جلسه ۴ — اعداد مختلط ـ توابع مختلط

$z = x + iy = re^{i\theta}$ $\quad i = \sqrt{-1}$	$\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$
$r = \lvert z \rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$	$\theta = Arg(z) = \frac{1}{2i} Ln \frac{z}{\bar{z}} = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$
$x = Re\{z\} = \frac{z+\bar{z}}{2}$	$y = Im\{z\} = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
$x_1x_2 + y_1y_2 = z_1 \cdot z_2 = Re\{z_1\bar{z}_2\} = Re\{\bar{z}_1 z_2\}$	$x_1x_2 - y_1y_2 = Re\{z_1 z_2\} = Re\{\bar{z}_1 \bar{z}_2\}$
$x_1y_2 - x_2y_1 = Im\{\bar{z}_1 z_2\}$	$x_2y_1 - x_1y_2 = Im\{z_1\bar{z}_2\}$
$x_1y_2 + x_2y_1 = Im\{z_1 z_2\}$	$\cos(\theta_2-\theta_1) = \frac{Re\{z_1\bar{z}_2\}}{\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
$\lvert \sin(\theta_2-\theta_1)\rvert = \left\lvert \frac{Im(\bar{z}_1 z_2)}{\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert}\right\rvert = \left\lvert \frac{x_1y_2-x_2y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right\rvert$	$\lvert z_1+z_2\rvert^2 = \lvert z_1\rvert^2 + \lvert z_2\rvert^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2)$
$\lvert z_1-z_2\rvert^2 = \lvert z_1\rvert^2 + \lvert z_2\rvert^2 - 2Re(z_1\bar{z}_2)$	$\lvert\lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert\rvert \le \lvert z_1 \mp z_2\rvert \le \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
$(x+iy)^n = (re^{i\theta})^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$	$\sqrt[n]{x+iy} = \sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right\}$
$z_1^{z_2} = e^{z_2 Ln(z_1)}$	$\lvert a^{if(x,y)}\rvert = 1$ با فرض اینکه a یک عدد ثابت حقیقی و $f(x,y)$ نیز یک تابع حقیقی باشد.

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad \bar{z}_1 = x_1 - iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\bar{z}_1 z_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + i\left[x_1y_2 - x_2y_1\right]$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = Re\{\bar{z}_1 z_2\} = Re\{z_1 \bar{z}_2\}$$

$$+x_1y_2 - x_2y_1 = Im\{\bar{z}_1 z_2\}$$

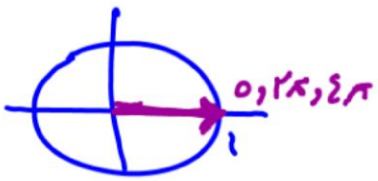
$$+x_2y_1 - x_1y_2 = Im\{z_1 \bar{z}_2\}$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re\{z_1 \bar{z}_2\}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Re\{z_1 \bar{z}_2\}$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$\sqrt[n]{x + iy} = \sqrt[n]{r e^{i\theta} \times 1} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$



$$1 = 1e^{i2k\pi}$$

مقدار اصلی

$(1+i)^{1-i}$ کدام است؟

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1}$$

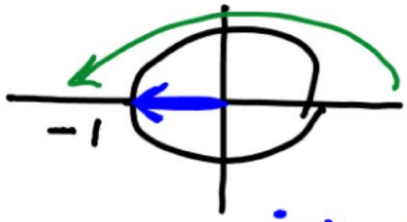
$$\downarrow$$

$$e^{(1-i)\operatorname{Ln}(1+i)}$$

$$e^{(1-i)\operatorname{Ln}(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})} = e^{(1-i)\left[\operatorname{Ln}\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right]} = \cdots$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$1 = 1e^{i2k\pi}$$

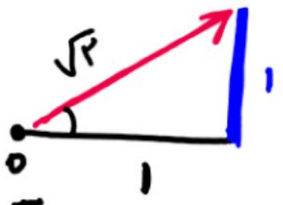


$$-1 = 1e^{i(2k+1)\pi}$$

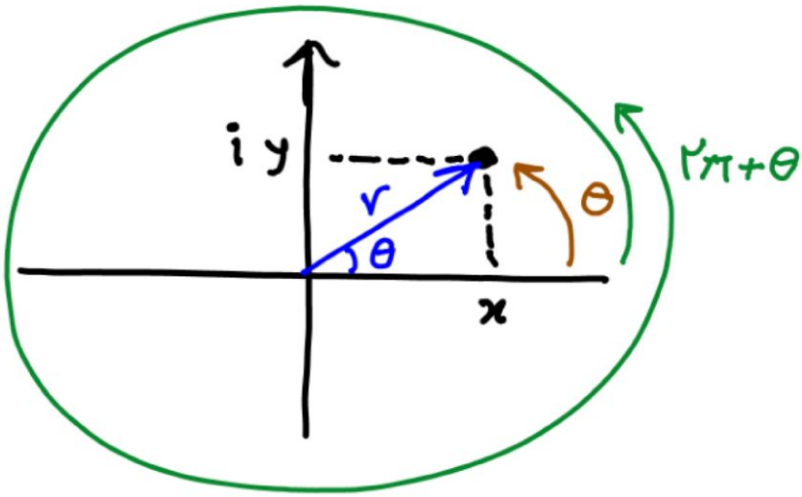
$$i = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = 1e^{i\frac{5\pi}{2}} = \dots$$

$$-i = 1e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \dots$$

$$1+i \longrightarrow \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$



$$1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$



$$1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i(2\pi+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\,e^{i(2k\pi+\frac{\pi}{4})}$$

$$\mathrm{Ln}(1+i) = \begin{cases} \mathrm{Ln}(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}) = \mathrm{Ln}\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \\ \mathrm{Ln}(\sqrt{2}\,e^{i(2\pi+\frac{\pi}{4})}) = \mathrm{Ln}\sqrt{2} + i(2\pi+\frac{\pi}{4}) \\ \mathrm{Ln}\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$-\pi < \theta < \pi$$

آرگومان اصلی

$$-1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

جلسه ۴ — اعداد مختلط ـ توابع مختلط

$$f(z)=z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=x=r\cos\theta \\ Im\{f(z)\}=y=r\sin\theta \end{cases}$$

