 t \quad , \quad F(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x$

$$FG'' = -c^2 F^{(4)} G \longrightarrow \underbrace{\frac{F^{(4)}}{F}}_{\text{تابعی از } x} = \underbrace{-\frac{1}{c^2}\frac{G''}{G}}_{\text{تابعی از } t} = \begin{cases} 0 \ \times \\ \beta^4 \\ -\beta^4 \ \times \end{cases}$$

$$F^{(4)} - \beta^4 F = 0 \longrightarrow F = A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x$$

$$G'' + c^2\beta^4 G = 0 \longrightarrow G = a\cos c\beta^2 t + b\sin c\beta^2 t$$

---

با استفاده از روش جداسازی متغیرها $u(x,t) = T(t)X(x)$ در مسئله داده شده، برای $T(t)$ چه جوابی به دست می‌آید؟

۱) $\sin(k\pi t)$

۲) $\sin[t\sqrt{(k\pi)^2 - 1}]$

۳) $\sin[t(k^2\pi^2 - 1)]$

۴) $\sinh[t\sqrt{(k\pi)^2 - 1}]$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = u & t > 0, 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

شرایط مرزی

$$X(x) = \sin\frac{k\pi x}{1} \longrightarrow \lambda = k\pi$$

$$u = T\sin k\pi x \xrightarrow{\text{جایگذاری}} T''\cancel{\sin(k\pi x)} + k^2\pi^2 T\cancel{\sin(k\pi x)} = T\cancel{\sin(k\pi x)}$$

$$T'' + [(k\pi)^2 - 1]T = 0$$

$$T(t) = \sin\left[\sqrt{(k\pi)^2 - 1}\, t\right]$$

# روش تفکیک متغیرها

معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx}+u_{yy}+u_y-u=0$ در داخل مستطیل $a<x<b$ و $0<y<1$ به همراه شرایط مرزی $u(a,y)=u(b,y)=0$ و $u(x,0)=0$ داده شده است. اگر برای این مسئله $u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, u_k(x,y)$ باشد، که در آن $c_k$ ها ضرایب ثابت هستند، آنگاه تابع $u_k(x,y)$ کدام است؟

$X''Y+XY''+XY'-XY=0$

۱) $(e^{r_1 y}-e^{r_2 y})\sin\alpha_k(b-x),\ \alpha_k=\dfrac{k\pi}{b+a},\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(1+\alpha_k^2)}}{2}$

۲) $(e^{r_1 y}-e^{r_2 y})\sin\alpha_k(b-x),\ \alpha_k=\dfrac{k\pi}{b-a},\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{2+\alpha_k^2}}{2}$

۳) $(e^{r_1 y}-e^{r_2 y})\sin\alpha_k(b+x),\ \alpha_k=\dfrac{k\pi}{b-a},\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(1+\alpha_k^2)}}{2}$

۴) $(e^{r_1 y}-e^{r_2 y})\sin\alpha_k(b-x),\ \alpha_k=\dfrac{k\pi}{b-a},\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(1+\alpha_k^2)}}{2}$

$$u(a,y)=u(b,y)=0 \longrightarrow X(x)=\sin\underbrace{\frac{2k\pi}{2(b-a)}}_{\alpha_k}(b-x)$$

$$u=XY \longrightarrow X''Y+Y''X+XY'-XY=0$$

$$-\alpha_k^2 \cancel{X}Y+Y''\cancel{X}+\cancel{X}Y'-\cancel{X}Y=0$$

$$Y''+Y'-(1+\alpha_k)^2Y=0$$

$$r^2+r-(1+\alpha_k)^2=0 \longrightarrow r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(1+\alpha_k)^2}}{2}$$

$$Y=k_1e^{r_1y}+k_2e^{r_2y} \xrightarrow{Y|_{y=0}=0} k_1+k_2=0$$

$$k_2=-k_1$$

$$Y=k_1\left[e^{r_1y}-e^{r_2y}\right]$$

# روش تفکیک متغیرها

به ازای کدام ثابت‌های $\gamma$ ، معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+\gamma w=0$ دارای جواب کراندار غیر صفر به‌صورت $w(x,y)=F(x)G(y)$ ، در تمام ربع اول صفحهٔ xy می‌باشد؟

$\lim_{x\to+\infty} < \infty$

$\lim_{y\to+\infty} < \infty$

$x>0$

$y>0$

۱) $\gamma<0$

۲) $\gamma>0$

۳) $\forall\gamma\in\mathbb{R}$

۴) مسئله جواب ندارد

$$F'G'+\gamma FG=0$$

$$\frac{F'}{F}=\alpha_1 \to F=e^{\alpha_1 x}$$

$$\frac{G'}{G}=\alpha_2 \to F=e^{\alpha_2 y}$$

$$\alpha_1<0$$

$$\alpha_2<0$$

$$\frac{F'G'}{FG}=-\gamma \longrightarrow \underbrace{\left(\frac{F'}{F}\right)}_{\text{تابعی از } x}\underbrace{\left(\frac{G'}{G}\right)}_{\text{تابعی از } y}=-\gamma$$

$$-\gamma>0 \longrightarrow \gamma<0$$

---

در معادله رویه مینیمال $\left(1+u_x^2\right)u_{yy}-uu_xu_yu_{xy}+\left(1+u_y^2\right)u_{xx}=0$ ، جواب‌هایی به‌صورت $u(x,y)=F(x)+G(y)$ ، کدام هستند؟

$u_{xy}=0$

$u=F(x)+G(y)$

$$\boxed{u_{xy}=0}$$

۱) $u(x,y)=\frac{-1}{c}\operatorname{Ln}\cos(cx+c_1)+c_2+\frac{1}{c}\operatorname{Ln}\cos(-cy+d_1)+d_2$

۲) $u(x,y)=\frac{1}{c}\operatorname{Ln}\cos(cx+c_1)+c_2+\frac{1}{c}\operatorname{Ln}\cos(-cy+d_1)+d_2$

۳) $u(x,y)=\frac{-1}{c}\operatorname{Ln}\cos(cx+c_1)+c_2+\frac{1}{c}\operatorname{Ln}\cos(cy+d_1)+d_2$

۴) $u(x,y)=\frac{1}{c}\operatorname{Ln}\cos(cx+c_1)+c_2+\frac{1}{c}\operatorname{Ln}\cos(cy+d_1)+d_2$

$$(1+F'^2)G''+(1+G'^2)F''=0$$

$$\underbrace{\frac{F''}{1+F'^2}}_{\text{تابعی از } x}=-\underbrace{\frac{G''}{1+G'^2}}_{\text{تابعی از } y}=c \quad \text{ثابت}$$

$$\frac{F''}{1+F'^2}=c \xrightarrow{\int_x} \operatorname{Arctan}(F')=cx+c_1$$

$$F'=\tan(cx+c_1)$$

$$F=-\frac{1}{c}\operatorname{Ln}\left[\cos(cx+c_1)\right]$$

$$G=\frac{1}{c}\operatorname{Ln}\left[\cos(-cx+c_2)\right]$$

$$u_{xx} = 0 \longrightarrow u = k_1 x + k_2$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \longrightarrow$$

$$F(z) = k_1 z + k_2 + i k_3 \longrightarrow \begin{cases} k_1 x + k_2 & \checkmark \\ k_1 y + k_3 & \checkmark \end{cases}$$

$$F(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy \longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & \checkmark \\ xy & \checkmark \end{cases}$$

$$F(z) = e^{\lambda z} = e^{\lambda(x+iy)} = \underbrace{e^{\lambda x}\cos\lambda y}_{\underbrace{e^{\lambda y}\sin\lambda x}} + i\,\underbrace{e^{\lambda x}\sin\lambda y}_{\underbrace{e^{-\lambda x}\cos\lambda y}}$$

$$F(z) = \sin\lambda z = \sin\lambda(x+iy) = \underbrace{\sin\lambda x\cosh\lambda y}_{\underbrace{\cosh\lambda y\,\sin\lambda x}} + i\cos\lambda x\sinh\lambda y$$

$$\cancel{\sin\lambda x\,\sin\lambda y} \qquad \cancel{\cosh\lambda x\,\cosh\lambda y}$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ \text{دو شرط مرزی برحسب } x \\ \text{دو شرط مرزی برحسب } y \end{cases}$$

① شرایط مرزی غیرصفر

② ابعاد ناحیه در راستای متغیر مشتق
- محدود ← سری فوریه
- نامحدود ← انتگرال فوریه

③ ابعاد ناحیه در راستای متغیر غیرمشتق
- محدود ← چندجمله‌ای
- نامحدود ← نمایی میرا

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0<x<a \ , \ y>0 \\ u(0,y)=0 \ , \ u(a,y)=0 \xrightarrow[\text{پایه مشتق}]{} \sin\frac{n\pi x}{a} \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

متناوب دوره

① جواب برحسب $x$ مشتق

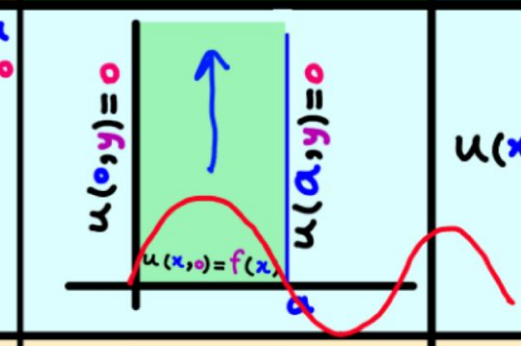
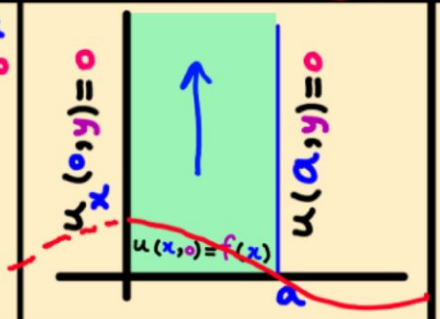
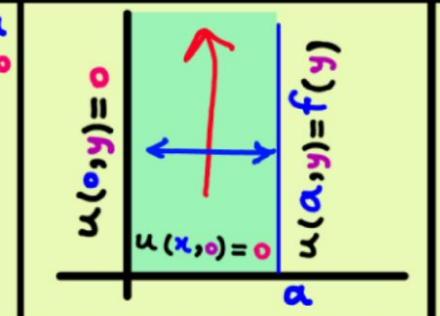
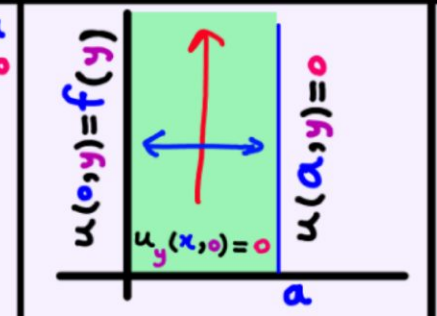
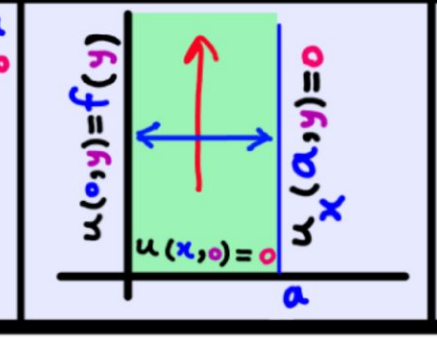
② $0<x<a$ ← $\sum$ سری فوریه

③ $y>0$ $\xleftarrow{\text{نامحدود}}$ جواب برحسب $y$ نمایی میرا است.

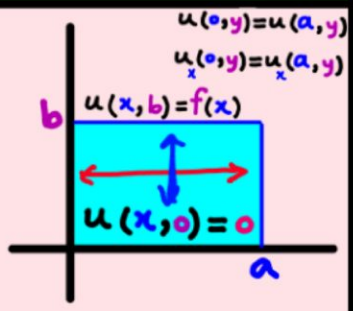
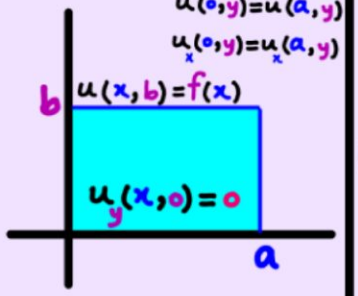
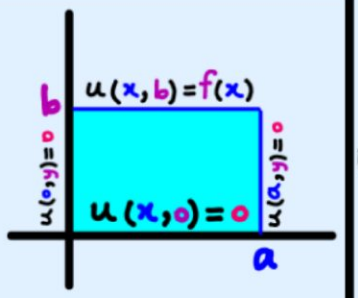
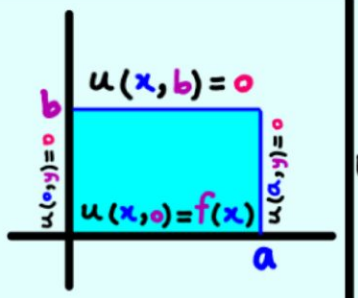
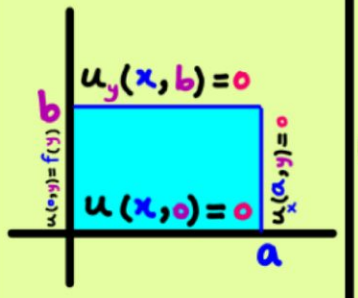
$$e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

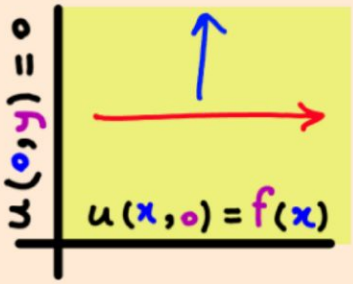
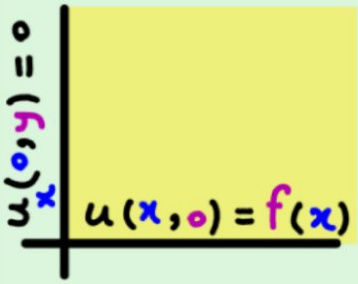
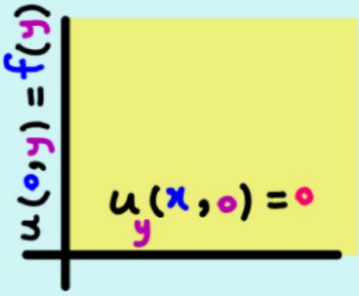
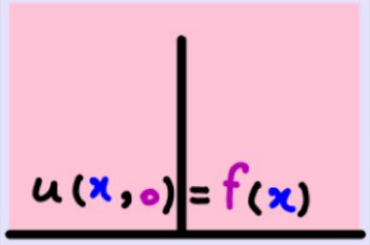
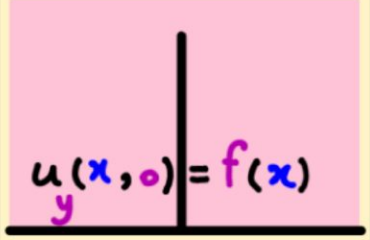
# حل معادله لاپلاس در دستگاه دکارتی

| معادله لاپلاس | شکل ناحیه | پاسخ معادله لاپلاس |
|---|---|---|
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<\infty \\ u(0,y)=0 \\ u(a,y)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<\infty \\ u_x(0,y)=0 \\ u(a,y)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2a}} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right)$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<\infty \\ u(0,y)=0 \\ u(a,y)=f(y) \\ u(x,0)=0 \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\int_0^{\infty} B(w)\sinh wx \sin wy\, dw$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<\infty \\ u(0,y)=f(y) \\ u(a,y)=0 \\ u_y(x,0)=0 \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\int_0^{\infty} A(w)\sinh w(x-a)\cos wy\, dw$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<\infty \\ u(0,y)=f(y) \\ u_x(a,y)=0 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\int_0^{\infty} B(w)\cosh w(x-a)\sin wy\, dw$ |

# حل معادله لاپلاس در دستگاه دکارتی

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(0,y)=u(a,y) \\ u_x(0,y)=u_x(a,y) \\ u(x,0)=0 \\ u(x,b)=f(x) \end{cases}$ |  | $u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n\cos\frac{2\pi nx}{a}+B_n\sin\frac{2\pi nx}{a}\right\}\sinh\frac{2\pi ny}{a}$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(0,y)=u(a,y) \\ u_x(0,y)=u_x(a,y) \\ u_y(x,0)=0 \\ u(x,b)=f(x) \end{cases}$ |  | $u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n\cos\frac{2\pi nx}{a}+B_n\sin\frac{2\pi nx}{a}\right\}\cosh\frac{2\pi ny}{a}$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(0,y)=0 \\ u(a,y)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u(x,b)=f(x) \end{cases}$ |  | $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(0,y)=0 \\ u(a,y)=0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u(x,b)=0 \end{cases}$ |  | $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(y-b)}{a}$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(0,y)=f(y) \\ u_x(a,y)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_y(x,b)=0 \end{cases}$ |  | $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\cosh\frac{(2n-1)\pi x}{2b}$ |

# حل معادله لاپلاس در دستگاه دکارتی

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<\infty,\ 0<y<\infty \\ u(0,y)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\int_0^\infty B(\omega)\, e^{-\omega y} \sin \omega x \, d\omega$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<\infty,\ 0<y<\infty \\ u_x(0,y)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\int_0^\infty A(\omega)\, e^{-\omega y} \cos \omega x \, d\omega$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<\infty,\ 0<y<\infty \\ u(0,y)=f(y) \\ u_y(x,0)=0 \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\int_0^\infty A(\omega)\, e^{-\omega x} \cos \omega y \, d\omega$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & -\infty<x<\infty,\ 0<y<\infty \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{(x-\lambda)^2+y^2}\, d\lambda$ |
| $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & -\infty<x<\infty,\ 0<y<\infty \\ u_y(x,0)=f(x) \end{cases}$ |   | $u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \mathrm{Ln}\frac{(x-\lambda)^2+y^2}{(x-\lambda)^2+a^2}\, d\lambda$ |

# حل معادله لاپلاس در دستگاه استوانه ای

## سری فوریه مثلثاتی

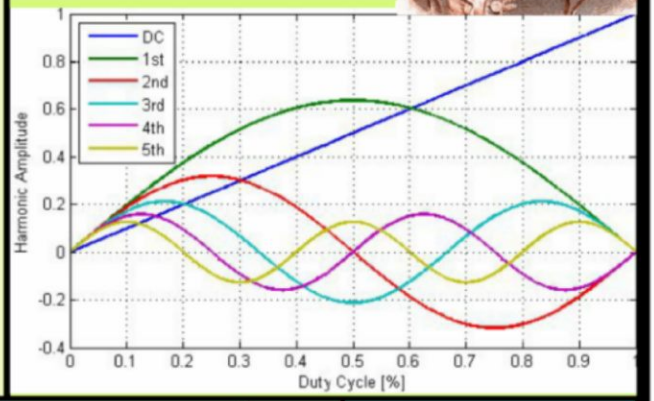
$$y''+\lambda^2 y=0 \Longrightarrow y=k_1\cos\lambda x+k_2\sin\lambda x$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi n x}{T}\cos\frac{2\pi m x}{T}\,dx=0\ ,\quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi n x}{T}\sin\frac{2\pi m x}{T}\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{T}{2} & n=m\end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi n x}{T}\cos\frac{2\pi m x}{T}\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{T}{2} & n=m\neq 0\\ T & n=m=0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n x}{T}+b_n\sin\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2\pi n x}{T}\,dx \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2\pi n x}{T}\,dx$$




## حل معادله لاپلاس در دستگاه استوانه‌ای به روش تفکیک متغیرها در حالتی که شرایط مرزی مستقل از تغییرات z باشند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

$$u=R(r)\Phi(\varphi)$$

$$r^2R''+rR'-k^2R=0$$

معادله کوشی - اویلر

$$R=A_k r^k+B_k r^{-k}$$

$$\Phi''+k^2\Phi=0$$

معادله هلمهولتز

$$\Phi=C_k\cos k\varphi+D_k\sin k\varphi$$

## فرم کلی پاسخ معادله لاپلاس در دستگاه استوانه‌ای به روش تفکیک متغیرها در حالتی که شرایط مرزی مستقل از تغییرات z باشند.

$$u_n(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)\left(C_k r^k+D_k r^{-k}\right)$$

برای نقاط داخل استوانه (دایره) شرط کراندار بودن پاسخ معادله به ازای $r=0$ ایجاب می‌کند که ضرایب $D_k$ برابر صفر باشند.

$$f(\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi\varphi}{L}+B_k\sin\frac{k\pi\varphi}{L}\right)\Longrightarrow\begin{cases}A_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(\varphi)\cos\frac{k\pi\varphi}{L}\,d\varphi\\ B_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(\varphi)\sin\frac{k\pi\varphi}{L}\,d\varphi\end{cases}$$

# حل معادله لاپلاس در دستگاه استوانه ای

جواب معادله دیفرانسیل لاپلاس با شرایط مرزی داده شده زیر، کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 & 1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \\ u(r,0)=0 & \text{بین دو دایره} \\ u\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right)=0 & 1\le r\le 2 \\ u(1,\theta)=0 & 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \\ u(2,\theta)=\sin 2\theta(1-\cos 2\theta) & \end{cases}$$

۱) $u(r,\theta)=\frac{1}{2}r\sin 2\theta-\frac{1}{8}r^2\sin 4\theta$ ✗

۲) $u(r,\theta)=\frac{4}{r^2}\sin 2\theta-\frac{8}{r^4}\sin 4\theta$ ✗

۳) $u(r,\theta)=\frac{4}{15}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta-\frac{8}{255}\left(r^4-\frac{1}{r^4}\right)\sin 4\theta$

۴) $u(r,\theta)=\frac{2}{3}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin 2\theta-\frac{2}{15}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\sin 4\theta$ ✗

$\sin 2\theta-\sin 2\theta\cos 2\theta=\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta$

**حل:**

$$u(r,0)=u(r,\frac{\pi}{2})=0\xrightarrow{\text{شرایط مرزی دیریکله}}\Phi_n(\theta)=\sin(\frac{n\pi\theta}{\frac{\pi}{2}})=\sin 2n\theta$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^{2n}+B_n r^{-2n}\right]\sin 2n\theta$$

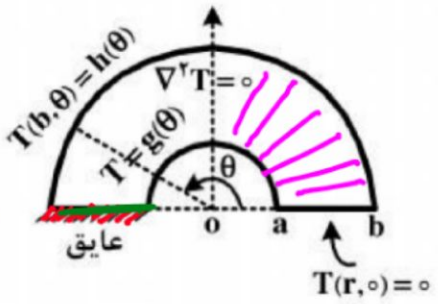
$$u(1,\theta)=0\Rightarrow A_n+B_n=0\Rightarrow A_n=-B_n$$

$$u(2,\theta)=\sin 2\theta(1-\cos 2\theta)=\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n(2)^{2n}+B_n(2)^{-2n}\right]\sin 2\theta$$

$$\begin{cases} n=1\Rightarrow 4A_1+\frac{1}{4}B_1=1\xrightarrow{B_1=-A_1}A_1=\frac{4}{15}\ ,\quad B_1=-\frac{4}{15} \\ n=2\Rightarrow 16A_2+\frac{1}{16}B_2=-\frac{1}{2}\xrightarrow{B_2=-A_2}A_2=-\frac{8}{255}\ ,\quad B_2=\frac{8}{255} \end{cases}\Rightarrow u(r,\theta)=\frac{4}{15}(r^2-\frac{1}{r^2})\sin 2\theta-\frac{8}{255}(r^4-\frac{1}{r^4})\sin 4\theta$$

---

برای مسئله مقدار مرزی زیر، در مورد معادله دیفرانسیل لاپلاس در داخل یک نیم‌طوق، کاندید جواب به کدام صورت است؟




۱) $T(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k r^k\sin(k\theta)$ ✗

۲) $T(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^k+B_k r^{-k})\sin(\frac{2k-1}{2})\theta$ ✗

۳) $T(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k r^{\alpha_k}\sin(\frac{2k-1}{2})\theta$ ، $\alpha_k=(\frac{2k-1}{2})$ ✗

۴) $T(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^{\alpha_k}+B_k r^{-\alpha_k})\sin(\frac{2k-1}{2})\theta$ ، $\alpha_k=(\frac{2k-1}{2})$

شرایط مرزی بر حسب $\varphi$

$T(r,0)=0$ , $T_\theta(r,\pi)=0\longrightarrow\sin\left[\frac{(2k-1)2\pi\theta}{4\pi}\right]$

$\sin\left[\left(\frac{2k-1}{2}\right)\theta\right]$

# حل معادله لاپلاس در دستگاه کروی

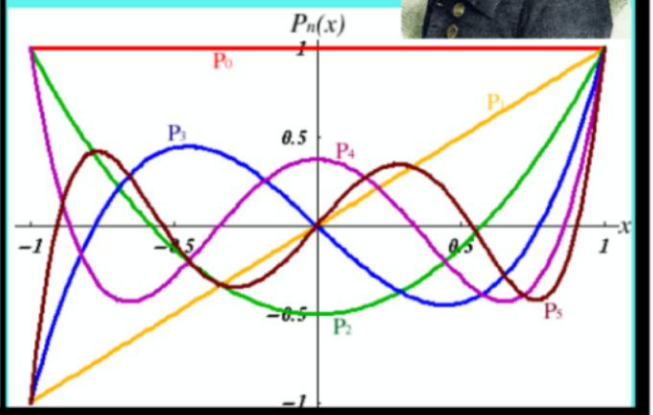
$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \Longrightarrow y=P_n(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \qquad -1<x<1$$

$$\boxed{c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx}$$

سری فوریه لژاندر




حل معادله لاپلاس در دستگاه کروی به روش تفکیک متغیرها در حالتی که شرایط مرزی مستقل از تغییرات $\varphi$ باشد.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$$

$$u=R(r)\,\Theta(\theta)$$

معادله کوشی-اویلر

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0$$

معادله لژاندر

$$\Theta''+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta'+n(n+1)\Theta=0$$

$$\xrightarrow{x=\cos\theta}(1-x^2)\Theta''-2x\Theta'+n(n+1)\Theta=0$$

فرم کلی پاسخ معادله لاپلاس در دستگاه کروی در حالتی که شرایط مرزی مستقل از تغییرات $\varphi$ باشد.

$$R(r)=A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}, \quad \Theta(\theta)=P_n(\cos\theta)$$

$$u_n(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)\Longrightarrow \boxed{u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)}$$

برای نقاط داخل کره، شرط کراندار بودن پاسخ معادله به ازای $r=0$ ایجاب می‌کند که ضرایب $B_n$ برابر صفر باشند.

$$f(\theta)=\sum c_n P_n(\cos\theta)\Longrightarrow c_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

| | | |
|---|---|---|
| $1=P_0(\cos\theta)$ | $\cos\theta=P_1(\cos\theta)$ | $\cos^2(\theta)=\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)$ |

# حل معادله لاپلاس در دستگاه کروی

- می‌دانیم که پاسخ معادلهٔ لاپلاس در هر نقطه داخل یک کره (در حالت تقارن نسبت به $\varphi$) در مختصات کروی بصورت $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)$ می‌باشد،که $P_n(\cos\theta)$ توابع لژاندر می‌باشند. اگر پتانسیل روی سطح کرهٔیکه (کره به شعاع واحد) با عبارت $u(1,\theta)=1+2\cos^2\frac{\theta}{2}$ بیان شود. $u(r,\theta)$ داخل کره عبارتست از:

$1 = P_0(\cos\theta)$

$\cos\theta = P_1(\cos\theta)$

۱) $2+r\cos\theta$ ۲) $1+2r\cos\theta$ ۳) $1+\frac{r^2}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$ ۴) $2+r^2\cos\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)$

$1+2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+1+\cos\theta$

$= 2\times 1+\cos\theta$

$u(1,\theta)=2\times P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)$

$u(r,\theta)=2\times r^0 P_0(\cos\theta)+r^1 P_1(\cos\theta)=2+r\cos\theta$

---

پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر کدام است؟ $0<\varphi<2\pi$ , $a<r<b, 0<\theta<\pi$

$$\begin{cases}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})=0\\ u(a,\theta)=0\\ u(b,\theta)=V_0\cos\theta\end{cases}$$

$P_1(\cos\theta)$

۱) $\frac{V_0a^2\cos\theta}{b^3-a^3}(r-\frac{a^3}{r^2})$ ۲) $\frac{V_0b^2\cos\theta}{b^3-a^3}(r-\frac{a^3}{r^2})$

۳) $\frac{V_0b\cos\theta}{b^2-a^2}(r-\frac{a^3}{r^2})$ ۴) $\frac{V_0a\cos\theta}{b^2-a^2}(r-\frac{a^3}{r^2})$

**حل:** شرایط مرزی نشان می‌دهد که پاسخ معادله داده شده تابعی از هر دو متغیر $r$ و $\theta$ می‌باشد. بنابراین:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

با توجه به اینکه شرط مرزی غیر صفر فقط شامل $\cos\theta$ (یعنی $P_1(\cos\theta)$) است، بنابراین در جواب معادله نیز فقط $P_1(\cos\theta)$ خواهیم داشت. به عبارت دیگر، جواب معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

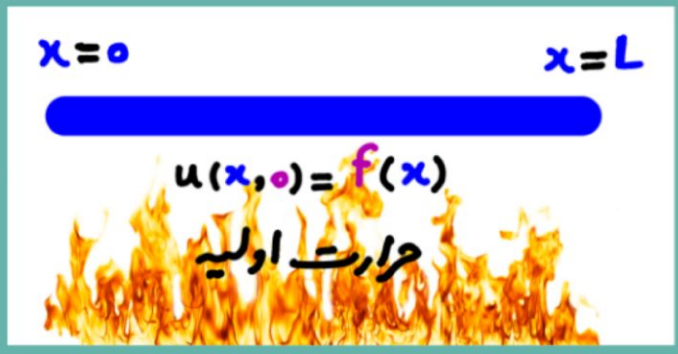
$$u(r,\theta)=(A_1r+\frac{B_1}{r^2})P_1(\cos\theta)\Rightarrow\begin{cases}u(a,\theta)=0\\ u(b,\theta)=V_0\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1a+\frac{B_1}{a^2}=0\\ A_1b+\frac{B_1}{b^2}=V_0\end{cases}\Rightarrow A_1=\frac{V_0b^2}{b^3-a^3}\quad,\quad B_1=\frac{-V_0b^2a^3}{b^3-a^3}$$

$$u(r,\theta)=\left[\frac{V_0b^2}{b^3-a^3}r-\frac{V_0b^2a^3}{(b^3-a^3)r^2}\right]P_1(\cos\theta)=\frac{V_0b^2\cos\theta}{b^3-a^3}(r-\frac{a^3}{r^2})$$

# معادله حرارت یک بعدی همگن

معادله حرارت همگن یک بعدی

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & 0<x<L \ , \ t>0 \\ \text{دو شرط مکانی} \\ u(x,0) = f(x) & \text{حرارت اولیه} \end{cases}$$




| شرایط مرزی و حرارت اولیه | مقادیر ویژه و پایه متعامد مثلثاتی | فرم کلی پاسخ معادله حرارت | روش محاسبه ضرایب مجهول |
|---|---|---|---|
| $u(0,t)=u(L,t)$<br>$u_x(0,t)=u_x(L,t)$<br>$u(x,0)=f(x)$ | $\lambda_n=\frac{2\pi n}{L}$<br>$\frac{1}{2}, \cos\lambda_n x$<br>$\sin\lambda_n x$<br>$n=0,1,2,\dots$ | $u(x,t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-c^2\lambda_n^2 t}\left[A_n\cos\lambda_n x+B_n\sin\lambda_n x\right]$ | $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\lambda_n x\,dx$<br>$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\lambda_n x\,dx$ |
| $u(0,t)=0$<br>$u(L,t)=0$<br>$u(x,0)=f(x)$ | $\lambda_n=\frac{2\pi n}{2L}=\frac{\pi n}{L}$<br>$\sin\lambda_n x$<br>$n=1,2,\dots$ | $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-c^2\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x$ | $B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\lambda_n x\,dx$ |
| $u_x(0,t)=0$<br>$u_x(L,t)=0$<br>$u(x,0)=f(x)$ | $\lambda_n=\frac{2\pi n}{2L}=\frac{\pi n}{L}$<br>$\frac{1}{2}, \cos\lambda_n x$<br>$n=0,1,2,\dots$ | $u(x,t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x$ | $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\lambda_n x\,dx$ |
| $u(0,t)=0$<br>$u_x(L,t)=0$<br>$u(x,0)=f(x)$ | $\lambda_{2n-1}=\frac{2\pi(2n-1)}{4L}=\frac{\pi(2n-1)}{2L}$<br>$\sin\lambda_{2n-1} x$<br>$n=1,2,\dots$ | $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} e^{-c^2\lambda_{2n-1}^2 t}\sin\lambda_{2n-1} x$ | $B_{2n-1}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\lambda_{2n-1} x\,dx$ |
| $u_x(0,t)=0$<br>$u(L,t)=0$<br>$u(x,0)=f(x)$ | $\lambda_{2n-1}=\frac{2\pi(2n-1)}{4L}=\frac{\pi(2n-1)}{2L}$<br>$\cos\lambda_{2n-1} x$<br>$n=1,2,\dots$ | $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} e^{-c^2\lambda_{2n-1}^2 t}\cos\lambda_{2n-1} x$ | $A_{2n-1}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\lambda_{2n-1} x\,dx$ |

$$\begin{cases} u_t = c^2\left[u_{xx} + u_{yy}\right] & 0<x<a,\ 0<y<b \\ \text{دو شرط مرزی برحسب } x \quad u(0,y,t) = u_x(a,y,t) = 0 & (1) \\ \text{دو شرط مرزی برحسب } y \quad u_y(x,0,t) = u_y(x,b,t) = 0 & (2) \\ \text{شرط اولیه} \quad u(x,y,0) = f(x,y) \end{cases}$$

(1) $\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$ $\quad n=1,\dots \quad \lambda_{2n-1} = \dfrac{(2n-1)\pi}{2a}$