$(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$ $\qquad$ $(re^{i\theta})^2=r^2e^{i2\theta}$

$$f(z)=z^2=x^2-y^2+i2xy=r^2\cos2\theta+ir^2\sin2\theta \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=x^2-y^2=r^2\cos2\theta \\ Im\{f(z)\}=2xy=r^2\sin2\theta \end{cases}$$

$r^2\cos2\theta+ir^2\sin2\theta$

$$f(z)=z^3=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)=r^3\cos3\theta+ir^3\sin3\theta \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=x^3-3xy^2=r^3\cos3\theta \\ Im\{f(z)\}=3x^2y-y^3=r^3\sin3\theta \end{cases}$$

$$f(z)=e^{az}=e^{ax}\cos(ay)+ie^{ax}\sin(ay) \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=e^{ax}\cos(ay) \\ Im\{f(z)\}=e^{ax}\sin(ay) \end{cases}$$

$$f(z)=\sin(az)=\sin(ax)ch(ay)+i\cos(ax)sh(ay) \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=\sin(ax)ch(ay) \\ Im\{f(z)\}=\cos(ax)sh(ay) \end{cases}$$

$$f(z)=\cos(az)=\cos(ax)ch(ay)-i\sin(ax)sh(ay) \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=\cos(ax)ch(ay) \\ Im\{f(z)\}=-\sin(ax)sh(ay) \end{cases}$$

$$f(z)=sh(az)=sh(ax)\cos(ay)+ich(ax)\sin(ay) \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=sh(ax)\cos(ay) \\ Im\{f(z)\}=ch(ax)\sin(ay) \end{cases}$$

$$f(z)=ch(az)=ch(ax)\cos(ay)+ish(ax)\sin(ay) \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=ch(ax)\cos(ay) \\ Im\{f(z)\}=sh(ax)\sin(ay) \end{cases}$$

$$f(z)=Ln(z)=Ln(re^{i\theta})=Ln(r)+i\theta \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=Ln(r)=Ln(\sqrt{x^2+y^2}) \\ Im\{f(z)\}=\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}\cos\theta-i\frac{1}{r}\sin\theta=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2} \Longrightarrow \begin{cases} Re\{f(z)\}=\frac{x}{x^2+y^2} \\ Im\{f(z)\}=\frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$e^{az} = e^{a(x+iy)} = e^{ax} e^{iay} = e^{ax}(\cos ay + i\sin ay)$$

اویلر

$$Re\{e^{az}\} = e^{ax}\cos ay$$

$$Im\{e^{az}\} = e^{ax}\sin ay$$

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \underbrace{\cos iy}_{ch y} + \cos x \underbrace{\sin iy}_{i sh y}$$

$$\cos i\theta = ch\,\theta \qquad \sin(i\theta) = i\,sh\,\theta$$

$$Re\{\sin z\} = \sin x\, ch\, y$$

$$Im\{\sin z\} = \cos x\, sh\, y$$

$$\underset{\text{فرد}}{\sin z} = \underset{\text{فرد}}{\sin x}\ \underset{\text{زوج}}{ch\, y} + i\cos x\, sh\, y$$

$$\underset{\text{زوج}}{\cos z} = \cos x\ ch\, y - i\sin x\, sh\, y$$

جلسه ۴

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$$

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases} \qquad \begin{cases} u_r=\frac{1}{r}v_\theta \\ \frac{1}{r}u_\theta=-v_r \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=(u_x)^2+(v_x)^2=|f'(z)|^2$$

$$f(z)=u+iv$$

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x=v_y-iu_y$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\phi$$

$$\begin{cases} \nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}=4u_{z\bar z}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ \nabla^2 v=v_{xx}+v_{yy}=4v_{z\bar z}=v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=0 \end{cases}$$

$$\iint du\,dv=\iint |f'(z)|^2\,dx\,dy$$

$$|\nabla H(x,y)|=|f'(z)|\,|\nabla h(u,v)|$$

$$H(x,y)=h(u,v)$$

$$\oint_C f(z)\,dz=0$$

$$f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}=\frac{1}{r}(v_\theta-iu_\theta)e^{-i\theta}$$

$$u_x v_y-u_y v_x=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=|f'(z)|^2$$

$$u_x v_y+u_y v_x=\mathrm{Re}\left\{(f'(z))^2\right\}$$

$$u_r v_\theta+u_\theta v_r=\mathrm{Re}\left\{re^{i2\theta}(f'(z))^2\right\}$$

$$v_x v_y-u_x u_y=\mathrm{Im}\left\{(f'(z))^2\right\}$$

$$v_r v_\theta-u_r u_\theta=\mathrm{Im}\left\{re^{i2\theta}(f'(z))^2\right\}$$

$$u_r v_\theta-u_\theta v_r=r\,|f'(z)|^2$$

مقدار ثابت $=\mathrm{Im}(f(z))$ مقدار ثابت $\Rightarrow f(z)=$ مقدار ثابت

مقدار ثابت $=\mathrm{Re}(f(z))$ مقدار ثابت $\Rightarrow f(z)=$ مقدار ثابت

مقدار ثابت $=|f(z)|$ مقدار ثابت $\Rightarrow f(z)=$ مقدار ثابت

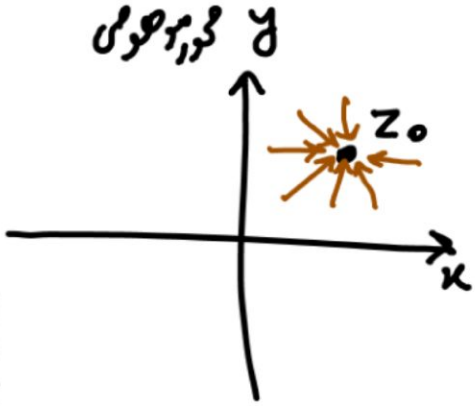
مقدار ثابت $=Arg(f(z))$ مقدار ثابت $\Rightarrow f(z)=$ مقدار ثابت

اگر توابع $f(z)$ و $\overline{f(z)}$ هردو تحلیلی باشند، در آن صورت $f(z)$ فقط می‌تواند برابر مقدار ثابتی باشد.