(2) $\cos\dfrac{m\pi y}{b}$ $\quad m=0,1,2,\dots \quad \lambda_m = \dfrac{m\pi}{a}$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{mn}\, e^{-c^2\left[\lambda_{2n-1}^2 + \lambda_m^2\right]t} \cos\lambda_m y \,\sin\lambda_{2n-1} x$$

$$A_{mn} = \frac{2}{a}\times\frac{2}{b}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\cos\lambda_m y\,\sin\lambda_{2n-1} x\,dy\,dx$$

---

$$\begin{cases} t\,u_t = u_{xx} & 0<x<a \\ u(0,t) = u(a,t) = 0 \\ u(x,1) = f(x) \end{cases}$$

$X(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{a}$

$\cancel{u_t = c^2 u_{xx}}$

$$u(x,t) = T(t)\,X(x) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} tXT' = TX''$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{tT'}{T} = \begin{cases} 0 & \times \\ \lambda^2 & \times \\ -\lambda^2 & \checkmark \end{cases}$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \longrightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \longrightarrow X = \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\frac{tT'}{T} = -\lambda^2 \longrightarrow \frac{T'}{T} = -\frac{\lambda^2}{t}$$

$$\ln T = -\lambda^2 \ln t = \ln (t)^{-\lambda^2}$$

$$T = t^{-\lambda^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, t^{-\lambda_n^2} \sin \lambda_n x$$

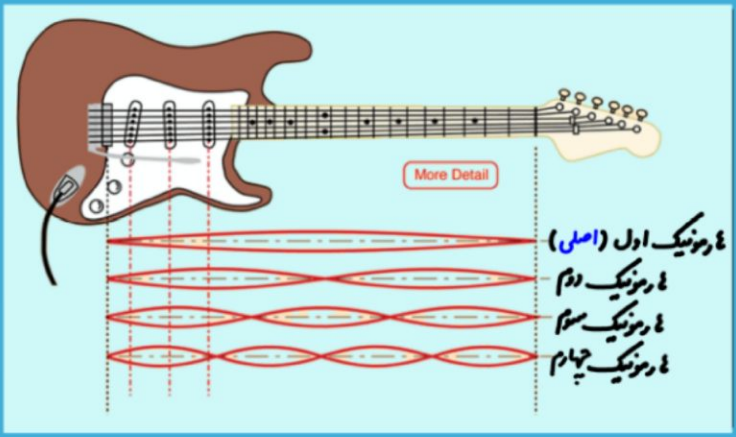
$$\underbrace{u(x,1)}_{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n x$$

$$B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin \lambda_n x \, dx$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$

حرارت در حالت پایدار

# معادله موج یک بعدی همگن




$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ \text{دو شرط مکانی} \\ u(x,0) = f(x) & \text{شکل اولیه موج} \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{سرعت اولیه موج} \end{cases}$$

## روش تفکیک متغیرها

با توجه به شرایط مرزی، مقادیر ویژه ($\lambda$) و پایه متعامد مثلثاتی (توابع ویژه) را تعیین می‌کنیم. به طور مثال:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \Longrightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \phi_n(x) = \sin \lambda_n x$$

فرم کلی پاسخ معادله موج همگن یک بعدی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = \sum \left\{ A_n \cos c\lambda_n t + B_n \sin c\lambda_n t \right\} \phi_n(x)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\phi_n(x)\,dx$$

$$B_n = \frac{2}{Lc\lambda_n} \int_0^L g(x)\phi_n(x)\,dx$$

## روش دالامبر

در این روش جواب معادله موج را می‌توان به صورت زیر نوشت:

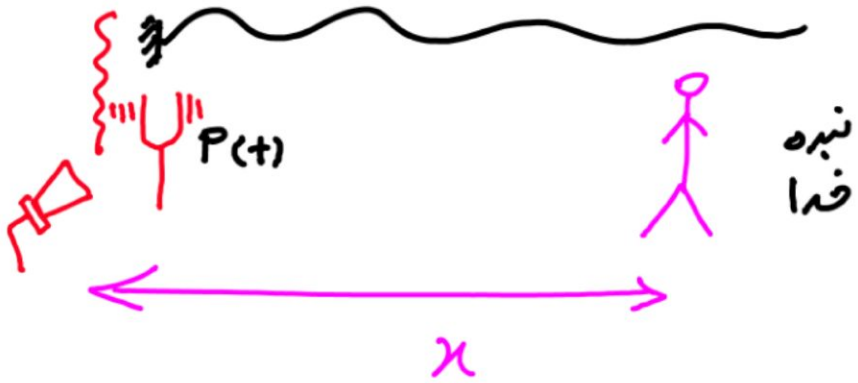
$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{G(x+ct) - G(x-ct)}{2c}$$

از روش دالامبر، اغلب زمانی استفاده می‌کنیم که پاسخ معادله موج را در زمان و مکان معینی خواسته باشند. باید توجه داشت که توابع $f(x)$ و $g(x)$ فقط در بازه $(0,L)$ تعریف شده‌اند و برای محاسبه مقادیر آنها در سایر بازه‌ها لازم است، آنها را با توجه به شرایط مرزی به صورت متناوب گسترش دهیم.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0<x<\infty \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=P(t) \end{cases}$$

$c$ سرعت موج




$$\text{سرعت} = \frac{\text{جابجایی}}{\text{زمان}} \rightarrow t = \frac{\text{جابجایی}}{\text{سرعت}} = \frac{x}{c}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & t<\frac{x}{c} \\ P\left(t-\frac{x}{c}\right) & t>\frac{x}{c} \end{cases}$$

$$u(x,t) = P\left(t-\frac{x}{c}\right) H\left(t-\frac{x}{c}\right)$$


---

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0<x<\infty \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=Q(t) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & t<\frac{x}{c} \\ -c\int_0^{t-\frac{x}{c}} Q(s)\,ds & t>\frac{x}{c} \end{cases}$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ناهمگن

درمعادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ناهمگن می‌توان با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب، معادله ویا شرایط مرزی آن راهمگن نمود.

- ✓ در تست‌ها بهترین روش، بررسی گزینه‌های داده شده می‌باشد.
- ✓ اگر فقط بخواهیم شرایط مرزی را همگن نماییم و تغییر متغیر لازم به صورت $u(x,t)=W(x,t)+f(x,t)$ باشد، تابع $f(x,t)$ از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} u(0,t)=a(t) \\ u(L,t)=b(t) \end{cases} \Rightarrow f(x,t)=\frac{b(t)-a(t)}{L}x+a(t)$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=a(t) \\ u_x(L,t)=b(t) \end{cases} \Rightarrow f(x,t)=\frac{b(t)-a(t)}{2L}x^2+a(t)x$$

$$\begin{cases} u(0,t)=a(t) \\ u_x(L,t)=b(t) \end{cases} \Rightarrow f(x,t)=b(t)x+a(t)$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=a(t) \\ u(L,t)=b(t) \end{cases} \Rightarrow f(x,t)=a(t)(x-L)+b(t)$$

$a(t)x+b(t)-a(t)L$

$a(t)[x-L]+b(t)$

۱۱- اگر در مسئله $\begin{cases} u_t-c^2u_{xx}=Ne^{-\alpha x} & t>0 \\ u(0,t)=0=u(L,t) & \\ u(x,0)=f(x) & 0\le x\le L \end{cases}$ ($N$ ثابت) قرار دهیم $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ و تابع $w$ به قسمی باشد که $v$ جواب مسئله $\begin{cases} v_t-c^2v_{xx}=0 & 0<x<L, t>0 \\ v(0,t)=0=v(L,t) & \\ v(x,0)=f(x)-w(x) & \end{cases}$ باشد، آنگاه $w(x)$ کدام است؟

$v_t-c^2[v_{xx}+w'']=Ne^{-\alpha x}$

$\underbrace{v_t-c^2v_{xx}}_{0}-c^2w''=Ne^{-\alpha x}$

۱) $\frac{Ne^{-\alpha x}}{c^2\alpha^2}x(L-x)$ ✗

۲) $\frac{N}{c^2\alpha^2}\left[1-e^{-\alpha x}-\frac{1-e^{-\alpha L}}{L}x\right]$ ✓

۳) $\frac{N}{c^2\alpha^2}(1-e^{-\alpha x})(L-x)$

۴) $\frac{Ne^{-\alpha x}}{c^2\alpha^2}x(x-L)$ ✗

بدیهی است که هدف از تغییر متغیر در این مسأله، همگن کردن معادله و شرایط مرزی توأم با یکدیگر است. برای همگن شدن معادله لازم است که رابطه مقابل برقرار باشد:

$$-c^2w''=Ne^{-\alpha x}\Rightarrow w''=\frac{-N}{c^2}e^{-\alpha x}\Rightarrow w=\frac{-N}{c^2\alpha^2}e^{-\alpha x}+c_1x+c_2$$

برای همگن شدن شرایط مرزی، لازم است که داشته باشیم:

$$x=0\Rightarrow u(0,t)=0\Rightarrow w(0)=0\Rightarrow c_2=\frac{N}{c^2\alpha^2} \qquad x=L\Rightarrow u(L,t)=0\Rightarrow w(L)=0\Rightarrow c_2=\frac{-N(1-e^{-\alpha L})}{c^2\alpha^2}$$

بنابراین:

$$w(x)=\frac{-N}{c^2\alpha^2}e^{-\alpha x}-\frac{N(1-e^{-\alpha L})}{c^2\alpha^2}x+\frac{N}{c^2\alpha^2}=\frac{N}{c^2\alpha^2}\left[1-e^{-\alpha x}-\frac{1-e^{-\alpha L}}{L}x\right]$$

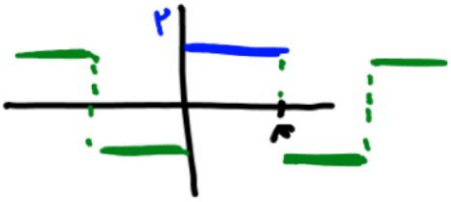
# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ناهمگن

**جواب معادله زیر با استفاده از تبدیل فوریه کدام است؟**

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 2 \\ u(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 \quad , \quad t \ge 0 \\ u(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \ge 0 \end{cases}$$

هارمونیک فرد

$\sin \frac{n\pi x}{\pi} = \sin nx$




۱) $\frac{4}{\pi c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^3}(1-\sin nct)\cos nx$ ✗

۲) $\frac{4}{\pi c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+2}}{n^3}(1-\cos nct)\sin nx$ ✗

۳) $\frac{4}{\pi c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^3}(1-\cos nct)\sin nx$

۴) $\frac{4}{\pi c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+2}}{n^3}(1-\sin nct)\sin nx$ ✗

**حل:** با توجه به محدود بودن بازه مکانی $(0 \le x \le \pi)$ و ناهمگن بودن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی داده شده، و اینکه شرایط مرزی از نوع دیریکله می‌باشد، $(u(0,t) = u(\pi,t) = 0)$ لازم است که جواب معادله را به فرم زیر در نظر بگیریم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} \xrightarrow{L=\pi} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin nx$$

از طرفی چنانچه عامل ناهمگن سمت راست معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی داده شده (یعنی $f(x,t) = 2$) را بر اساس پایه متعامد $\sin\frac{n\pi x}{L}$ بسط دهیم، به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad 0 < x < \pi$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin nx\ dx = \frac{4[1-(-1)^n]}{n\pi} = \frac{4[1+(-1)^{n+1}]}{n\pi}$$

با جایگذاری $f(x,t) = 2$ و $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin nx$ در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی داده شده، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n''(t)\sin nx \\ u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 B_n(t)\sin nx \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n''(t)\sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} c^2 n^2 B_n(t)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4[1+(-1)^{n+1}]}{n\pi}\sin nx$$

بنابراین:

$$B_n''(t) + c^2 n^2 B_n(t) = \frac{4[1+(-1)^{n+1}]}{n\pi}$$

چنانچه معادله دیفرانسیل معمولی فوق را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنیم، به جواب نهایی زیر خواهیم رسید:

$$s^2 B + c^2 n^2 B = \frac{4[1+(-1)^{n+1}]}{n\pi s} \qquad \Rightarrow B = \frac{4[1+(-1)^{n+1}]}{n\pi s(s^2+n^2c^2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2+n^2c^2}$$

$$k_1 = \frac{4[1+(-1)^{n+1}]}{n^3\pi c^2} \quad , \quad k_2 = -k_1 \quad , \quad k_3 = 0$$

بنابراین:

$$B = \frac{4[1+(-1)^{n+1}]}{n^3\pi c^2}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{4[1+(-1)^{n+1}]}{n^3\pi c^2}\left(\frac{s}{s^2+n^2c^2}\right)$$

با معکوس تبدیل لاپلاس گرفتن از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$B_n(t) = \frac{4[1+(-1)^{n+1}]}{n^3\pi c^2}(1-\cos nct) \Rightarrow u(x,t) = \frac{4}{\pi c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^3}(1-\cos nct)\sin nx$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ناهمگن

در معادله موج غیرهمگن با شرایط داده شده $u(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ کدام مورد است؟

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+\sin(x) & 0\le x\le\pi \quad , \quad t\ge 0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

$\to \sin\frac{n\pi x}{\pi}=\sin nx$

$u = b(t)\sin x$

۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

شرایط مرزی $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ ایجاب می‌کند که پایه متعام جواب به صورت $\Phi_n(x)=\sin nx$ باشد با توجه به اینکه عامل ناهمگنی معادله نیز خود به صورت پایه‌ای می‌باشد (به ازای $n=1$) بنابراین نیازی به استفاده از بسط فوریه مثلثاتی نبوده و می‌توانیم جواب را به شکل $u(x,t)=B(t)\sin x$ در نظر بگیریم. با جایگذاری این تابع در معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$B''(t)\sin x=-B(t)\sin x+\sin x \Rightarrow B''(t)+B(t)=1 \Rightarrow B(t)=\underbrace{k_1\cos t+k_2\sin t}+1$$

با توجه به شرایط اولیه می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} u(x,0)=0\Rightarrow B(0)=0\Rightarrow k_1+1=0\Rightarrow k_1=-1 \\ u_t(x,0)=0\Rightarrow B'(0)=0\Rightarrow k_2=0 \end{cases} \Rightarrow B(t)=1-\cos t\Rightarrow u(x,t)=(1-\cos t)\sin x\Rightarrow u(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})=(1-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

برای حل مسئلهٔ مقدار مرزی غیرهمگن داده شده با شرایط اولیه و مرزی همگن به‌صورت زیر:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-x)\sin t=\frac{\partial u}{\partial t} \ , \ 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(0,t)=u(1,t)=u(x,0)=0 \ , \ 0<x<1 \ , \ t>0 \end{cases}$$

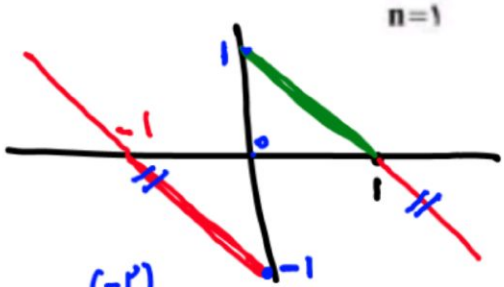
$-n^2\pi^2 U_n+\frac{2}{n\pi}\sin t=U_n'$

شرایط مرزی

$\sin\frac{n\pi x}{1}$

می‌توان از بسط فوریه به‌صورت زیر استفاده نمود.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin(n\pi x) \ , \ F(x,t)=(1-x)\sin t=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\sin(n\pi x)$$




$b_n=\frac{(-2)}{n\pi}=\frac{2}{n\pi}$

$F_n(t)=\frac{2}{n\pi}\sin t$

کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

۱) $u_n'(t)-n^2\pi^2u_n(t)=\frac{\sin t}{n\pi}$ , $F_n(t)=\frac{2}{n\pi}\sin t$

۲) $u_n'(t)-n^2\pi^2u_n(t)=\frac{2\sin t}{n\pi}$ , $F_n(t)=\frac{1}{n\pi}\sin t$ ✗

۳) $u_n'(t)+n^2\pi^2u_n(t)=\frac{2\sin t}{n\pi}$ , $F_n(t)=\frac{2}{n\pi}\sin t$

۴) $u_n'(t)+n^2\pi^2u_n(t)=\frac{\sin t}{n\pi}$ , $F_n(t)=\frac{1}{n\pi}\sin t$ ✗

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ناهمگن

می‌دانیم که جواب مسئله $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & , \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & , \quad 0 \leq x \leq l \end{cases}$ به ازای تابع $\phi(x)$ مفروض به شکل $\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x$ می‌باشد که در آن ضرایب ثابت $b_n$ ضرایب سینوسی فوریه تابع $\phi$ هستند. در این صورت جواب مسئله در $x = \frac{l}{2}$ عبارتست از:

۱) $u(\frac{l}{2},t) = b + \frac{a-b}{2} + (\frac{l}{\pi})^2 (1 - e^{-(\frac{\pi}{l})^2 t})$

۲) $u(\frac{l}{2},t) = b + \frac{a-b}{2}$

۳) $u(\frac{l}{2},t) = b + \frac{a-b}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x$