هرگاه تابع $f(z)$ در داخل ناحیه D تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه مقدار ماکزیمم اندازه این تابع $(|f(z)|=u^2+v^2)$ روی مرزهای D و نه در داخل آن به وقوع می‌پیوندد.

$$f(z) = u + iv$$

$$u \to Re\{f(z)\} \qquad v \to Im\{f(z)\}$$

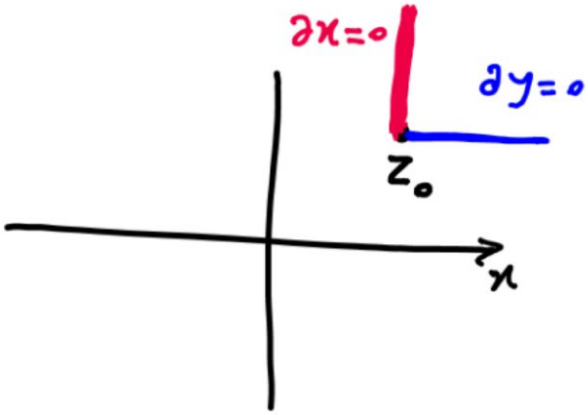


$$z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i\underbrace{2xy}_{v}$$

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{\partial [u + iv]}{\partial(\cancel{x} + \cancel{iy})}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$



$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

معادلات کوشی - ریمان

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi = |f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\Phi$$

$$|\nabla H(x,y)| = |f'(z)|\,|\nabla h(u,v)|$$

$$\iint du\,dv = \iint |f'(z)|^2\,dx\,dy$$

$$f(z) = u + iv \longrightarrow f'(z) = u_x + i\underbrace{v_x}_{-u_y}$$

$$\longrightarrow f'(z) = (u_r + iv_r)\, e^{-i\theta}$$

$$= \frac{1}{r}(v_\theta - iu_\theta)\, e^{-i\theta}$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_{\searrow re^{i\theta}}}$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = Re\{z_1 \bar{z}_2\}$$

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = Im\{\bar{z}_1 z_2\}$$

$$u_x v_y + v_x u_y = Re((f'(z))^2)$$

$$u_x v_y - u_y v_x = |f'(z)|^2 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

$$u_r v_\theta - u_\theta v_r = r|f'(z)|^2$$

$$u_r v_\theta + u_\theta v_r = Re\{r e^{i2\theta}(f'(z))^2\}$$

$$v_r v_\theta - u_r u_\theta = Im\{r e^{i2\theta}(f'(z))^2\}$$

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

هریک از توابع تعریف شده به صورت $f(z)=\ln z=\ln r+i\theta$ را که به ازای $r>0$ و $\alpha<\theta\le\alpha+2\pi$ (α معین) بدست می‌آید، یک شاخه از تابع چندمقداری $f(z)=\log z$ می‌نامند.

شاخه‌ای از تابع $f(z)=\ln z$ را که به ازای $\alpha=-\pi$ بدست می‌آید، شاخه اصلی لگاریتم می‌نامند.

$$\ln z=\ln r+i\theta \qquad (r>0,-\pi<\theta\le\pi)$$

فرض کنید تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ حوزه D_z از صفحه z (صفحه xy) را بر روی حوزه D_w از صفحه w (صفحه uv) تصویر می‌کند. اگر $h(u,v)$ تابع همسازی باشد که در حوزه D_w تعریف شده است، آنگاه تابع $H(x,y)=h[u(x,y),v(x,y)]$ در حوزه D_z همساز خواهد بود. به طور مثال برای تابع تحلیلی $f(z)=z^2$ داریم:

$$\begin{cases} u(x,y)=x^2-y^2 \\ v(x,y)=2xy \end{cases}$$

همچنین تابع $h(u,v)=e^{-v}\sin u$ یک تابع همساز است. بنابراین تابع $H(x,y)=e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$ نیز همساز خواهد بود.

هرگاه در یک تابع تحلیلی، قسمت‌های حقیقی و موهومی با یکدیگر وابستگی تابعی داشته باشند (یعنی بتوانیم یکی از آنها را برحسب دیگری بنویسیم) در آن صورت آن تابع تحلیلی فقط می‌تواند برابر مقدار ثابتی باشد، زیرا با فرض اینکه در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ داشته باشیم $u=\Phi(v)$ آنگاه:

$$|f'(z)|^2=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\Phi'(v)\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \Phi'(v)\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow f'(z)=0 \quad\Rightarrow f(z)=c \quad \text{(عدد ثابت)}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که قسمت‌های حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی غیرثابت را نمی‌توان برحسب یکدیگر نوشت.

اگر هر یک از قسمت‌های حقیقی و یا موهومی یک تابع تحلیلی ثابت باشد، در آن صورت قسمت دیگر آن نیز ثابت بوده و تابع مورد نظر برابر یک مقدار ثابت خواهد بود.

$$|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}$$

$$|\cos z|=\sqrt{\cos^2 x+\sinh^2 y}$$

$$|\sinh z|=\sqrt{\sin^2 y+\sinh^2 x}$$

$$|\cosh z|=\sqrt{\cos^2 y+\sinh^2 x}$$

$$\sin^{-1} z=-i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$$

$$\cos^{-1} z=-i\ln(z+i\sqrt{1-z^2})$$

$$\cosh^{-1} z=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\sinh^{-1} z=\ln(z+\sqrt{z^2+1})$$

اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد، در آن صورت $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$ خواهد بود. به طور مثال، توابعی که شامل $\mathrm{Im}(z)$ و $\mathrm{Re}(z)$ و $|z|$ و $Arg(z)$ می‌باشند، غیر تحلیلی‌اند زیرا این عبارت‌ها را می‌توان برحسب $\bar z$ نوشت:

$$\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar z}{2i} \quad , \quad \mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar z}{2}$$

$$|z|=\sqrt{z\bar z} \quad , \quad Arg(z)=\frac{1}{2i}Ln(\frac{z}{\bar z})$$

$$f(z) = z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i\,\underbrace{2xy}_{v}$$

$$g(w) = g(u+iv) = \sin w = \sin(u+iv)$$

$$= \underbrace{\sin u \operatorname{ch} v} + i \cos u \operatorname{sh} v$$

$$\phi = \sin(x^2 - y^2)\operatorname{ch}(2xy) \longrightarrow \text{همساز}$$

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

$$4\phi_{z\bar{z}} = 0$$

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r}\phi_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta} = 0$$

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

$$|\sin z| = \sqrt{(\sin x \operatorname{ch} y)^2 + (\cos x \operatorname{sh} y)^2}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} + \operatorname{sh}^2 y}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1$$

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

اگر توابع $f(z)$ و $\overline{f(z)}$ هردو تحلیلی باشند، در آن صورت $f(z)$ فقط می‌تواند برابر مقدار ثابتی باشد.

تابعی که در همه نقاط صفحه مختلط و حتی در $z=\infty$ تحلیلی باشد، فقط می‌تواند برابر یک مقدار ثابت باشد.

اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی بوده و در همه نقاط مشتق آن برابر صفر باشد $(f'(z)=0)$ در آن صورت $f(z)$ فقط می‌تواند برابر یک مقدار ثابتی باشد.

اگر $f(z)=u+iv$ یک تابع تحلیلی در حوزه D باشد و u^2+v^2 برابر یک مقدار ثابتی باشد، در آن صورت $f(z)$ نیز ثابت خواهد بود. به عبارت دیگر، اندازه یک تابع تحلیلی غیر ثابت، نمی‌تواند برابر مقدار ثابتی باشد. به همین ترتیب، اگر هر یک از مقادیر زاویه، قسمت حقیقی یا قسمت موهومی یک تابع تحلیلی ثابت باشد، آن تابع فقط می‌تواند برابر مقدار ثابتی باشد.

مقدار ثابت $= \mathrm{Im}(f(z))$ مقدار ثابت $\Rightarrow f(z) =$ مقدار ثابت

مقدار ثابت $= \mathrm{Re}(f(z))$ مقدار ثابت $\Rightarrow f(z) =$ مقدار ثابت

مقدار ثابت $= |f(z)|$ مقدار ثابت $\Rightarrow f(z) =$ مقدار ثابت

مقدار ثابت $= Arg(f(z))$ مقدار ثابت $\Rightarrow f(z) =$ مقدار ثابت

هرگاه تابع $f(z)$ در داخل ناحیه D تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه مقدار ماکزیمم اندازه این تابع $(|f(z)|=u^2+v^2)$ روی مرزهای D و نه در داخل آن به وقوع می‌پیوندد. همچنین اگر تابع $f(z)$ در هیچ نقطه‌ای از ناحیه D صفر نشود، مینیمم مقدار $|f(z)|$ نیز روی مرز D رخ خواهد داد.

اگر تابع $f(z)=u+iv$ در ناحیه بسته و کراندار D تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه توابع u و v همساز بوده (در معادله لاپلاس صدق می‌کنند.) و برطبق قضایای ریاضی، ماکزیمم و می‌نیمم این توابع بر روی مرز D (و نه در داخل آن) به وقوع می‌پیوندد.

با توجه به اینکه اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد، تابع $-if(z)$ نیز تحلیلی خواهد بود، لذا می‌توان چنین نوشت:

$$f(z)=u+iv \qquad \Rightarrow -if(z)=v-iu$$

در این صورت، اگر v مزدوج همساز u باشد، $-u$ نیز مزدوج همساز v خواهد بود.

می‌دانیم که اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، مشتق آن از هر مرتبه‌ای وجود داشته و تحلیلی خواهد بود. از طرفی مشتق مرتبه اول و دوم تابع $f(z)$ را می‌توان به یکی از صورت‌های مقابل نوشت:

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x=v_y-iu_y$$

$$f''(z)=u_{xx}+iv_{xx}=u_{xx}-iv_{yy}=-u_{yy}-iv_{yy}=-u_{yy}+iv_{xx}$$

با توجه به این مطلب که، قسمت موهومی یک تابع تحلیلی مزدوج همساز قرینه قسمت موهومی آن می‌باشد، می‌توان چنین نوشت:

v_x مزدوج همساز u_x است. (u_x مزدوج همساز $-v_x$ است)	$-u_y$ مزدوج همساز u_x است. (u_x مزدوج همساز u_y است)
v_x مزدوج همساز v_y است. (v_y مزدوج همساز $-v_x$ است)	$-u_y$ مزدوج همساز v_y است. (v_y مزدوج همساز u_y است)
v_{xx} مزدوج همساز u_{xx} است. (u_{xx} مزدوج همساز $-v_{xx}$ است)	$-v_{yy}$ مزدوج همساز u_{xx} است. (u_{xx} مزدوج همساز v_{yy} است)
$-v_{yy}$ مزدوج همساز $-u_{yy}$ است.	$-u_{yy}$ مزدوج همساز v_{yy} است.

اگر u مزدوج همساز v باشد و v نیز مزدوج همساز u باشد، آنگاه u و v توابعی ثابت خواهند بود.

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

سؤالات کنکور سالهای گذشته

تابع تحلیلی $w(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ را بدست آورید وقتی که (۶۷)

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ و $W(0) = 0$

۱- $w(z) = (x^3 - 3xy^2) + i\,(x^3 - 3x^2y)$

۲- $w(z) = (x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2y - y^3)$ ✓

۳- $w(z) = (x^3 - 3xy^2) + i\,(x^3 - 3xy^2)$

۴- هیچکدام

پاسخ هوشمندانه

$$W(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

تابع f از متغیر z بصورت $f(z)=\begin{cases} \dfrac{(\bar z)^2}{z} & , z\neq 0 \\ 0 & , z=0 \end{cases}$ مفروض است.

(۶۸) $\lim \dfrac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2}$ ↗ 1 ↘ 1

$\lim \dfrac{f(z)-\cancel{f(0)}}{z-0}$

۱- f در نقطه $z=0$ پیوسته نیست. ✗

۲- در $z=0$ روابط کشی - ریمان برقرار نیستند ولی تابع f مشتق دارد. ✗

۳- در $z=0$ تابع f پیوسته است و روابط کشی - ریمان نیز برقرارند. ✓

۴- در $z=0$ تابع f مشتق ندارد و روابط کشی - ریمان نیز برقرار نیستند. ✗

$$\frac{(\bar z)^2}{z} = \frac{r^2 e^{-i2\theta}}{r e^{i\theta}}$$

$x=0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{(\bar z)^2}{z} = 0$$

$$f'(z)\big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{(\bar z)^2}{z^2}$$

تابع $w=\mathrm{Ln}\, z$ را به ازای عدد مختلط $z=re^{i\theta}$, $r>0$; $-\pi<\theta\leq\pi$ ، چنین تعریف می‌کنیم $\mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Ln} r + i\theta$