۴) $u(\frac{l}{2},t) = (\frac{l}{\pi})^2 (1 - e^{-(\frac{\pi}{l})^2 t})$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin(\frac{\pi}{l} x) & , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \\ u(0,t) = b \ (\text{ثابت}) \quad u(l,t) = a \ (\text{ثابت}) \\ u(x,0) = b + \frac{(a-b)}{l} x \end{cases}$$

$\frac{a-b}{L} x + b$

ابتدا باید معادله داده شده را تبدیل به یک معادله همگن با شرایط مرزی صفر نماییم. برای این منظور از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$$

برای همگن شدن معادله لازم است که شرط مقابل برقرار باشد:

$$-\psi''(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \Rightarrow \psi(x) = (\frac{L}{\pi})^2 \sin \frac{\pi x}{L} + k_1 x + k_2$$

برای صفر شدن شرایط مرزی، لازم است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \psi(0) = b \Rightarrow k_2 = b \\ x = L \Rightarrow \psi(L) = b \Rightarrow k_1 = \frac{a-b}{L} \end{cases}$$

بنابراین:

$$u(x,t) = v(x,t) + (\frac{L}{\pi})^2 \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{a-b}{L} x + b$$

بدین ترتیب، معادله جدید حاکم بر تابع $v(x,t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v(0,t) = 0 \quad , \quad v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = -(\frac{L}{\pi})^2 \sin \frac{\pi x}{L} \end{cases}$$

با توجه به توضیحات داده شده در قسمت اول مساله و اینکه $\Phi(x) = -(\frac{L}{\pi})^2 \sin \frac{\pi x}{L}$ خود به صورت پایه‌ای بوده و فقط شامل یک هارمونیک (به ازای $k = 1$) می‌باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$b_1 = -(\frac{L}{\pi})^2 \Rightarrow v(x,t) = -(\frac{L}{\pi})^2 e^{-(\frac{\pi}{L})^2 t} \sin \frac{\pi x}{L}$$

بنابراین، جواب نهایی را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$u(x,t) = b + \frac{a-b}{L} x + (\frac{L}{\pi})^2 [1 - e^{-(\frac{\pi}{L})^2 t}] \sin \frac{\pi x}{L}$$

به ازای $x = \frac{L}{2}$ خواهیم داشت:

$$u(\frac{L}{2},t) = b + \frac{a-b}{2} x + (\frac{L}{\pi})^2 (1 - e^{-(\frac{\pi}{L})^2 t})$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

| پاسخ هوشمندانه | سؤالات کنکور سالهای گذشته |
|---|---|

جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$ با شرایط مرزی و اولیه زیر (علامت $u_x$ یعنی $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $u_y$ یعنی $\frac{\partial u}{\partial y}$) (۶۷)

$u_x(x, 0) = p$

$u_y(0, y) = q$

$u(0, 0) = p + q$

عبارت است از:

۱- $u(x, y) = xy + p + q$ ✗

۲- $u(x, y) = xy + px + qy + p + q$

۳- $u(x, y) = xy + (p + q)x + (p + q)y + p + q$ ✗

۴- $u(x, y) = (p + q)xy + p + q$ ✗

---

① $\ln[x^2+y^2] = \ln(r^2) = 2\ln r$ ✓

③ $x^2 - y^2 = \mathrm{Re}\{z^2\}$ ✓

④ $5xy = \frac{5}{2}\,\mathrm{Im}\{z^2\}$ ✓

کدامیک از عبارات زیر در معادله لاپلاس دوبعدی به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ صدق نمی‌کند: (۶۷)

۱- $u = \ln[(x - a)^2 + (y - b)^2]$

۲- $u = [(x - a)^2 + (y - b)^2]^{-\frac{1}{2}}$

۳- $u = (x - a)^2 - (y - b)^2$

۴- $u = 5(x - a)(y - b)$

---

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + kS(x)\right]y = 0$$

$$\int_a^b \phi_{k_1}\,\phi_{k_2}\,S(x)\,dx = 0$$

$$y'' + \frac{\cos x}{\sin x}y' + ky = 0$$

$$\sin x\, y'' + \cos x\, y' + k\sin x\, y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\frac{dy}{dx}\right] + k\sin x\, y = 0$$

معادله دیفرانسیل زیر با شرایط مرزی بصورت (۶۷)

$y'(\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2})$ و $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ و $y'' + \cot g\, x\, y' + ky = 0$

را درنظر می‌گیریم. $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو حل مستقل بازای $k_1$ و $k_2$ از معادله فوق می‌باشند. کدامیک از روابط زیر صحیح است ($k_1 \neq k_2$ می‌باشد)

۱- $\int_{\pi/4}^{\pi/2} y_1 y_2 \sin x\, dx = 0$

۲- $\int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}} y_1 y_2 \cos x\, dx = 0$

۳- $\int_0^{\pi/2} y_1 y_2 \cos x\, dx = 0$

۴- $\int_{\pi/4}^{\frac{3\pi}{4}} y_1 y_2 \sin x\, dx = 0$

---

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{y}{x}$$

اگر $f(x,y) = \sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$ آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}$ برابر است با: (۶۸)

همگن از درجه ۰

۱- $\frac{x}{y}$

۲- $-\frac{x}{y}$

۳- $\frac{y}{x}$

۴- $-\frac{y}{x}$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

: جواب معادله $U_x+U_y=2(x+y)U$ برابر است با: (۶۸)

۱- $U=Ke^{x^2+y^2+C(x-y)}$

۲- $U=Ke^{x^2-y^2+C(x+y)}$

۳- $U=Ke^{x^2+y^2+C(x+y)}$

۴- $U=Ke^{x^2-y^2+C(x+y)}$

تابع $w=f(y-z,z-x,x-y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟ (۶۸)

۱- $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1$

۲- $\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}$

۳- هیچکدام

۴- $\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}=0$

جوابی از معادله موج $u_{tt}=a^2u_{xx}$ برای $0<x<\infty$ , $t>0$ بیابید که در شرایط اولیه $u(x,0)=0$ و $u_t(x,0)=0$ و در شرایط کرانه‌ای $u(0,t)=\mu(t)$ صدق نماید. (۶۸)

۱- $u(x,t)=\mu(t-x)$

۲- $u(x,t)=\begin{cases}0 , & t<x\\ \mu(t-x), & t>x\end{cases}$

۳- $u(x,t)=\begin{cases}0 , & t<\frac{x}{a}\\ \mu(t-\frac{x}{a}), & t>\frac{x}{a}\end{cases}$

۴- $u(x,t)=\mu(t-\frac{x}{a})$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی که جواب آن در رابطه $\underbrace{xyz}_{v}=\phi(\underbrace{x+y+z}_{u})$ صدق کند عبارت است از: (۶۸)

۱- $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=z$

۲- $x(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y})=2z$

۳- $xy(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})=z(x-y)$

۴- $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

## پاسخ هوشمندانه

$w=e^{2(y-z)+3(z-x)+x-y}$

$w=e^{y+z-2x}$

a: سرعت


$$\begin{vmatrix} z_x & z_y & -1\\ 1 & 1 & 1\\ yz & xz & xy\end{vmatrix}=0$$

$z_x(xy-xz)-z(xy-yz)$

$-1(xz-yz)=0$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

| پاسخ هوشمندانه | سؤالات کنکور سالهای گذشته |
|---|---|

برای معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی

$$\underbrace{e^{2x}}_{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\underbrace{2x\,e^{x+y}}_{B}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\underbrace{e^{2y}}_{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

کدام گزارهٔ زیر دست است؟ (۶۹)

۱- به ازای هر x و y از نوع هذلولی‌گون است

۲- به ازای $y=1$ از نوع سهمی‌گون است

۳- به ازای $-1<x<1$ و هر y از نوع بیضی‌گون است

۴- به ازای $x=y$ از نوع هذلولی‌گون است

$$\Delta=B^2-4AC$$

$$4x^2e^{2x+2y}-4e^{2x+2y}$$

$$=4e^{2x+2y}[x^2-1]$$

$|x|<1 \longrightarrow$ بیضی‌گون

---

هرگاه پتانسیل الکترواستاتیکی موجود در روی بدنه دو استوانه هم‌محور و به شعاعهای قاعده ۱ و e به ترتیب برابر ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشند و معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت زیر باشد (۶۹)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

آنگاه پتانسیل موجود بین دو استوانه برابر است با:

۱- $110r+220$ ✗

۲- $110(\mathrm{Ln}\,r+1)$

۳- $110\,\mathrm{Ln}\,r+220$ ✗

۴- $\frac{110}{e-1}(r+e-2)$ ✗


$$u=k_1\,\mathrm{Ln}\,r+k_2$$

---

جواب مسئله

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}\ ;\ 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x;0)=2\sin x\ ;\ 0\le x\le\pi \\ u(0,t)=0\ ,\ u(\pi,t)=0\ ;\ t\ge 0 \end{cases}$$

$$\sin\frac{n\pi x}{\pi}=\sin nx$$

عبارت است از (۶۹)

۱- $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\sin nx\sin nt$ ✗

۲- $u(x,t)=2\sin x\cos t$ ✗

۳- $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx\sin nt$ ✗

۴- $u(x,t)=2\sin x\sin t$

---

مسئله تعیین توابع ویژه u و مقادیر ویژه $\lambda$ اپراتور خطی $L=-\frac{d^2}{dx^2}$ روی فضای توابع $C^2[0\ ,\ \pi]$ (منظور مجموعه توابعی است که دارای مشتق پیوسته تا مرتبه دوم در نقاط بازه $(0\ ,\pi)$ باشند) که در شرایط $u(0)=0$ و $u'(\pi)=0$ صدق کنند بصورت زیر مطرح می‌شود (۶۹)

$$\begin{cases} L[u]=-\frac{d^2}{dx^2}=\lambda u\ ;\ 0<x<\pi \\ u(0)=0\ ,\ u'(\pi)=0\ ; \end{cases}$$

در اینصورت توابع ویژه اپراتور L عبارتند از

۱- $u_k(x)=\sin x\cos^2(k+\frac{1}{2})x$

۲- $u_k(x)=\sin kx\,(1+\cos x)$

۳- $u_k(x)=\sin kx\cos\frac{x}{2}-\cos kx\sin\frac{x}{2}$

۴- هیچکدام

$$\sin\left[\frac{(2k+1)2\pi x}{4\pi}\right]$$

$$\sin\left[\frac{2k+1}{2}x\right]$$

$$\sin\left[(k+\tfrac{1}{2})x\right]$$

$$=\sin kx\cos\frac{x}{2}-\cos kx\sin\frac{x}{2}$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

جواب مسئله

$U_{tt}=U_{xx}\ ;\ 0<x<\pi\ ,\ t>0$

$U(x,0)=1\ ,\ U_t(x,0)=0\ ,\ 0\le x\le\pi$

$U(0,t)=0\ ,\ U(\pi,t)=0\ ,\ t\ge 0$

عبارت است از (۷۰)

۱- $U(x,t)=1+\sin t\cos x$ ✗

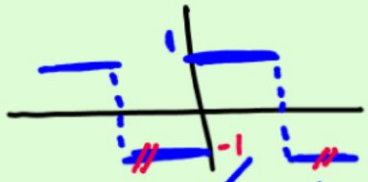
۲- $U(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\sin(2n-1)t$ ✗

۳- $U(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\sin(2n-1)x$ ✓

۴- $U(x,t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\sin(2n-1)x$ ✗

### پاسخ هوشمندانه

$\sin\frac{n\pi x}{\pi}=\sin nx$




هارمونیک فرد

---

معادله $U_{tt}-U_{xx}=0$ با تغییر متغیر $r=x+t$ و $s=x-t$ به کدامیک از صورتهای زیر تبدیل می‌شود: (۷۰)

هذلولی گون $\Delta>0$

۱- $U_{rr}=0$ ✗

۲- $U_{rs}=0$ ✓

۳- $U_{rs}+U_r=0$ ✗

۴- $U_{ss}=0$ ✗

فرم استاندارد هذلولی گون

$u_{rs}=\dots$

---

اگر تابع $u(x,t)$ جواب مسئله

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=x(1-x)\ ,\ 0\le x\le 1 \\ u_x(0,t)=u(1,t)=0\ ,\ t\ge 0 \end{cases}$$

باشد، آنگاه $u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ برابر است با (۷۱)

۱- $\frac{1}{24}$

۲- $-\frac{1}{24}$

۳- $0$

۴- $\frac{1}{8}$

نسبت به $x=0$ گسترش زوج

نسبت به $x=1$ گسترش فرد

$T=4$

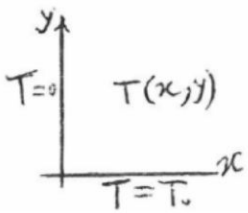
$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}s(1-s)\,ds$

$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}s(1-s)\,ds$

$=\frac{2}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}}s(1-s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}s(1-s)\,ds$

---

دمای حالت پایدار کراندار در ربع اول و با شرایط مرزی نشان داده شده، $T(x,y)$، برابر است با: (۷۱)




۱- $T(x,y)=T_0-\frac{T_0}{\pi}tg^{-1}\frac{y}{x}$

۲- $T(x,y)=T_0-\frac{2T_0}{\pi}tg^{-1}\frac{y}{x}$

۳- $T(x,y)=T_0-\frac{2T_0}{\pi}tg^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2}$

۴- $T(x,y)=T_0-\frac{T_0}{\pi}tg^{-1}\frac{2xy}{x^2+y^2}$

$T=k_1\varphi+k_2$

$T=T_0-\frac{2T_0}{\pi}\varphi$

$T=T_0-\frac{2T_0}{\pi}\tan^{-1}(\frac{y}{x})$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

معادله $(y+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x+y$ مفروض است. (۷۱)

A B C

۱- این معادله از نوع بیضوی و بعضی جاها هذلولوی است؟

۲- این معادله در برخی ناحیه سهموی است و در برخی ناحیه هذلولوی است؟

۳- این معادله در برخی ناحیه بیضوی و در برخی ناحیه سهموی است؟

۴- این معادله در برخی ناحیه بیضوی و در برخی ناحیه هذلولوی و در برخی نقاط سهموی است؟

## پاسخ هوشمندانه

$\Delta = B^2 - 4AC$

$= 4x^2 - 4(y+1)$

$= 4[x^2 - y - 1]$

---

پتانسیل الکترواستاتیک بر روی نیمدایره‌های بالائی و پائینی یک دایره به مرکز مبدا و شعاع واحد به ترتیب برابر ۰ و ۱ است، اگر مقدار پتانسیل در نقاط درونی دایره برابر باشد با: (۷۲)

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (0 \le r \le 1 \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

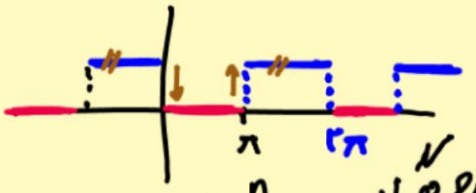
آنگاه

۱- $A_n = 0$ ، $B_n = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}$ به ازای هر $n > 0$

۲- $A_n = 1$ ، $B_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$ به ازای هر $n > 0$

۳- $A_n = 0$ ، $B_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$ به ازای هر $n > 0$

۴- $A_n = 1$ ، $B_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}$ به ازای هر $n > 0$




$B_n = -\frac{1+(-1)(-1)^n}{n\pi}$

$= \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}$

درجه همگرایی ۱ فقط یک مونیک فرد دارد.