اکنون اگر $z=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، آنگاه $\mathrm{Ln}\, z^2$ برابر است با : (۷۰)

۱- $-i\frac{\pi}{2}$ ۲- $i\frac{3\pi}{2}$

۳- $i\pi$ ۴- $-i\pi$

$$\mathrm{Ln}\left(e^{i\frac{5\pi}{2}}\right) = \mathrm{Ln}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = -i\frac{\pi}{2}$$

اگر $v(x,y)$ یک مزدوج همساز تابع $u(x,y) = (x^2-y^2+1)^2 - 4x^2y^2$ باشد وداشته باشیم $v(0,0)=0$ ، آنگاه مقدار $v(1,1)$ برابر کدام گزینه است؟ (۷۱)

$y=0$ $f(z) = (z^2+1)^2$

$x=z$

۱- ۱ ۲- ۴ ✓

۳- ۰ ۴- ۲-

$$f(z) = \left[x^2-y^2+1 + i\,2xy\right]^2$$

$$= (x^2-y^2+1)^2 - 4x^2y^2 + i\,4xy\,(x^2-y^2+1)$$

$$v(x,y) = 4xy\,(x^2-y^2+1)$$

$$v(1,1) = 4$$

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

سؤالات کنکور سالهای گذشته

کدام یک از توابع زیر تحلیلی است : (۷۳)

۱- برای $|z|<3$ $\begin{cases} \dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}, & z\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & z=0 \end{cases}$

۲- برای $z\neq 0$ $\operatorname{Ln} z$

۳- برای $x=y$ x^2+iy^2

۴- برای $z\neq \dfrac{1}{k\pi}$ (k عدد صحیح است). $k\neq 0$ $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

اگر تابع f(z) در تمام صفحه تحلیلی و در شرط $|f''(z)|\le c$ (c ثابت) صدق کند آنگاه f(z) برابر است با (۷۳)

۱- $Az+B$ (A_3, A_2, A_1, B, A ثابت‌اند)

۲- $A_1z^2+A_2z+A_3$; $|A_1|<\dfrac{c}{2}$

۳- $\dfrac{c}{2}z^2+Az+B$

۴- در حالت کلی نمی‌توان شکل تابع f(z) را نوشت.

کلیه توابع تحلیلی به صورت $f(z)=u(x)+iv(y)$ عبارتنداز : (۷۳)

فقط تابعی از x

فقط تابعی از y

۱- $f(z)=z^2+a$ (a ثابت)

۳- $f(z)=z$

۲- $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$

۴- $f(z)=cz+a$ (a ثابت و c ثابت حقیقی)

$f=u+iv=k(\underbrace{x+iy}_{z})+k_2+ik_3$

تابع $f(z)=x^2+iy^2$ مفروض است ، کدام عبارت صحیح نیست. (۷۴)

۱- تابع f(z) بر $x=y$ تحلیلی است.

۲- تابع f(z) بر $x=y$ مشتق‌پذیر است.

۳- روابط کوشی ریمن در $x=y$ برقراراست .

۴- این تابع پیوسته است.

پاسخ هوشمندانه

$u=x^2 \rightarrow u_x=v_y$

$v=y^2 \rightarrow u_y=-v_x$

$\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dots$

$\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dots$

$f'(z)$, $f''(z)$ تحلیلی‌اند

$|f''(z)|\le c$

$f''(z)=k$

$f(z)=A_1z^2+A_2z+A_3$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$u'_x=v'_y=k$

$u=kx+k_2$

$v=ky+k_3$

$u=x^2$, $v=y^2$

$u_x=v_y \rightsquigarrow 2x=2y$

$u_y=-v_x \rightsquigarrow 0=0$

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

سؤالات کنکور سالهای گذشته

اگر تابع دو متغیری $u(x , y) = x^2 - y^2 - 2x + 4$ مشخص کننده خطوط شار (جریان) $x^2 - y^2 - 2x + 4 = \lambda$ ، $(\lambda \in R)$ در یک میدان باشد، مسیرهای قائم (خطوط هم قوه) کدام‌اند؟ (۷۵)

۱- $V(x , y) = 2xy + 2y = c \quad (c \in R)$

۲- $V(x , y) = 2xy - 2y = c \quad (c \in R)$ ✓

۳- $V(x , y) = -2xy + 2y = c \quad (c \in R)$

۴- $V(x , y) = -2xy - 2y = c \quad (c \in R)$

پاسخ هوشمندانه

$x^2 - y^2 \rightsquigarrow \boxed{2xy}$

$-2x \rightsquigarrow \boxed{-2y}$

اگر z_1 و z_2 دو نقطهٔ دلخواه از صفحهٔ مختلط باشند، آنگاه مکان هندسی نقاط $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ با شرط $\alpha + \beta = 1$ عبارتست از: (۷۵)

۱- پاره خطی که نقطهٔ αz_1 را به نقطهٔ βz_2 متصل می‌کند.

۲- پاره خطی که مبداء را به نقطهٔ $\alpha z_1 + \beta z_2$ متصل می‌کند.

۳- پاره خطی که نقاط z_1 و z_2 را بهم می‌پیوندد. ✓

۴- پاره خطی که مبداء را به نقطهٔ $z_1 + z_2$ متصل می‌کند.

اگر سه نقطهٔ z_1، z_2 و z_3 از صفحه مختلط در رابطهٔ $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$ صدق کنند که در آن α، β و γ اعداد حقیقی با شرط $\alpha+\beta+\gamma=0$ می‌باشند، آنگاه (۷۶)

۱- سه نقطه، رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین هستند.

۲- سه نقطه، رئوس یک مثلث قائم الزاویه هستند.