---

مسئله مقدار اولیه کرانه‌ای

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = t \\ u(0,t) = 2t \ , \ u(1,t) = t \ , \ t \ge 0 \\ u(x,0) = x \ , \ u_t(x,0) = 2 \ , \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

ناهمگن

اگر با تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + a(t)x + b(t)$ بصورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = t \\ v(x,0) = f_1(x) \ , \ v_t(x,0) = f_2(x) \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \end{cases}$$

همگن

در اینصورت (۷۲)

۱- $a=-1 \ , \ b=-2t \ , \ f_1(x)=x \ , \ f_2(x)=2$

۲- $a=t \ , \ b=-2 \ , \ f_1(x)=x \ , \ f_2(x)=1$

۳- $a=1 \ , \ b=-2t \ , \ f_1(x)=x^2 \ , \ f_2(x)=2x$

۴- $a=-t \ , \ b=2t \ , \ f_1(x)=x \ , \ f_2(x)=x$

$\frac{t-2t}{1}x + 2t$

$-tx + 2t$

$a(t) = -t$

$b(t) = 2t$

---

فرض کنیم، یک میله به طول ۱۰ که دو سرآن در دمای صفر است در لحظه اولیه در دمای $u(x,0) = x(10-x)$ باشد. اگر در نقطه x و در زمان t دما با (۷۲)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \, e^{-\lambda_n^2 C^2 t}$$

بیان شود و $\lambda_n = \frac{n\pi}{10}$ و $c^2 = 1$، آنگاه دما در وسط میله برابر است با:

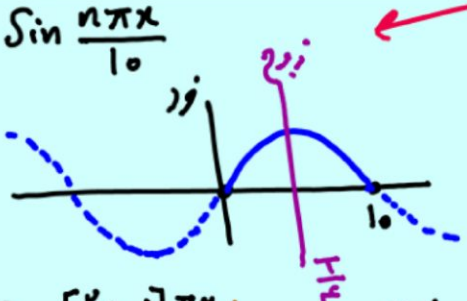
$x = 5$

۱- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{800}{(2k-1)^3\pi^3}(-1)^{k-1} e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{100}t}$

۲- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{800}{(2k)^3\pi^3}(-1)^{k-1} e^{-\frac{(2k)^2\pi^2}{100}t}$

۳- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{800}{(2k-1)^3\pi^3} e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{100}t}$

۴- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{800}{(2k)^3\pi^3} e^{-\frac{(2k)^2\pi^2}{100}t}$




$\sin\frac{n\pi x}{10}$

$\sin\frac{[2n-1]\pi x}{10}\Big|_{x=5} = (-1)^{n-1}$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

| سؤالات کنکور سالهای گذشته | پاسخ هوشمندانه |
|---|---|
| اگر توابع $u(x,t)$ و $v(x,t)$ جوابهای مسائل مقدار کرانه‌ای - اولیه (۷۳)<br>$u_{tt}-u_{xx}=0 \;,\; 0<x<\pi \;,\; t>0$ ، $v_{tt}-v_{xx}=0 \;,\; 0<x<\pi \;\; t>0$<br>$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=a\cos\frac{x}{2}+b\sin\frac{x}{2}=\Psi(x) \\ u(0,t)=at \\ u(\pi,t)=bt \end{cases}$ ناهمگن<br>$\begin{cases} v(x,0)=0 \\ v_t(x,0)=\Psi(x)-(1-\frac{x}{\pi})a-\frac{x}{\pi}b \\ v(0,t)=0 \\ v(\pi,t)=0 \end{cases}$ همگن<br>باشند، آنگاه $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ برابر است با :<br>۱- $(1-\frac{x}{\pi})a+\frac{x}{\pi}b$<br>۲- $at(1-\frac{x}{\pi})+bt\frac{x}{\pi}$<br>۳- $(at\cos\frac{x}{2}+bt\sin\frac{x}{2})$<br>۴- $at(\pi-x)+bt\,x$ | $\frac{bt-at}{\pi}x+at$<br>$at[1-\frac{x}{\pi}]+bt\frac{x}{\pi}$ |
| اگر انتشارحرارت در یک میله از دو طرف نامتناهی با شرط اولیه $u(x,0)=f(x)$ (۷۳)<br>$u_t=c^2u_{xx} \;,\; x>0 \;,\; t>0$<br>$u(x,0)=m$<br>$u_x(0,t)=0$ گسترش زوج<br>در نقطه x در زمان t از رابطه $u(x,t)=k\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4c^2t}}d\omega$ حاصل شود، $k=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}$ ، آنگاه جواب مسئله مقدار اولیه - کرانه‌ای برابر است با:<br>۱- $\frac{m}{2c\sqrt{t\pi}}\int_0^{\infty}(e^{-\frac{(x+\omega)^2}{4c^2t}}+e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4c^2t}})d\omega$<br>۲- $\frac{m}{2c\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4c^2t}}d\omega$<br>۳- $\frac{m}{2c\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+\omega)^2}{4c^2t}}d\omega$<br>۴- $\frac{2m}{c\sqrt{t\pi}}\int_{-\omega}^{\infty}(e^{-\frac{(x+\omega)^2}{4c^2t}}+e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4c^2t}})d\omega$ | |
| در حل معادله موج در مختصات قطبی $\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$ با روش تفکیک متغیرها، به کدام یک از معادلات زیر برمی‌خوریم. (۷۴)<br>۱- معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از خانواده بسل<br>۲- معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از نوع برنولی<br>۳- معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از خانواده لژاندار<br>۴- معادلات خطی با ضرایب ثابت و معادله از نوع اویلر | |
| میدانیم که جواب مسئله<br>$u_t-u_{xx}=0 \;,\; 0<x<l,\; t>0$<br>$u(0,t)=u(l,t)=0 \;,\; t\geq 0$<br>$u(x,0)=\phi(x) \;,\; 0\leq x\leq l$<br>به ازای تابع $\phi(x)$ مفروض بشکل $\sum_{k=1}^{\infty}b_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x$ می‌باشد که در آن ضرایب ثابت $b_n$ ضرایب سینوسی فوریه تابع $\phi$ هستند. در این صورت جواب مسئله<br>$u_t-u_{xx}=\sin(\frac{\pi}{l}x) \;,\; 0<x<l \;,\; t>0$<br>$u(0,t)=b$(ثابت) $\;,\; \phi(l,t)=a$ (ثابت)<br>$u(x,0)=b+\frac{(a-b)}{l}x$<br>در $x=\frac{l}{2}$ عبارتست از (۷۴)<br>۱- $u(\frac{l}{2},t)=b+\frac{a-b}{2}+(\frac{l}{\pi})^2(1-e^{-(\frac{\pi}{l})^2t})$<br>۲- $u(\frac{l}{2},t)=b+\frac{a-b}{2}$<br>۳- $u(\frac{l}{2},t)=b+\frac{a-b}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(\frac{k\pi}{l})^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x$<br>۴- $u(\frac{l}{2},t)=(\frac{l}{\pi})^2(1-e^{-(\frac{\pi}{l})^2t})$ | |

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

| پاسخ هوشمندانه | سؤالات کنکور سالهای گذشته |
|---|---|
| $\frac{1-2t}{1}x+2t$<br>$=-tx+2t$<br>$u_t(x,0)=v_t(x,0)-x+2$<br>$2-x=v_t(x,0)-x+2$<br>$v_t(x,0)=0$ | با تغییر متغیر $u=v-tx+2t$ مساله:<br>$u_{tt}-u_{xx}=t\ ,\ 0<x<1\ ,\ t>0$<br>$u(x,0)=x\ ,\ u_t(x,0)=2-x$<br>$u(0,t)=2t\ ,\ u(1,t)=t$<br>غیرهمگن<br>$x=v(x,0)-0-0$<br>به مساله زیر تبدیل می‌شود: (۷۴)<br>۱- $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=t\ ,\ 0<x<1\ ,\ t>0 \\ v(x,0)=x\ ,\ v_t(x,0)=x\ ,\ v(0,t)=0\ ,\ v(1,t)=0 \end{cases}$ ✗<br>۲- $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=t\ ,\ 0<x<1\ ,\ t>0 \\ v(x,0)=x\ ,\ v_t(x,0)=v(0,t)=0\ ,\ v(1,t)=0 \end{cases}$<br>۳- $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=t\ ,\ 0\le x\le 1\ ,\ t\ge 0 \\ v(x,0)=x\ ,\ v_t(x,0)=0\ ,\ v(0,t)=0\ ,\ v(1,t)=0 \end{cases}$<br>۴- $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=t\ ,\ 0<x<1\ ,\ t>0 \\ v(x,0)=0\ ,\ v_t(x,0)=x\ ,\ v(0,t)=0\ ,\ v(1,t)=0 \end{cases}$ ✗ |
| $u_{zv}=0$<br>$u=\phi(z)+\psi(v)$ | با توجه به تغییر متغیر $z=xy\ ,\ v=x$، معادله $xu_{xy}=yu_{yy}+u_y$ را حل کنید: (۷۵)<br>۱- $u(x,y)=\phi(y)+\psi(x^2y^2)$ ✗<br>۲- $u(x,y)=\phi(y^2)+\psi(xy)$ ✗<br>۳- $u(x,y)=\phi(y)+\psi(xy)$ ✗<br>۴- $u(x,y)=\psi(xy)+\varphi(x)$ |
| $v_t=u_tw+uw_t$<br>$v_{xx}=u_{xx}w$<br>$\cancel{u_tw}+\cancel{u}w_t=c^2\cancel{u_{xx}}w-\beta\cancel{u}w$<br>$c^2u_{xx}$<br>$\frac{w_t}{w}=-\beta\rightsquigarrow w=e^{-\beta t}$ | اگر $v_t=c^2v_{xx}-\beta v$، آنگاه با فرض $v(x,t)=u(x,t)\ w(t)$، $w$ را برابر کدامیک از عبارات زیر انتخاب کنیم تا معادله فوق به معادله گرما $u_t=c^2u_{xx}$ تبدیل شود. $c$ و $\beta$ مقادیر ثابت‌اند. (۷۵)<br>۱- $w=\sin\beta t$<br>۲- $w=\cos\beta t$<br>۳- $w=e^{-\beta t}$<br>۴- $w=e^{+\beta t}$ |
| $c^2=4\rightsquigarrow c=2$<br>"Ψ"<br>$y(x,t)=\begin{cases}0 & t<\frac{x}{2}\\ f(t-\frac{x}{2}) & t>\frac{x}{2}\end{cases}$<br>$=f(t-\frac{x}{2})\,u(t-\frac{x}{2})$ | پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی زیر برای تابع $y(x,t)$ چیست؟ (۷۵)<br>$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\ ,\ 0<x<\infty\ ,\ t>0$<br>$y(0,t)=f(t)\qquad y(x,0)=0\ ;\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right\|_{x,t=0}=0$<br>$y(x,t)$ در حد وقتی که $x\to\infty$، محدود است.<br>۱- $y(x,t)=f(t-x/2)\,u(t-x/2)$ ✗<br>۲- $y(x,t)=f(t-x/4)$<br>۳- $y(x,t)=f(x/2-t)$ ✗<br>۴- $y(x,t)=f(x/2+t)\,u(-x/2+t)$ ✗ |

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

مسألهٔ مرزی $y''+\alpha_m \sin x\, y=0$ با شرایط مرزی $\begin{cases} y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)-y'(1)=0 \end{cases}$ روی بازهٔ (۱ و ۰) مفروض است. اگر $y_m, m=1,2,3,\ldots$ جوابهای این معادله به ازاء $\alpha_m$ های مختلف باشد، آنگاه: (۷۶)

$S(x)$

۱- $\int_0^1 y_m(x)y_n(x)\sin x\,dx=1$

۲- $\int_0^1 y_m(x)y_n(x)\cos x\,dx=0$

۳- $\int_0^1 y_m(x)y_n(x)\sin x\,dx=0$

۴- $\int_0^1 y_m(x)y_n(x)\,dx=0$

## پاسخ هوشمندانه

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[q(x)+\alpha_m S(x)\right]y=0$$

$$\int_a^b y_m y_n S(x)\,dx=0$$

$$\int_0^1 y_m y_n \sin x\,dx=0$$

حل معادله دیفرانسیل همگن $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ برابر است با: (۷۶)

۱- $u=f(y)e^{-x}+g(x)$

۲- $u=f(y)e^{-x^2/2}+g(y)$

۳- $u=g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}+f(y)$

۴- $u=f(y)e^{-x^2/2}+g(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=w$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}+xw=0$$

$$w=k(y)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$u=f(y)e^{-\frac{x^2}{2}}+g(x)$$

معادله انتقال حرارت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$ در میله‌ای با شرایط مرزی $\begin{cases} u(0,t)=T_0 \\ u(l,t)=2T_0 \end{cases}$ مفروض است. اگر شرط اولیه $u(x,0)=T_0$ برقرارباشد،توزیع دمای میله در حالت پایدار $(t\to\infty)$ برابر است با (۷۶)

۱- صفر

۲- $3T_0/2$

۳- $T_0(1+\frac{x}{l})$

۴- $x^2+(\frac{T_0}{l}-1)x+T_0$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \to u=k_1x+k_2$$

شرایط مرزی

$$u=T_0\frac{x}{L}+T_0$$

$$=T_0\left(1+\frac{x}{L}\right)$$

تابع $u(x,y)$ که حل معادلهٔ لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ در کانال چهارگوشی به ابعاد $a\times b$ با شرایط مرزی $\begin{cases} u(0,y)=u(a,y)=0 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$ و $u(x,b)=V_0\sin(\frac{\pi x}{a})$ می‌باشد برابر است با: (۷۶)

۱- $V_0\frac{\sinh(\frac{\pi y}{a})}{\sinh(\frac{\pi b}{a})}\sin(\frac{\pi x}{a})$

۲- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_0}{n\pi}\frac{\sinh(\frac{n\pi y}{a})}{\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\sin(\frac{\pi x}{a})$

۳- $V_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh[(\frac{(2n-1)\pi y}{a})]}{\sinh[(\frac{(2n-1)\pi b}{a})]}\sin[(\frac{(2n-1)\pi x}{a})]$

۴- $V_0\frac{\sinh(\frac{\pi y}{2a})}{\sinh(\frac{\pi b}{2a})}\sin(\frac{\pi x}{a})$

$\sin\frac{n\pi x}{a}$ $n=1$

نیازی به سری فوریه نیست

$\sinh\frac{\pi y}{a}$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

در مسأله مقدار اولیه - کرانه‌ای روبرو

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 & , x > 0 , t > 0 \\ w(x , 0) = 0 = w_t(x , 0) & , x \geq 0 \\ w_x(0 , t) = \cos bt & , t \geq 0 \end{cases}$$

$c^2 = 1$

$w(x , t)$ برابر است با: (۷۷)

۱- $\frac{1}{b} \sin b(t - x)$ ✗

۲- $\frac{1}{b} \cos b(t - x)$ ✗

۳- $-\frac{1}{b} \sin b(t - x)$ ✗

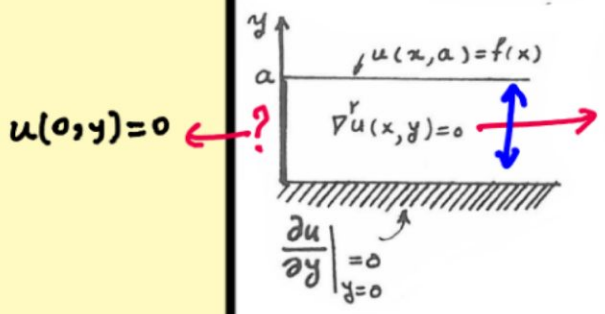
۴- $\begin{cases} -\frac{1}{b} \sin b(t - x) & , t > x \\ 0 & , t \leq x \end{cases}$

## پاسخ هوشمندانه

$c = 1$


$$\begin{cases} -\int_0^{t-x} \cos bt \, dt & t > x \\ 0 & t < \frac{x}{1} \end{cases}$$

عبارت پتانسیل الکتریکی، $u(x , y)$ در ناحیهٔ نیم نوار داده شده و با شرایط مرزی (کرانه‌ای) نشان داده شده، به چه شکل است؟ ($D(p)$ با استفاده از $f(x)$ بدست می‌آید.) (۷۷)




۱- $u(x , y) = \int_0^{\infty} D(p) \cosh py \, e^{-px} \, dp$ ✗

۲- $u(x , y) = \int_0^{\infty} D(p) \sinh px \cos py \, dp$ ✗

۳- $u(x , y) = \int_0^{\infty} D(p) \sin px \cosh py \, dp$ ✓

۴- $u(x , y) = \int_0^{\infty} D(p) \cosh py \, e^{-px} \, dp$ ✗

پاسخ کلی معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

عبارتست از . (۷۷)

۱- $f(x + y) + xg(x + y)$ ✓

۲- $xf(x + y) + yg(x + y)$ ✗

۳- $f(x + y) + xyg(x + y)$ ✗

۴- $f(x + y) + f(x + y)^2$ ✗

$\Delta = B^2 - 4AC = 0$

$Z = f(x+y) + x\, g(x+y)$

معادله ناهمگن حرارت در یک بعد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (a مقداری ثابت است) (۷۸)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad 0 \leq x \leq L \text{ و } t > 0$$

$$u(0 , t) = T_0 \text{ (ثابت)} \quad , \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L , t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

پاسخ حالت پایدار $u_s(x)$ یعنی $\lim_{t \to \infty} u(x, t)$ را بدست آورید.

۱) $u_s(x) = ax(L - x) + T_0$ ✗

۲) $u_s(x) = \frac{ax}{2}(2L - x) + T_0$

۳) $u_s(x) = \frac{a}{2}(L - x)^2 + T_0$ ✗

۴) $u_s(x) = \frac{a}{2} x (L - x) + T_0$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a = 0$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a$

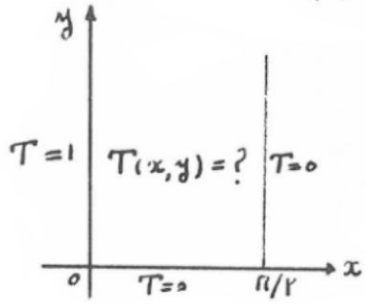
$u = -\frac{a}{2} x^2 + k_1 x + k_2$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

| پاسخ هوشمندانه | سؤالات کنکور سالهای گذشته |
|---|---|

حل معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$ با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل (ناحیه $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ , $0\le y$) برابراست با: (۷۸)




۱) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ✗

۲) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ✗

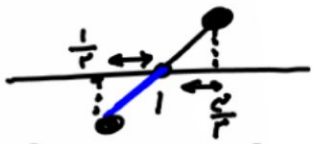
۳) $\frac{2}{\pi}\text{Arctan}(\tanh y)$ ✗

۴) $\frac{2}{\pi}\text{Arctan}(\text{cotx}\tanh y)$

---

در مسئله مقدار اوّلیه - کرانه‌ای (مرزی)

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \ , \ 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\begin{cases} 2x & , \ 0\le x\le \frac{1}{3} \\ 1-x & , \ \frac{1}{3}\le x\le 1 \end{cases} \\ \boxed{u_t(x,0)=0} \ , \ 0\le x\le 1 \\ u_x(0,t)=0=u(1,t) \ , \ t\ge 0 \end{cases}$$




$f(1+\frac{1}{2})=-f(1-\frac{1}{2})$

مقدار $u(x,t)$ را در نقطه $x=\frac{1}{2}$ و در لحظه $t=7$ حساب کنید: (۷۹)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $0$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $1$

T=4

نسبت به x=0 گسترش زوج

نسبت به x=1 گسترش فرد

$u(x,t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$

$u(\frac{1}{2},v)=\frac{1}{2}\left\{f(v+\frac{1}{2})+f(-v+\frac{1}{2})\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\boxed{f(-\frac{1}{2})}+f(1+\frac{1}{2})\right\}=$

$f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2})$

---

پتانسیل الکتریکی در سطح کره‌ای به شعاع a با عبارت $V_0(1-\cos\theta)$ داده می‌شود که در آن $V_0$ ثابت بوده و $\theta$ زاویه شعاع در هر نقطه با محور z می‌باشد. پتانسیل الکتریکی در نقاط خارج کره بفاصله r از مرکز $(r\ge a)$ عبارت است از: (۷۹)

$P_0$ $P_1$

شرایط مرز

۱) $V_0(1-\frac{a}{r}\cos\theta)$ ✗

۲) $V_0(1-\frac{a^2}{r^2}\cos\theta)$ ✗

۳) $V_0(\frac{a}{r}-\cos\theta)$ ✗

۴) $V_0\frac{a}{r}(1-\frac{a}{r}\cos\theta)$

$r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$

---

چنانچه $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$ باشد، جواب معادله لاپلاس دوبعدی بصورت $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$ کدام گزینه است؟ $(i=\sqrt{-1})$ (۷۹)

A=1 B=0 C=1

۱) $u=F_1(z)F_2(\bar{z})$ ✗

۲) $u=F_1(z)+F_2(\bar{z})$

۳) $u=F_1(z\bar{z})+F_2(\frac{z}{\bar{z}})$ ✗

۴) $u=F_1(z+\bar{z})+iF_2(z-\bar{z})$ ✗

$\Delta=B^2-4AC=-4<0$

بیضی گون

$u=f(z)+g(\bar{z})$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

| سؤالات کنکور سالهای گذشته | پاسخ هوشمندانه |
|---|---|

اگر تبدیل فوریه تابع $f(x,y)$ نسبت به $x$ به صورت $\tilde{f}(\omega,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f(x,y)\, dx$ تعریف شود؛ آنگاه تبدیل فوریه جواب کراندار مسئله مقدار مرزی:

عبارت است از: (۸۰)

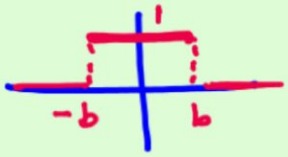
$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \ 0<y<a \ , \ -\infty<x<\infty \\ u(x,0) = 0 \ , \ u(x,a) = \begin{cases} 1 \ , & |x| < b \\ 0 \ , & |x| > b \end{cases} \end{cases}$$

۱) $\frac{\sin \omega b}{\omega} \frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a}$

۲) $\frac{2\sin \omega b}{\omega} \frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a}$

۳) $\frac{\sinh \omega b}{\omega} \frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a}$

۴) $\frac{2\sinh \omega b \sinh \omega y}{\omega \ \sinh \omega a}$




تبدیل فوریه

$$\frac{2\sin \omega b}{\omega}$$

---

جواب $u(x,y)$ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر کدام است؟ (۸۰)

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

۱) $g(x-y) + h(x+\frac{1}{2}y)$

۲) $g(x+y) + h(x+\frac{1}{2}y)$

۳) $g(x+y) + h(x-\frac{1}{2}y)$

۴) $g(x-y) + h(x-\frac{1}{2}y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$y = -2x + c_1 \rightarrow c_1 = y + 2x$

$y = x + c_2 \rightarrow c_2 = y - x$

$F(y-x) + G(y+2x)$

$x - y \qquad x \rightarrow \frac{1}{2}y$

---

برای حل معادلهٔ ناهمگن حرارت با شرایط زیر:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t) \ \text{و} \ u(0,t) = u(l,t) = 0$$

و با فرض $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$، که در آن $A_n(t)$ از معادلهٔ دیفرانسیل $A_n'(t) + c^2 (\frac{n\pi}{l})^2 A_n = B_n(t)$ بدست می‌آید، مقدار $B_n(t)$ کدام است؟ (۸۰)

۱) $\int_0^l q(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$

۲) $\frac{2}{l} \int_0^l q(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$

۳) $\frac{1}{l} \int_0^l q(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$

۴) $\frac{2}{l} \int_{-l}^{+l} q(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$

---

در حل مسألهٔ مقدار اوّلیه - مرزی (یا کرانه‌ای)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \ , \ 0 \le x \le L \\ u_x(0,t) = 0 \ , \ u(L,t) = 0 \ , \ t \ge 0 \end{cases}$$

تابع مفروض و تکه‌ای هموار $\phi(x)$؛ نسبت به کدام پایه متعامد باید بسط داده شود؟ (۸۱)

۱) $\cos \frac{\pi x}{2L}, \cos \frac{2\pi x}{2L}, \cos \frac{3\pi \xi}{2L}, \ldots, \cos \frac{n\pi x}{2L}, \ldots$

۲) $\cos \frac{\pi x}{2L}, \cos \frac{3\pi x}{2L}, \ldots, \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2L}, \ldots$

۳) $\sin \frac{\pi x}{2L}, \sin \frac{3\pi x}{2L}, \ldots, \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2L}, \ldots$

۴) $\cos \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \cos \frac{3\pi x}{L}, \ldots, \cos \frac{n\pi x}{L}, \ldots$

$$\cos\left[\frac{(2n-1)2\pi x}{4 \times L}\right]$$

$$\cos\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

### سؤالات کنکور سالهای گذشته

به ازای چه تابع $\psi(x)$ تغییر متغیر $u(x , t) = w(x , t) + \psi(x)$، مسألهٔ $u_t = ۴u_{xx} + \sin x$، با شرایط $u_x(۰ , t) = -۱$، $u(۰ , t) = ۱$ و $u(x , ۰) = f(x)$ را به معادله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن برحسب w تبدیل خواهد کرد؟ (۸۱)

۱) $\psi(x) = \frac{۱}{۴}\sin x - \frac{۵}{۴}x + ۱$

۲) $\psi(x) = -\frac{۱}{۴}\cos x - \frac{۳}{۴}x + ۱$

۳) $\psi(x) = -\frac{۱}{۴}\sin x - \frac{۳}{۴}x + ۱$

۴) $\psi(x) = \frac{۱}{۴}\cos x - \frac{۵}{۴}x + ۱$

### پاسخ هوشمندانه

$۴\psi'' + \sin x = ۰$

$\psi'' = -\frac{۱}{۴}\sin x$

---

$-\infty < x < \infty \qquad ۰ < y < \infty$

اگر پاسخ معادلهٔ لاپلاس در نیم صفحه بالای محور x با شرایط مرزی روی محور x:

$$u(x , ۰) = \begin{cases} ۰ & ; \quad |x| > ۱ \quad \text{برای} \\ u_۰(\text{ثابت}) & ; \quad |x| < ۱ \quad \text{برای} \end{cases}$$

شرط مرزی غیرصفر تابعی از x

را با $u(x , y)$ نمایش دهیم، آنگاه مقدار $u(۰ , ۱)$ کدام است؟ (۸۱)

۱) صفر ۲) $\frac{u_۰}{۲}$ ۳) $\frac{u_۰}{۴}$ ۴) $\frac{۳u_۰}{۴}$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{۲u_0 \sin w}{w} e^{-wy} \cos wx \, dw$$

$$u(0,1) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{۲u_0 \sin w}{w} e^{-w} dw$$

$$= \frac{۲u_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-t} dt = \frac{u_0}{۲}$$

$a=1 \qquad s=1$

---

اگر در معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول $\begin{cases} x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz \\ x > ۰ \quad , \quad y > ۰ \end{cases}$، تغییر متغیرهای مستقل $\begin{cases} p = \frac{۱}{۲}(\text{Ln } x + \text{Ln } y) \\ q = \frac{۱}{۲}(\text{Ln } x - \text{Ln } y) \end{cases}$ را بکار ببریم، آنگاه: (۸۱)

۱) $\frac{\partial z}{\partial p} = nz$ ۲) $\frac{\partial z}{\partial q} = nz$ ۳) $\frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial q} = nz$ ۴) $\frac{\partial z}{\partial p} - \frac{\partial z}{\partial q} = nz$

$$Z_x = p_x Z_p + q_x Z_q \qquad \frac{1}{۲x} \qquad \frac{1}{۲x}$$

$$Z_y = p_y Z_p + q_y Z_q \qquad \frac{1}{۲y} \qquad -\frac{1}{۲y}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = nZ$$

---

با فرض $\mathcal{L}\{u(x , t)\} = U(x , s)$، تبدیل لاپلاس معادله $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u = xt$ با شرط $u(x , ۰) = ۰$ عبارت است از: (۸۱)

$\frac{\partial U}{\partial x} \qquad sU - \cancel{u(x,0)} \qquad U \qquad \frac{x}{s^۲}$

۱) $\frac{\partial U}{\partial t} + sU = \frac{x}{s^۲}$

۲) $\frac{\partial U}{\partial t} - (s + ۱)U = \frac{x}{t^۲}$

۳) $\frac{\partial U}{\partial x} - (s + ۱)U = \frac{x}{s^۲}$

۴) $\frac{\partial U}{\partial x} + (s + ۱)U = \frac{x}{s^۲}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $t^n$ | $\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ |
| $t^n$ $n \in \mathbb{N}$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $\sin at$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| $\cos at$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| | |

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

$s = s$

$$\int_0^\infty \sin at\, e^{-bt}\, dt = \frac{a}{s^2+a^2}\Big|_{s=b} = \frac{a}{b^2+a^2}$$

$s = b$

$$\int_0^\infty t^3 e^{-2t}\, dt = \frac{3!}{s^4}\Big|_{s=2} = \frac{6}{16}$$

$s = 2$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}\, ds$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin at\}\, ds = \int_s^\infty \frac{a}{s^2+a^2}\, ds$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x > 0$$

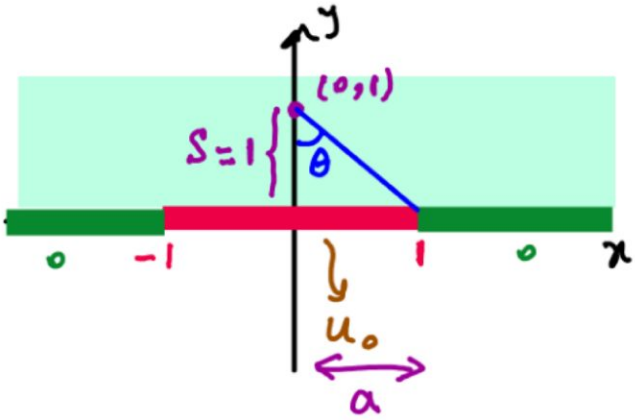
$$\int_0^\infty \frac{\sin at}{t} e^{-bt}\, dt = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)\Big|_{s=b} = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$s=b$

$$\int_0^\infty \frac{\sin at}{t} \boxed{1}\, dt = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)\Big|_{s=0} = \frac{\pi}{2}$$

$e^{-0t}$

$s=0$




$$u(x,y) = \frac{2u_0}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & -\infty < x < \infty \ , \ y > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & |x| > 3 \\ T_0 & |x| < 3 \end{cases} \end{cases}$$

$a=3$

$u(0,\sqrt{3}) = ?$

$s=\sqrt{3}$

$$u(0,\sqrt{3}) = \frac{2T_0}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2T_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2T_0}{3}$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

## پاسخ هوشمندانه

معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ با انتخاب $y(x) = w(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx\right]$ به صورت $w'' + r(x)\,w = 0$ درمی‌آید. برای $r(x)$ کدامیک از گزینه‌های زیر بدست می‌آید؟ (۸۱)

۱) $r(x) = q(x) - p'(x) - \frac{1}{2}p^2(x)$

۲) $r(x) = q(x) - \frac{1}{2}p(x) - \frac{1}{4}p^2(x)$

۳) $r(x) = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x)$

۴) $r(x) = q(x) - p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x)$

---

$L=\pi$

توزیع مکانی - زمانی درجه حرارت $u(x,t)$ در میله‌ای به طول $\pi$ که دو طرف آن در مخلوط آب و یخ قرار گرفته و منبع حرارتی، توزیع دمای اولیه $u(x,0) = f(x) = \sin x$ را از خود بجا گذاشته و در معادله $\underbrace{u_t - u_{xx}}_{c^2=1} = 0$ صدق می‌کند؛ کدام است؟ (۸۲)

۱) $\sin x \cos t$ ✗

۲) $e^{-\pi t}\sin x$

۳) $e^{-t}\sin x$

۴) $e^{-\frac{t}{\pi}}\sin x$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

پایه $\sin nx$

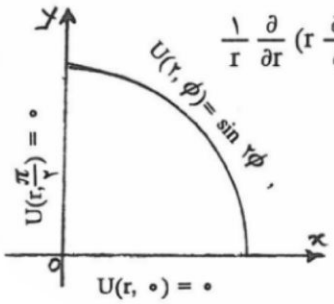
$u(x,t) = e^{-t}\sin x$

---

پتانسیل الکتریکی در داخل ربع دایره‌ای با شرایط مرزی داده شده در معادلهٔ زیر صدق می‌کند (در مختصات قطبی r و $\phi$):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

عبارت پتانسیل، $u(r,\phi)$ کدام است؟ (۸۲)




۱) $2r\sin 2\phi$ ✗

۲) $\frac{r^2}{2}\sin 2\phi$ ✗

۳) $\frac{r}{2}\sin\phi$ ✗

۴) $\frac{r^2}{4}\sin 2\phi$ ✓

$u(r,0) = u(r,\frac{\pi}{2}) = 0$

$L = \frac{\pi}{2}$

پایه $\sin\frac{n\pi\varphi}{\frac{\pi}{2}}$

$\sin 2n\varphi$

---

جواب مسئله مقدار مرزی زیر با شرایط داده شده، کدام است؟ (۸۲)

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y} = x^2 y$$

$$u(x,0) = x^2$$

$$u(1,y) = \cos y$$

۱) $\frac{x^2y^3}{6} + \cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - 1$ ✗

۲) $\frac{x^3y^2}{6} + 2\cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - 2$ ✗

۳) $\frac{x^3y^2}{6} + x\cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - x$ ✗

۴) $\frac{x^3y^2}{6} + \cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - 1$

$u = \frac{x^3y^2}{6} + F(x) + G(y)$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

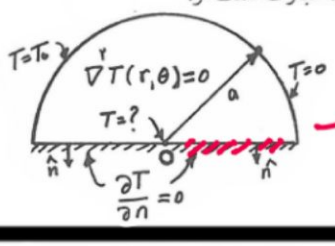
## جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

پاسخ حالت پایدار درجهٔ حرارت، $T(r,\theta)$، در معادله لاپلاس، $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}=0$ صدق می‌کند. حل مسأله در ناحیه نیم دایره‌ای به شعاع a مورد نظر است. شرایط مرزی روی قوس نیم دایره عبارتند از: (۸۳)

$$\begin{cases} T(a,\theta)=0, & 0<\theta<\frac{\pi}{4} \\ T(a,\theta)=T_0, & \frac{\pi}{4}<\theta<\pi \end{cases}$$

و روی قطر داریم $\frac{\partial T}{\partial n}=0$. درجهٔ حرارت در مرکز نیم دایره، O، عبارت است از:




$T_\theta(r,0)=T_\theta(r,\pi)=0$

$\cos n\theta$

۱) $0$

۲) $T_0$

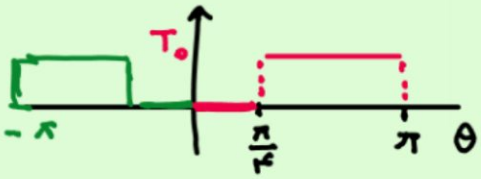
۳) $\frac{T_0}{2}$

۴) $\frac{3T_0}{4}$

### پاسخ هوشمندانه

$$u(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n\cos n\theta$$

$$u(0,\theta)=a_0=\frac{3T_0}{4}$$




مسئله مقدار مرزی دیریشله در ناحیه بین دو دایره هم مرکز، به شعاع‌های a و b (a<b)، و با شرایط مرزی ثابت

$$\begin{cases} \nabla^2 T=T_{rr}+\frac{1}{r}T_r+\frac{1}{r^2}T_{\theta\theta}=0, & a<r<b \\ T(a,\theta)=A, \quad T(b,\theta)=B, & 0\le\theta<2\pi \end{cases}$$

(A,B ثابت اند)