۳- سه نقطه در یک راستا قرار دارند. ✓

۴- سه نقطه، رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

$$z_1 = -\frac{\beta}{\alpha} z_2 - \frac{\gamma}{\alpha} z_3$$

$$\frac{-\beta}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-[\beta+\gamma]}{\alpha} = 1$$

اگر $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ تابعی تحلیلی درون و روی دایرهٔ واحد $C: |z| = 1$ باشد و چنانچه M حداکثر مقدار $|f(z)|$ روی C باشد، کدامیک از نامساویهای زیر برای ژاکوبین (Jacobian) (۷۶)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2$$

در مرکز دایرهٔ C برقرار است؟

۱- $J \le M$

۲- $J^2 \le M$

۳- $J \le 4M^2$

۴- $J \le M^2$

$$|f'(z)| \le \frac{M}{R} = \frac{M}{1}$$

$$\sqrt{J} \le M$$

$$J \le M^2$$

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

سؤالات کنکور سالهای گذشته

اگر $z = x + iy$ ، آنگاه کلّیه نقاطی از صفحه z که به ازای آنها $\mathrm{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) < 1$ و $\mathrm{Im}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) < a$ (ثابت $a > 0$) عبارتست از..... (۷۹)

۱) نیمه پائینی درون دایرهٔ $(x+\frac{1}{a})^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{a^2}$

۲) نیمه بالائی درون دایرهٔ $(x+\frac{1}{a})^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{a^2}$

۳) نیمه بالائی بیرون دایرهٔ $(x+\frac{1}{a})^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{a^2}$

۴) نیمه پائینی بیرون‌دایرهٔ $(x+\frac{1}{a})^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{a^2}$

پاسخ هوشمندانه

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} = \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$$

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} < 1$$

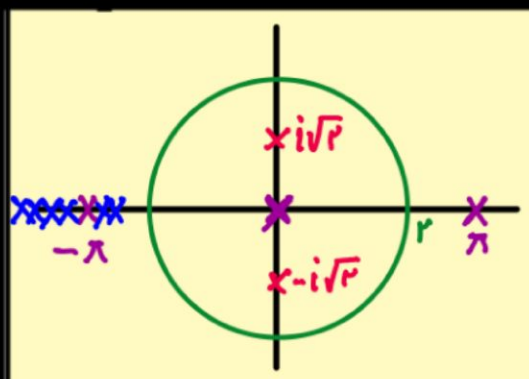
$$x^2+y^2-1 < x^2+y^2+2y+1$$

$$2y > -2$$

$$y > -1$$

تعداد نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z) = \frac{\ln(3+z)}{(z^2+2)\sin z}$ (شاخه اصلی لگاریتم مورد نظر است) درون مرز $|z| = 2$ کدام است؟ (۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) بیشمار



$$z^2+2=0 \rightarrow z=\pm i\sqrt{2}$$

$$\sin z = 0 \rightarrow z = k\pi \rightarrow z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

$$\ln(c+z) \rightarrow \{z \mid x < -c,\ y = 0\}$$

اگر $u(x, y) = 2^x \cos(y \ln 2)$ داده شده باشد، مزدوج همساز و تابع مختلط تحلیلی متناظر، $f(z)$ کدام است. (λ در جوابها عدد ثابت است.) (۸۱)

۱) $v(x, y) = 2^x i \sin(y \ln 2) + \lambda$, $f(z) = 2^z + i\lambda$ ✗

۲) $v(x, y) = 2^x \cos(y \ln 2) + \lambda$, $f(z) = 2^z \sin(z \ln 2) + i\lambda$ ✗

۳) $v(x, y) = 2^x \sin(y \ln 2) + \lambda$, $f(z) = 2^z + i\lambda$

۴) $v(x, y) = 2^x \sin(y \ln 2) + \lambda$, $f(z) = 2^z \cos(z \ln 2) + i\lambda$ ✗

$$f(z) = 2^z + i\lambda$$

$$2^{x+iy} + i\lambda$$

$$2^x e^{iy\ln 2} + i\lambda$$

$$2^x[\cos(y\ln 2) + i\sin(y\ln 2)] + i\lambda$$

اگر u و v دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته باشند، آنگاه شرط لازم برای آنکه عبارت: $W = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{U} + i\overbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}^{V}$ تابعی تحلیلی از متغیر مختلط z باشد، کدام است $(z = x + iy)$؟ (۸۲)

۱) $u_{xx} - u_{yy} = 0 , v_{xx} + v_{yy} = 0$

۲) $u_{xx} + u_{yy} = 0 , v_{xx} + v_{yy} = 0$ ✓

۳) $u_{xx} + u_{yy} = 0 , v_{xx} - v_{yy} = 0$

۴) $u_{xx} - u_{yy} = 0 , v_{xx} - v_{yy} = 0$

$$U_x = V_y$$

$$\cancel{u_{xy}} - v_{xx} = \cancel{u_{xy}} + v_{yy}$$

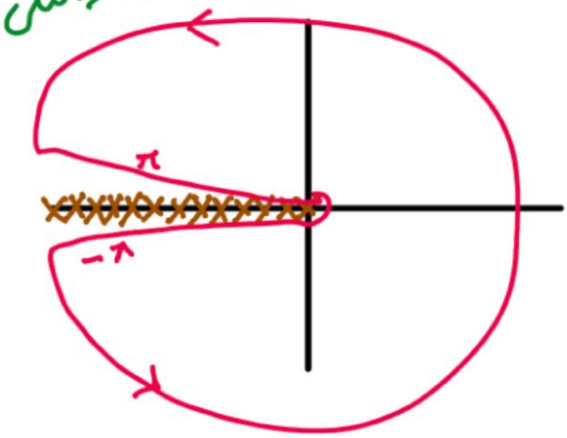
$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$U_y = -V_x \rightarrow u_{yy} - \cancel{v_{xy}} = -u_{xx} - \cancel{v_{xy}}$$

$$u_{yy} + u_{xx} = 0$$

$\mathrm{Ln}(f(z)) \longrightarrow$ نقاط غیر تحلیلی $\{z \mid Re(f(z))<0,\ Im(f(z))=0\}$

شاخه اصلی



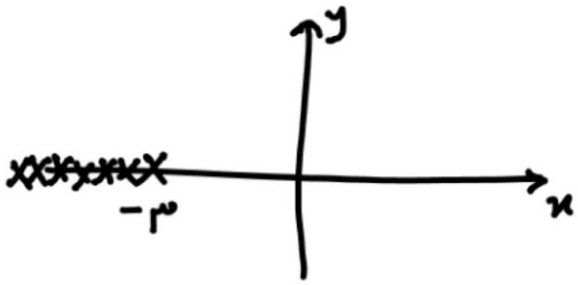
$\mathrm{Ln}(3+z)$

شاخه اصلی

$Re\{3+\underset{x+iy}{z}\}<0\ ,\quad Im\{\underset{x+iy}{z}+3\}=0$

$3+x<0 \quad , \quad y=0$

$x<-3$



$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \longrightarrow Arg(z_1) = \theta_1$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \longrightarrow Arg(z_2) = \theta_2$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \longrightarrow Arg(z_1 z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$