$T_{rr}+\frac{1}{r}T_r=0\rightarrow\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$

$r\frac{\partial T}{\partial r}=k_1$

داده شده است. جواب مسئله، $T(r,\theta)$، کدام است؟ (۸۴)

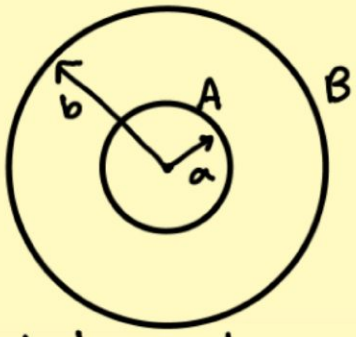
$$\begin{cases} A+(r-a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\theta), & a\le r\le\frac{1}{2}(a+b) \\ B+(b-r)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\theta), & \frac{a+b}{2}<r\le b \end{cases}$$

۱) $\frac{ab(A-B)}{b-a}\frac{1}{r}+\frac{bB-aA}{b-a}$ ✗

۲) $\frac{A-B}{a-b}r+\frac{Ba-Ab}{a-b}$ ✗

۳) $\frac{A-B}{\ln a-\ln b}\ln r+\frac{B\ln a-A\ln b}{\ln a-\ln b}$ ✓

۴) ✗




$T=k_1\ln r+k_2$

پاسخ کامل معادلهٔ دیفرانسیل $\text{ctg}x\frac{\partial u}{\partial y}+u=y$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟ (۸۵)

(u تابعی از y و x است)

۱) $f(x)e^{-y\text{tg}x}+y-\text{cotg}x$

۲) $g(y)e^{-y\text{tg}x}+y-\text{cotg}x$ ✗

۳) $c_1e^{-y\text{tg}x}+y-\text{cotg}x$ ✗

۴) $f(x)e^{-y\text{tg}x}+g(y)-\text{cotg}x$ ✗

معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی $(x-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2(y+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(x+1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ را در نظر می‌گیریم. این معادله در نیم صفحه‌ی بالای محور x ($y>0$) از کدام نوع است؟ (۸۵)

A B C

۱) بیضی گون

۲) سهمی گون

۳) هذلولی گون

۴) در بخشی بیضی گونه و در بخشی هذلولی گون

$\Delta=B^2-4AC$

$=4\left[y^2+2y+\cancel{1}+x^2-\cancel{1}\right]$

$>0 \quad >0 \quad >0$

$\Delta>0 \rightsquigarrow$ هذلولی گون

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

در یک ناحیهٔ نیمه محدود $(x > 0)$ معادلهٔ حرارت به صورت $\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $x > 0 , t > 0$ در نظر می‌گیریم. حالت اولیه عبارت است از $u(x, 0) = f(x)$ و ناحیه در $x = 0$ عایق شده است. پاسخ عمومی معادله، $u(x, t)$، به کدام صورت است؟ (۸۵)

$u_x(0,t) = 0 \rightarrow \cos px$

۱) $\int_0^\infty D(p)e^{-p^2c^2t}\sin(px)\,dp$ ✗

۲) $\int_0^\infty D(p)e^{-p^2c^2t}\cos(px)\,dp$ ✓

۳) $\int_{-\infty}^\infty e^{-p^2c^2t}[A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)]dp$ ✗

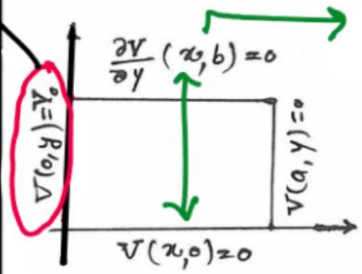
۴) $\int_0^\infty e^{-p^2c^2t}[A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)]dp$ ✗

### پاسخ هوشمندانه

$$u(x,y) = \int_0^\infty D(p)e^{-c^2p^2t}\cos px\,dp$$

---

اگر بخواهیم توزیع پتانسیل را در داخل شکل زیر به دست آوریم، کدام یک از جواب‌های زیر می‌تواند مناسب باشد؟ (۸۵)




$\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b} = \sin k_n y$ یا $k_n$

۱) $\sum A_n \cosh k_n x \sin k_n y$ ✗

۲) $\sum A_n \cosh k_n x \cos k_n y$ ✗

۳) $\sum (A_n \cosh k_n x + B_n \sinh k_n x)\cos k_n y$ ✗

۴) $\sum (A_n \cosh k_n x + B_n \sinh k_n x)\sin k_n y$

### شرط مرزی غیر صفر تابع از y

جواب برحسب y مشتق

$$u(x,y) = \sum \sinh k_n(x-a)\sin k_n y$$

$$= \sum (A_n \operatorname{ch} k_n x + B_n \operatorname{sh} k_n x)\sin k_n y$$

---

معادلهٔ غیرهمگن حرارت در امتداد میله‌ای به طول l به شکل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 1$ ، $t > 0$ ، $0 < x < l$ است. شرایط مرزی و اولیه عبارتند از:

$u(x,0) = f(x)$ ، $u(0,t) = u(l,t) = 0$ در این صورت پاسخ $u(\frac{l}{3}, t)$ در حالت پایدار $(t \to \infty)$ برابر است با: (۸۶)

$0 = \frac{\partial u}{\partial t}$

۱) $\frac{2l^2}{3}$

۲) $\frac{l^2}{9}$

۳) $-\frac{l^2}{9}$

۴) $-\frac{l^2}{3}$

$k_2 = 0$

$k_1 = -\frac{L}{2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$$

$$u = \frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2$$

$$u = \frac{x^2}{2} - \frac{L}{2}x = \frac{x}{2}(x - L)$$

$$x = \frac{L}{2} \rightarrow u = -\frac{L^2}{9}$$

---

معادله دیفرانسیل زیر با شرایط داده شده مفروض است:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin\frac{x}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \; ; \; (0 < x < \pi) \\ u(0,t) = 3 \; ; \; u(\pi, t) = 1 \\ u(x,0) = 1 \; ; \; u_t(x,0) = x \end{cases}$$

با فرض $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$ عبارت $v(x)$ کدام گزینه باشد تا معادله حاکم بر $w(x,t)$ از نوع همگن و با شرایط مرزی صفر باشد؟ (۸۶)

۱) $-4\sin\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi}x + 3$ ✓

۲) $-4\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\pi}x + 2$

۳) $-\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\pi}x + 3$

۴) $-4\sin\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}x + 4$

$$v'' = \sin\frac{x}{2}$$

$$v = -4\sin\frac{x}{2} + k_1 x + k_2$$

$x = 0 \rightarrow v = 3 \rightarrow k_2 = 3$

$x = \pi \rightarrow v = 1 \rightarrow k_1 = \frac{2}{\pi}$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

| پاسخ هوشمندانه | سؤالات کنکور سالهای گذشته |
|---|---|
| $\cos\theta = P_1(\cos\theta)$ | معادله لاپلاس با یک درجه تقارن در مختصات کروی $(0 \le \theta \le \pi \ , \ r \ge 0 \ , \ 0 \le \phi \le 2\pi)$ برای $u(r,t)$ جوابی به صورت زیر دارد: $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$ که در آن $P_n(x)$ چندجمله‌ای لژاندر می‌باشند. اگر شرایط مرزی به‌صورت $\begin{cases} u(a,\theta)=0 \\ u(r,\theta)\simeq r\cos\theta \ , \ r\to\infty \end{cases}$ باشد، $u(r,\theta)$ برای خارج کره کدام گزینه است؟ (۸۶)<br>۱) $(r^{-1}-a^3r^2)P_1(\cos\theta)$ ✗<br>۲) $(1-a^2r^{-1})P_0(\cos\theta)$ ✗<br>۳) $(r-a^2r^{-1})P_1(\cos\theta)$ ✗<br>۴) $(r-a^3r^{-2})P_1(\cos\theta)$ |
| $u(x,t)=4e^{-\pi^2 t}\cos\pi x - 2e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x$ | جواب مسأله مقدار مرزی زیر کدام است؟<br>$u_t = u_{xx}, \ t>0, \ 0<u<2$ ($c^2=1$)<br>$u_x(0,t)=0, \ u_x(2,t)=0$ ($L=2$) (۸۷) $\to \cos\frac{n\pi x}{2}$ $n=0,1,2,\dots$<br>$u(x,0)=4\cos\pi x - 2\cos 3\pi x$ → پایدار<br>۱) $4e^{-\pi^2 t}\cos\pi x - e^{-4\pi^2 t}\cos 2\pi x + \frac{1}{4}e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x$ ✗<br>۲) $4e^{-\pi^2 t}\cos\pi x - 2e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x$<br>۳) $e^{-\pi^2 t}(4\cos\pi x - 2\cos 3\pi x)$ ✗<br>۴) $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-(n\pi)^2 t}\cos n\pi x$ ✗ |
| $v_{tt} - x\sin t - v_{xx} = h$<br>$v_{tt} - v_{xx} = h + x\sin t$<br>$v(0,t)=0$<br>$v_t(x,0)=-1$ | با تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+t+(\sin t - t)x$ مسئله<br>$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=h \ (\text{ثابت } h), & 0<x<1, \ t>0 \\ u(0,t)=t, & u(1,t)=\sin t \\ u(x,0)=x(1-x) \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$<br>$u_t(x,0)=v_t(x,0)+1$<br>به کدام مسئله تبدیل می‌شود؟ (۸۷)<br>۱) $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=h-x\sin t, & 0<x<1, \ t>0 \\ v(0,t)=v(1,t)=0, & v(x,0)=x(1-x) \\ v_t(x,0)=-1 \end{cases}$ ✗<br>۲) $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=h+x\sin t, & 0<x<1, \ t>0 \\ v(0,t)=v(1,t)=0, & v(x,0)=x(1-x) \\ v_t(x,0)=1 \end{cases}$<br>۳) $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=h-x\sin t, & 0<x<1, \ t>0 \\ v(0,t)=v(1,t)=0, & v(x,0)=x(1-x) \\ v_t(x,0)=1 \end{cases}$ ✗<br>۴) $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=h+x\sin t, & 0<x<1, \ t>0 \\ v(0,t)=v(1,t)=0, & v(x,0)=x(1-x) \\ v_t(x,0)=-1 \end{cases}$ |
| $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1 \to$<br>$u=\frac{x^2}{2}+k_1x+k_2$<br>$x=0\to u=0\to k_2=0$<br>$x=1\to u=0\to k_1=-\frac{1}{2}$<br>$u=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}(x-1)$ | معادله‌ی غیرهمگن یک بعدی حرارت در ناحیه $0<x<1$ و برای $t>0$ به صورت زیر است:<br>$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=1 \ ; \ 0<x<1 \ , \ t>0$<br>شرایط مرزی و اولیه عبارت‌اند از:<br>$u(0,t)=u(1,t)=0$<br>$u(x,0)=f(x)$<br>$\frac{\partial u}{\partial t}=0$<br>در این صورت پاسخ حالت پایدار $(t\to\infty)$ در $x=\frac{1}{2}$ برابر کدام است؟ (۸۸)<br>۱) $-\frac{1}{4}$<br>۲) $-\frac{1}{8}$ ✓<br>۳) $-\frac{1}{2}$<br>۴) $\frac{1}{4}$ |

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

معادله $u_{xx}-u_{yy}=0$ با کدام تغییر متغیرهای زیر به معادله $u_{rs}=0$ تبدیل می‌شود؟ (۸۸)

$A=1$, $B=0$, $C=-1$

۱) $r=y-x$, $s=y$

۲) $r=x+y$, $s=x$

$s=y-x$

۳) $r=y-x^3$, $s=y+x^3$

۴) $r=x+y$, $s=y-x$ ✓

$r=y+x$

## پاسخ هوشمندانه

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}$$

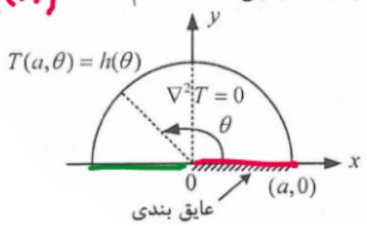
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm 2}{2}=\pm 1$$

$$\frac{dy}{dx}=1 \rightsquigarrow y=x+c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=-1 \rightsquigarrow y=-x+c_2$$

---

در مسئله مقدار مرزی زیر درداخل یک نیم‌دایره به شعاع $a$ حل معادله لاپلاس $\nabla^2 T=0$ مورد نظر است. بر پیرامون نیم‌دایره، $T(a,\theta)=h(\theta)$ , $0\le\theta\le\pi$ تکه‌ای هموار فرض می‌شود. بر روی نیمه راست قطر عایق‌بندی داریم و بر روی نیمه چپ آن $T(r,\pi)=0$. پایه (مبنای) متعامد بسط فوریه تابع $h(\theta)$ در این مسئله کدام است؟ (۸۸)




۱) $\{\cos k\theta\}_{k=0}^{\infty}$

۲) $\left\{\cos\left(\frac{2k-1}{2}\right)\theta\right\}_{k\in Z}$

۳) $\left\{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta\right\}_{k\in N}$ ✓

۴) $\left\{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta\right\}_{k\in N}$

$$T_\theta(r,0)=0=T(r,\pi)$$

$$\cos\left[\frac{(2k-1)2\pi\theta}{4\pi}\right]$$

$$\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta\right] \quad k\in N$$

---

اگر جواب معادله به صورت

$$\begin{cases} u_t-c^2u_{xx}=0, & 0<x<L,\ t>0\\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le L\\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t\ge 0\end{cases}$$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ باشد، مقدار u(x,t) درحالتی که $f(x)=\sin^3 x$ و $L=\pi$ باشد، کدام است؟ (۸۹)

$\sin nx$

۱) $\frac{3}{4}e^{-c^2t}+\frac{1}{4}e^{-8c^2t}\sin 3x$

۲) $\frac{1}{4}e^{-c^2t}\sin x+\frac{1}{4}e^{-8c^2t}\sin 3x$

۳) $\frac{1}{4}e^{-c^2t}\sin x-\frac{1}{4}e^{-8c^2t}\sin 3x$

۴) $\frac{3}{4}e^{-c^2t}\sin x-\frac{1}{4}e^{-8c^2t}\sin 3x$

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

$$\frac{3}{4}e^{-c^2t}\sin x-\frac{1}{4}e^{-9c^2t}\sin 3x$$

---

جواب مسئله ($u_0$ و h ثابت)

$$u_t-c^2u_{xx}+hu=hu_0\ ;\ -\pi<x<\pi\ ,\ t>0$$

$$u(x,0)=f(x)$$

$$u(-\pi,t)=u(\pi,t)\ ;\ t\ge 0$$

$$u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t)\ ;\ t\ge 0$$

$T=2\pi$

پایه $\frac{1}{2}$ , $\cos\frac{2\pi nx}{2\pi}$ , $\sin\frac{2\pi nx}{2\pi}$

به کدام صورت است؟ (۸۹)

۱) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin nx$ ✗

۲) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(t)(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$ ✓

۳) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\cos nx$ ✗

۴) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$ ✗

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

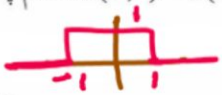
## جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

پاسخ معادله لاپلاس، $\nabla^2 u(x,y)=0$ در نیم صفحه بالای محور x با شرط مرزی:

$-\infty<x<\infty \quad 0<y<\infty$

$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1 & ,\ |x|<1\\ 0 & ,\ |x|>1\end{cases}$، کدام پاسخ می‌تواند باشد؟ (۸۹)



۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos k}{k} e^{-ky}\sin kx\,dk$ ✗

۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin k}{k} e^{-ky}\cosh kx\,dk$ ✗

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin k}{k} e^{-ky}\cos kx\,dk$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sinh k}{k} e^{-ky}\cos kx\,dk$ ✗

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\sin k}{k} e^{-ky}\cos kx\,dk$$

---

در مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0\ ,\ \forall t>0\ ,\ -\infty<x<\infty \\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases} g_0 & ,\ x_1<x<x_2 \\ 0 & ,\ x\text{های دیگر}\end{cases}\end{cases}$$

اگر جواب به‌صورت $u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds=G(x+at)-G(x-at)$ باشد، آنگاه تابع $G(x)$ کدام است؟ (۹۰)

۱) $\begin{cases}0 & ,\ x\le x_1\\ \frac{1}{2a}(x-x_1)g_0 & ,\ x_1\le x\le x_2\\ \frac{1}{2a}(x_2-x_1)g_0 & ,\ x>x_2\end{cases}$ ✓

۲) $\begin{cases}0 & ,\ x\le x_1\\ \frac{1}{a}(x-x_1)g_0 & ,\ x_1\le x\le x_2\\ \frac{1}{a}(x_2-x_1)g_0 & ,\ x>x_2\end{cases}$

۳) $\begin{cases}0 & ,\ x\le x_1\\ \frac{1}{2a}(x-x_1)g_0 & ,\ x_1<x<x_2\\ 0 & ,\ x>x_2\end{cases}$

۴) تابع $G(x)$ پیوسته موجود نیست

$$G=\frac{1}{2a}\int g$$


$$=\begin{cases}0 & x<x_1\\ \frac{1}{2a}g_0(x-x_1) & x_1<x<x_2\\ \frac{1}{2a}g_0(x_2-x_1) & x>x_2\end{cases}$$

---

برای میله‌ای به طول L که سطح جانبی و دو سر آن کاملاً عایق است، و $u(x,0)=f(x)$، و $u_t=c^2u_{xx}$ کدام گزینه برای $u(x,t)$ صحیح است؟ (۹۰)

۱) $A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(\frac{nc\pi}{L})^2 t}\cos(\frac{n\pi x}{L})$ ✓

۲) $A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t}\cos(\frac{n\pi x}{L})$ ✗

۳) $A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(\frac{n\pi c}{L})^2 t}\cos(\frac{n\pi x}{2L})$ ✗

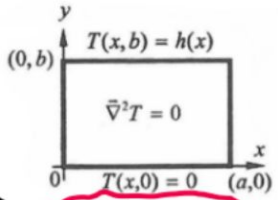
۴) $A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{(\frac{n\pi c}{L})^2 t}\cos(\frac{n\pi x}{L})$ ✗

$$u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$$

$$\cos\frac{n\pi x}{L} \qquad n=0,1,2,\dots$$

---

برای حل مسئله مقدار مرزی معادله دیفرانسیل لاپلاس در داخل مستطیل با شرایط مرزی داده شده طبق شکل، تابع تکه‌ای هموار معلوم (مفروض) h برحسب کدام پایه متعامد باید بسط داده شود؟ (۹۰)




$T(0,y)=T(a,y)$
$T_x(0,y)=T_x(a,y)$

$T=a$

۱) $\frac{1}{2},\sin\frac{2\pi x}{a},\cos\frac{2\pi x}{a},\sin\frac{4\pi x}{a},\cos\frac{4\pi x}{a},\dots,\sin\frac{2n\pi x}{a},\cos\frac{2n\pi x}{a},\dots$ ✓

۲) $\frac{1}{2},\sin\frac{\pi x}{a},\cos\frac{\pi x}{a},\sin\frac{2\pi x}{a},\cos\frac{2\pi x}{a},\dots,\sin\frac{n\pi x}{a},\cos\frac{n\pi x}{a},\dots$

۳) $\frac{1}{2},\cos\frac{2\pi x}{a},\cos\frac{4\pi x}{a},\dots,\cos\frac{2n\pi x}{a},\dots$

۴) $\frac{1}{2},\cos\frac{\pi x}{a},\cos\frac{2\pi x}{a},\dots,\cos\frac{n\pi x}{a},\dots$

$$\frac{1}{2},\cos\frac{2\pi nx}{a},\sin\frac{2\pi nx}{a}$$

تناوبی

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

## پاسخ هوشمندانه

معادلهٔ موج برای یک تار در حال ارتعاش به‌صورت زیر است: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$

اگر در مدل‌سازی مسأله از نیروی وزن تار و نیز اصطکاک هوا چشم‌پوشی نشود؛ کدام عبارت داده شده در مورد معادله درست است؟ (۹۱)

۱) معادله ناهمگن می‌شود و جمله $\frac{\partial u}{\partial t}$ در معادله ظاهر می‌شود. ✓

۲) فقط جمله $\frac{\partial u}{\partial t}$ در معادله ظاهر می‌شود.

۳) معادله ناهمگن می‌شود و جمله $\frac{\partial u}{\partial x}$ در معادله ظاهر می‌شود.

۴) فقط معادله ناهمگن می‌شود.

---

جواب معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad 0\le x\le \pi \qquad y\ge 0$$

$$u(0,y)=0 \qquad u(\pi,y)=0$$

$$u(x,0)=\sin 2x\left(1-2\cos 2x\right) = \sin 2x - \sin 4x$$

که در آن $u(x,y)$ تابعی کراندار است، کدام گزینه است؟ (۹۱)

۱) $e^{-2y}\sin 2x\left(1-2\cos 2x\right)$ ✗

۲) $e^{-y}\sin 2x\left(1-2e^{-y}\cos 2x\right)$ ✗

۳) $e^{-2y}\sin 2x\left(1-2e^{-2y}\cos 2x\right)$ ✓

۴) $e^{-\frac{1}{2}y}\sin 2x\left(1-2e^{-\frac{1}{2}y}\cos 2x\right)$ ✗

$$e^{-2y}\sin 2x - e^{-4y}\sin 4x$$

$$e^{-2y}\sin 2x\left[1-2e^{-2y}\cos 2x\right]$$

---

پاسخ معادلهٔ لاپلاس: $\nabla^2 V(x,y)=0$ در بالای محور افقی (نیم‌صفحهٔ بالا؛ $y>0$) از صفحهٔ xoy با شرایط مرزی زیر مورد نظر است:

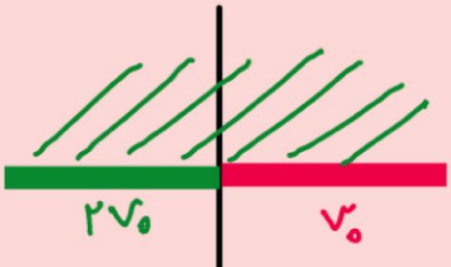
$$V(x,0)=\begin{cases} V_0 \ (\text{ثابت}) & ;x>0 \\ 2V_0 & ;x<0 \end{cases}$$

$$V = k_1\theta + k_2$$

اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ (۱،۱) و $(1,\sqrt{3})$ برابر است با: (۹۱)

$$\theta=\frac{\pi}{3} \qquad \theta=\frac{\pi}{4}$$

۱) $\frac{V_0}{12}$ ۲) $\frac{V_0}{4}$ ۳) $\frac{V_0}{6}$ ۴) $\frac{V_0}{3}$




$$V=\frac{V_0}{\pi}\theta+V_0$$

$$\Delta V=\frac{V_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{V_0}{12}$$

---

درجه حرارت $u(x,t)$ میله‌ای به طول $\pi$ که دو طرف آن، در مخلوط آب و یخ قرار گرفته و دمای اولیهٔ آن $u(x,0)=\sin x$ است، و در معادلهٔ $u_t-u_{xx}=0$ صدق می‌کند، کدام است؟ (۹۲)

$c^2=1$

۱) $e^{-t}\sin 2x$ ✗ ۲) $e^{-t}\sin x$ ۳) $e^{t}\sin x$ ✗ ۴) $e^{2t}\sin x$ ✗

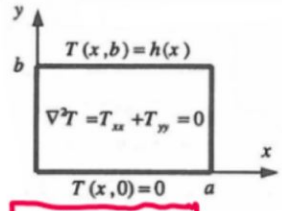
$$e^{-t}\sin x$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

## سؤالات کنکور سالهای گذشته

پایهٔ متعامد مورد نیاز برای استفاده در حل مسئله مقدار مرزی داده شده از طریق جداسازی متغیرها، کدام است؟ ( $h(x)$ تابعی تکه‌ای هموار و معلوم است) (۹۲)




شرایط مرزی روی دو ضلع راست و چپ: $T(0,y)=T(a,y)$ ، $T_x(0,y)=T_x(a,y)$

۱) $\frac{1}{2},\sin\frac{2\pi x}{a},\cos\frac{2\pi x}{a},\dots,\sin\frac{2n\pi x}{a},\cos\frac{2n\pi x}{a},\dots$ ✓

۲) $\frac{1}{2},\sin\frac{\pi x}{a},\cos\frac{\pi x}{a},\dots,\sin\frac{n\pi x}{a},\cos\frac{n\pi x}{a},\dots$

۳) $\frac{1}{2},\sin\frac{\pi x}{a},\cos\frac{\pi x}{a},\dots,\sin\frac{(2n-1)\pi x}{a},\cos\frac{(2n-1)\pi x}{a},\dots$

۴) $\sin\frac{2\pi x}{a},\cos\frac{2\pi x}{a},\dots,\sin\frac{2n\pi x}{a},\cos\frac{2n\pi x}{a},\dots$

$\frac{1}{2},\cos\frac{2\pi n x}{a},\sin\frac{2\pi n x}{a}$

---

در مسأله مقدار مرزی

$$\begin{cases} y''+\gamma y=0 \quad ,\gamma>0 \\ y(0)=0\ ,\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

مقادیر ویژه در کدام معادله صدق می‌کند؟ (۹۳)

۱) $\tan\sqrt{\gamma}-\sqrt{\gamma}=0$ ✗

۲) $\tan\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma}=0$ ✓

۳) $\cot\sqrt{\gamma}-\sqrt{\gamma}=0$ ✗

۴) $\cot\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma}=0$ ✗

$y=\sin\sqrt{\gamma}x$

$y(1)+y'(1)=0$

$\sin\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma}\cos\sqrt{\gamma}=0$

$\tan\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma}=0$

---

در مسأله مقدار اولیه مرزی موج یک بعدی زیر، که در آن $h(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته است،

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0\ ,\ 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=h(x)\ ,\ 0\le x\le 1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0\ ,\ t>0 \end{cases}$$

$\sin n\pi x$

مقدار $u(\frac{1}{3},\frac{13}{a})$ کدام است؟ (۹۳)

۱) $-1$

۲) $0$ ✓

۳) $1$

۴) نمی‌توان گفت چون تابع $h(x)$ مقدارش داده نشده

$u(x,t)=\sum B_n \sin an\pi t \sin n\pi x$

$u(\frac{1}{3},\frac{13}{a})=\sum B_n \underbrace{\sin 13n\pi}_{0} \sin\frac{n\pi}{3}$

---

مسأله مقدار مرزی زیر در داخل یک نیم دایره به مرکز O و به شعاع a و با یک قطر واقع بر محور x را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \nabla^2T=T_{rr}+\frac{1}{r}T_r+\frac{1}{r^2}T_{\theta\theta}=0\ ,0<r<a \\ T_\theta(r,0)=0\ ,\ T(r,\pi)=0\ ,0\le r\le a \\ T(a,\theta)=h(\theta)\ \text{تکه‌ای هموار داده شده}\ ,\ 0\le\theta\le\pi \end{cases}$$

پایهٔ متعامد بسط فوریه تابع h مفروض کدام است؟ (۹۳)

۱) $\left\{\cos(\frac{2k-1}{2}\theta)\right\}_{k=1}^{\infty}$ ✓

۲) $\{\cos(k\theta)\}_{k=1}^{\infty}$

۳) $\left\{\frac{1}{2},\cos\theta,\cos2\theta,\cos3\theta,\dots,\cos n\theta,\dots\right\}$

۴) $\left\{\frac{1}{2},\cos\frac{\theta}{2},\cos\frac{3\theta}{2},\cos\frac{5\theta}{2},\dots,\cos\frac{2n-1}{2}\theta,\dots\right\}$

$L=\pi$

$T_\theta(r,0)=0\ ,\ T(r,\pi)=0$

$\cos\left[\frac{(2k-1)2\pi\theta}{4\pi}\right]_{k=1}^{\infty}$

## پاسخ هوشمندانه

# جلسه ۳

## معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

### سؤالات کنکور سالهای گذشته

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

در مسأله مقدار اولیه مرزی

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin^3(\pi x), & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t) = 0 = u(1,t), & t>0 \quad \text{شرایط مرزی} \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 & \text{شرایط اولیه} \end{cases}$$

$u_{tt} = 0$

جوابی مستقل از زمان از معادله دیفرانسیل که در شرایط مرزی نیز صدق کند، کدام است؟ (۹۴)

۱) $\frac{2}{3\pi^3}\sin(\pi x) + \frac{1}{9\pi^3}\sin^3(\pi x)$ ✗

۲) $\frac{2}{\pi^3}\sin(\pi x) + \frac{1}{3\pi^3}\sin^3(\pi x)$ ✗

۳) $\frac{2}{3\pi^3}\sin(\pi x) + \frac{1}{9\pi^3}\sin^3(\pi x)$ ✓

۴) $x(1-x) + \frac{2}{3\pi^3}\sin(\pi x) + \frac{1}{9\pi^3}\sin^3(\pi x)$ ✗

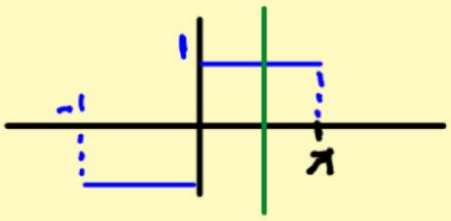
### پاسخ هوشمندانه

$u_{xx} = -\sin^3(\pi x)$

$u_{xx} = -\frac{3}{4}\sin\pi x + \frac{1}{4}\sin 3\pi x$

$u = \frac{3}{4\pi^2}\sin\pi x - \frac{1}{36\pi^2}\sin 3\pi x$

$3\sin\pi x - 4\sin\pi x$




جواب معادله با مشتقات جزئی زیر، با شرایط اولیه مرزی داده شده، کدام است؟ (۹۴)

$$\begin{cases} u_{xx} = t u_t, & 0<x<\pi,\ t>1 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 1 \\ u(x,1) = 1, & 0<x<\pi \end{cases}$$

پایه $= \sin nx$

همگرایش زود

۱) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{k\pi} t^{-k^2} \sin kx$ ✗

۲) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{k\pi} e^{-k^2 t} \sin kx$ ✗

۳) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)x$ ✗

۴) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} t^{-(2k+1)^2} \sin(2k+1)x$

می دانیم پاسخ معادلهٔ حرارت به صورت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l,\ t>0$$

با شرایط مرزی $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ , $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + h u(l,t) = 0$ به شکل زیر است:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-k_n^2 c^2 t} \cos(k_n x)$$

در این صورت $k_n$ها در کدام معادله زیر صدق می‌کنند؟ (۹۴)

۱) $k_n \tan k_n l = -h$

۲) $k_n \cot k_n l = -h$

۳) $k_n \cot k_n l = h$

۴) $k_n \tan k_n l = h$ ✓

$u = \Phi(t)\cos(k_n x)$

$-k_n \Phi(t)\sin(k_n L) + h\Phi(t)\cos(k_n L) = 0$

$h\cos(k_n L) = k_n \sin(k_n L)$

$h = k_n \tan(k_n L)$

تابع $f(x,t)$ در هر لحظه $t$ای نسبت به متغیر $x$، تکه‌ای هموار بوده و قابل نمایش به صورت یک سری فوریه با ضرایب پیوستهٔ $f_n(t)$، نسبت به پایهٔ متعامد مورد نیاز مسئلهٔ مقدار اولیه ـ مرزی زیر است.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0<x<L,\ t>0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = 0 = u(L,t), & t>0 \end{cases}$$

پایه $\sin\frac{n\pi x}{L}$

اگر $u(x,t) = \int_0^t \int_0^L G(x,z,t-\tau) f(z,\tau)\,dz\,d\tau$، جواب مسئلهٔ مقدار اولیه ـ مرزی باشد، تابع G کدام است؟ (۹۵)

۱) $\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{L}a(t-\tau)(\sin\frac{n\pi x}{L})(\sin\frac{n\pi z}{L})$

۲) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{L}a(t-\tau)(\sin\frac{n\pi x}{L})(\sin\frac{n\pi z}{L})$

۳) $\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}a(t-\tau)(\sin\frac{2n\pi x}{L})(\sin\frac{2n\pi z}{L})$ ✗

۴) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}a(t-\tau)(\sin\frac{2n\pi x}{L})(\sin\frac{2n\pi z}{L})$ ✗

$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$

$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$

$f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n''(t) + a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n(t) = f_n(t)$$

$$s^2 B_n + a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B_n = F_n(s)$$

$$B_n = \frac{F_n(s)}{s^2 + a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} = F_n(s)\,\frac{1}{s^2 + a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

$$b_n(t) = f_n(t) * \frac{L}{n\pi a}\sin\frac{an\pi}{L}t$$

$$= \int_0^t f_n(\tau)\,\frac{L}{n\pi a}\sin\frac{an\pi}{L}(t-\tau)\,d\tau$$

$$f_n(\tau) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi a}\int_0^t\int_0^L f(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{an\pi}{L}(t-\tau)\,dx\,d\tau$$

# معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

## جلسه ۳

| پاسخ هوشمندانه | سؤالات کنکور سالهای گذشته |
|---|---|
| $h(x,t)=\sum A_n(t)\sin nx$<br>$A_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x,t)\sin nx\,dx$ | برای حل معادلهٔ ناهمگن حرارت $u_t=u_{xx}+h(x,t)$، $0<x<\pi$، $t>0$ با شرایط مرزی $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ که در آن تابع h تکه‌ای هموار است، اگر $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin(nx)$ اختیار شود، که در آن $u_n(t)$ از معادلهٔ دیفرانسیل $u_n'(t)+n^2u_n=A_n(t)$ به دست می‌آید، عبارت $A_n(t)$ کدام است؟ (۹۵)<br>$\sin nx$<br>۱) $\int_0^{\pi} h(x,t)\sin nx\,dx$ ۲) $\pi\int_0^{\pi} h(x,t)\sin nx\,dx$<br>۳) $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} h(x,t)\sin nx\,dx$ ۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x,t)\sin nx\,dx$ ✓ |
| | $u_n'(t)=-n^2u_n(t)+A_n(t)$<br>$u_n'(t)+n^2u_n(t)=A_n(t)$ |
| | |
| | |