$z_1^n = r_1^n e^{in\theta_1} \longrightarrow Arg(z_1^n) = n\, Arg\, z_1$

$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg\, z_1 - Arg\, z_2$

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

سؤالات کنکور سال‌های گذشته

اگر Ln z شاخهٔ اصلی لگاریتم باشد $(-\pi < \arg z < \pi)$، تابع $\mathrm{Ln}(1+z^2)$ در چه ناحیه‌ای تحلیلی نیست؟ (۸۲)

$Re(1+z^2) < 0 \rightarrow 1+x^2-y^2 < 0$

$Im(1+z^2) = 0 \rightarrow 2xy = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |y| > 1 \end{cases}$

۱) $\{z \mid Re z = 0 , |Im z| \geq 1\}$ ✓

۲) $\{z \mid Re z = 0 , Im z \geq 0\}$

۳) $\{z \mid Re z = 0 , |Im z| \leq 1\}$

۴) $\{z \mid z = x+iy , y = 0 , x \leq 0\}$

اگر $U = u(x, y)$ در یک ناحیه D از صفحه xoy همساز و $z = x + iy$، آنگاه مقدار $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}$ برابر است با: (۸۳)

$U = x = \frac{z+\bar{z}}{2} \rightarrow U_z = \frac{1}{2} \rightarrow U_{z\bar{z}} = 0$

$U_{z\bar{z}}$

$U = x^2 - y^2$

۱) صفر ✓

۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{4!}$

۴) $-\frac{1}{4}$

$U = x^3 - 3xy^2$

$U = \dots$

$U_{xx} + U_{yy} = 0$

$4U_{z\bar{z}} = 0$

$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0$

تعیین کنید تابع $f(z)=x^2-y^2+i2|xy|$ در کجا تحلیلی است. (۸۴)

۱) فقط در ربع اول

۲) در تمام صفحه

۳) در ربع اول و سوم ✓

۴) در هیچ جا تحلیلی نیست.

$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$

$xy > 0 \rightarrow$ ربع اول و ربع سوم

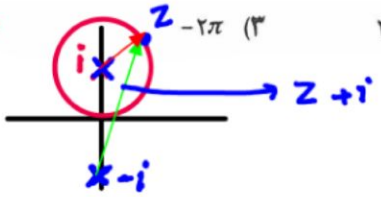
تابع مختلط $w = f(z) = (z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ را درنظر می‌گیریم. اگر حول دایره بسته $|z-i| = 1$ در صفحهٔ مختلط یک دور کامل بزنیم. آنگاه تغییر عبارت argw برابر است با: (۸۴)

۱) ۰

۲) 2π

۳) -2π

۴) π ✓



$w = [(z+i)(z-i)]^{\frac{1}{2}}$

$\mathrm{Arg}\, w = \frac{1}{2}[\mathrm{Arg}(z+i) + \mathrm{Arg}(z-i)]$

$\Delta \mathrm{Arg}\, w = \frac{1}{2}[\Delta \mathrm{Arg}(z+i) + \Delta \mathrm{Arg}(z-i)]$

$\Delta \mathrm{Arg}(z+i) \rightarrow 0$

$\Delta \mathrm{Arg}(z-i) \rightarrow 2\pi$

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

سؤالات کنکور سالهای گذشته

اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی با قسمت حقیقی $u(x,y) = x + e^x \cos y$ باشد، آنگاه $f'(1)$ برابر است با: (۸۵)

۱) $1 + e$ ✓ ۲) $1 - e$ ۳) $e + 2i$ ۴) $(1 + e) + i$

پاسخ هوشمندانه

$$f(z) = z + e^z$$

$$f'(z) = 1 + e^z$$

$$f'(1) = 1 + e$$

تابع $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2+1}}$ را در نظر می‌گیریم. وقتی z روی خط $y = x + 1$ در ربع اول و با x های کاهشی به سمت نقطه $z = i$ میل کند، مقداری که $f(z)$ بخود می‌گیرد برابر است با: (۸۵)

۱) صفر ۲) $+1$ ۳) $-\infty$ ۴) بی‌نهایت

$$z - i = re^{i\theta}$$

$$z - i = re^{i\theta}$$

$$z - i = re^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$f(z) = e^{-\frac{1}{(z+i)(z-i)}} = e^{\frac{ie^{-i\frac{\pi}{4}}}{2r}}$$

i ، $re^{i\frac{\pi}{4}}$

$$f(z) = e^{\frac{i(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})}{2r}}$$

$$|f(z)| = e^{\frac{\sqrt{2}}{4r}} = \infty \quad (r \to 0^+)$$

اگر با فرض $|y| \to \infty$، متغیر z به سمت بی‌نهایت میل کند، در این صورت در مورد کراندار بودن و یا دارای حد بودن $|\sin z|$ کدام عبارت درست است؟ (۸۵)

۱) به بی‌نهایت میل می‌کند. ۲) کراندار است و به صفر میل می‌کند.

۳) کراندار است اما به صفر میل نمی‌کند. ۴) کراندار است اما به سمت حدی میل نمی‌کند

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$$

$$y \to \pm\infty \longrightarrow |\sin z| = \infty$$

کدام یک از گزاره‌های زیر، در مورد تابع مختلط $f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^3}{z^3} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$ صحیح است؟ (۸۷)

۱) در مبدأ o پیوسته نیست.

۲) در مبدأ o مشتق‌پذیر نیست، اما در روابط کشی – ریمان در این نقطه صدق می‌کند.

۳) در مبدأ o مشتق‌پذیر نیست و در روابط کشی – ریمان نیز در این نقطه صدق نمی‌کند. ✓

۴) در مبدأ o پیوسته است و در روابط کشی – ریمان نیز در این نقطه صدق می‌کند.

$$\frac{f(z) - \cancel{f(0)}}{z - 0}$$

$$f'(z) = \frac{(\bar{z})^3}{z^3}$$

$$= \frac{(x - iy)^3}{(x + iy)^3} \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow -1 \end{cases}$$

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

سؤالات کنکور سالهای گذشته

اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ (u و v حقیقی و $z=x+iy$) و $u(x,y)=\alpha x\cosh x.\cos y+\beta y\sinh x.\sin y$، آنگاه به ازای کدام α و β ثابت، تابع f تحلیلی است؟ (۸۹)

$\alpha[x+iy][\operatorname{ch}x\cos y+i\operatorname{sh}x\sin y]$

۱) $\alpha\beta=0$ ۲) $\beta=-\alpha$ ✓ ۳) $\alpha=\beta=1$ ۴) $\beta=\alpha$

تابع $\varphi(x,y)=x^3-3xy^2$ در همهٔ نقاط هارمونیک (همساز) می‌باشد. تابع مختلط تحلیلی G از متغیر z را به گونه‌ای تعیین نمایید که $\operatorname{Re}G=\varphi$. (۹۰)

۱) $(x^3-3xy^2)+i(3xy^2-y^3+c)$ ✗ ۲) $(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+c)$ ✓

۳) $(x^3-3xy^2)+i(4xy^2+y^2+c)$ ۴) $(x^3-3xy^2)+i(4xy-y^2+c)$

تعداد نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)=\dfrac{\log(3+z)}{(z^2+2)\sin z}$ درون مرز $|z|=2$ کدام است؟ (۹۰)

تکراری

۱) ۲ ۲) ۳ ✓ ۳) ۴ ۴) ۷

ناحیه داخل مثلث تشکیل شده از مسیر $y=1-|x|$ و محور xها را در نظر می‌گیریم. مساحت شکل حاصل از تبدیل این ناحیه از صفحهٔ z تحت نگاشت $w=z^2$ در صفحهٔ w برابر است با: (۹۱)

$w=z^2$

۱) ۲ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

$f'(z)=2z\longrightarrow|f'(z)|^2=4|z|^2=4(x^2+y^2)$

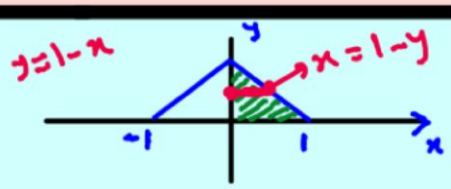
$f(z)=\alpha z\operatorname{ch}z$

$u=\alpha x\operatorname{ch}x\cos y-\alpha y\operatorname{sh}x\sin y$

$\beta=-\alpha$

$x^3-3xy^2=\operatorname{Re}(z^3)$

$x^3-3xy^2+i[3x^2y-y^3+c]$



$S=\iint du\,dv$

$=\iint|f'(z)|^2\,dx\,dy$

$=2\int_0^1\int_0^{1-y}4(x^2+y^2)\,dx\,dy=\dots$

اعداد مختلط ـ توابع مختلط

جلسه ۴

سؤالات کنکور سالهای گذشته

در مورد تابع مختلط $f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\bar{z})^2}{z} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$، گزینهٔ صحیح کدام است؟ (۹۲)

$$f'(z)\Big|_{z=0}=\frac{f(z)-\cancel{f(0)}}{z-\cancel{0}}$$

۱) در مبدأ $(0,0)$ روابط کشی- ریمان برقرار نیستند. ✗

۲) در نقطهٔ $z=0$ مشتق‌پذیر است. ✓

۳) مشتقات جزیی مرتبه اول توابع حقیقی $\mathrm{Re}f(z)$ و $\mathrm{Im}f(z)$ در $(0,0)$ پیوسته نیستند. ✓

۴) در نقطهٔ $z=0$ مشتق‌پذیر نیست چون روابط کشی- ریمان در مبدأ برقرار نیست. ✗

پاسخ هوشمندانه

$$f'(z)\Big|_{z=0}=\frac{(\bar{z})^2}{z^2}=\frac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2}$$

$\nearrow 1$

$\searrow 1$

دایره‌ای به مرکز نقطه z_0 و به شعاع ρ_0 به قسمی که $\rho_0=|z_0|$، در صفحهٔ z مفروض است. در اثر تبدیل $w=\frac{1}{z}$، معادله این دایره به کدام رابطه در صفحهٔ w تبدیل می‌شود؟ (۹۲)

$$|z-z_0|=\rho_0=|z_0|$$

$$z=\frac{1}{w}$$

۱) $1+2\mathrm{Re}(\bar{z}_0\bar{w})=0$

۲) $1-2\mathrm{Re}(z_0 w)=0$ ✓

۳) $1+2\mathrm{Re}(z_0 w)=0$

۴) $1-2\mathrm{Re}(\bar{z}_0 w)=0$

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)$$

$$\left|\frac{1}{w}-z_0\right|=|z_0|$$

$$\left|\frac{1-wz_0}{w}\right|=|z_0|$$

$$|1-wz_0|^2=|wz_0|^2$$

$$1+\cancel{|wz_0|^2}-2\mathrm{Re}(wz_0)=\cancel{|wz_0|^2}$$

تعداد نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z)=\dfrac{\mathrm{Log}(iz+2)}{(z-1)\cosh(\pi z)\sin z}$ در درون مرز $|z|=2$ کدام است؟ (Log شاخهٔ اصلی تابع لگاریتم است) (۹۵)

$z-1=0\rightarrow z=1$ ✓

$\cosh \pi z=0\rightarrow \pi z=i(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$z=i\frac{(2k+1)}{2}=\frac{i}{2},\frac{3i}{2},-\frac{i}{2},\dots$

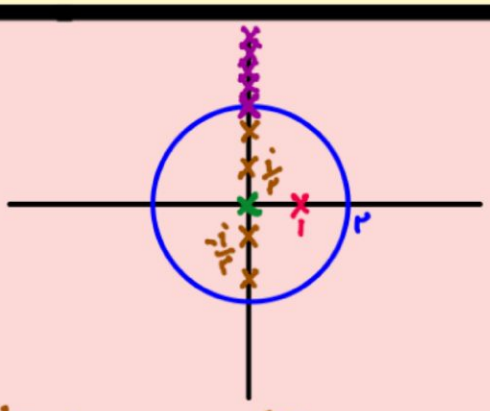
$\sin z=0\rightarrow z=0,\pi,-\pi,\dots$

۱) ۵

۲) ۳

۳) ۶ ✓

۴) بی‌شمار



$iz+2=0\rightarrow z=i2$

$\cos z=0\rightarrow z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\mathrm{ch}\,z=0\rightarrow z=i(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\sin z=0\rightarrow z=k\pi$

$\mathrm{sh}\,z=0\rightarrow z=ik\pi$