نظریه پتانسیل‌ها

$\vec{E} = -\nabla V$ ← پتانسیل الکتریکی اسکالر (V)

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ← پتانسیل مغناطیسی برداری $(\vec{A})$

$\vec{H} = -\nabla V_m$ ← پتانسیل مغناطیسی اسکالر (V_m)

پتانسیل الکتریکی اسکالر:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \xrightarrow{\nabla \times (\nabla\ ) = 0} \vec{E} = -\nabla V$$

الکتریته ساکن

روش محاسبه پتانسیل الکتریکی:

$$\vec{E} = -\nabla V \rightsquigarrow \nabla V = -\vec{E} = -\int \frac{dq\,\vec{R}}{4\pi\varepsilon |\vec{R}|^3}$$

$$\nabla V = -\int \frac{dq}{4\pi\varepsilon |\vec{R}|^2} \underbrace{\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}}_{\hat{a}_R} \xrightarrow{\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\hat{a}_r}$$

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon |\vec{R}|}$$

روش مستقیم

$$\vec{E} = -\nabla V \rightsquigarrow \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B (-\nabla V)\cdot d\vec{l}$$

$$\int_A^B (\nabla V)\cdot d\vec{l} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \rightsquigarrow V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

مرجع پتانسیل

روش غیر مستقیم

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \xrightarrow[\vec{D} = \varepsilon \vec{E}]{\text{محیط خطی}} \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho$$

قانون گاوس

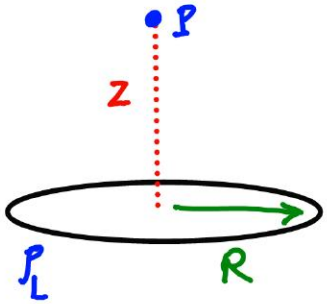
اسکالر — بردار

$$\nabla(\varepsilon)\cdot\vec{E} + (\nabla\cdot\vec{E})\,\varepsilon = \rho$$

محیط خطی و همگن: $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ معادله پواسن

محیط خطی و همگن و بدون بار: $\nabla^2 V = 0$ معادله لاپلاس

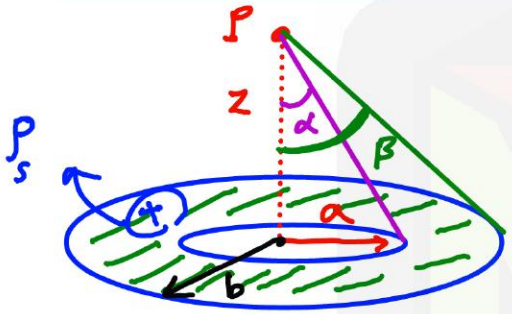
موارد خاص پتانسیل الکتریکی اسکالر:



$$\vec{E}_{\text{حلقه}} = \frac{\rho_L R z}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{a}_z$$

$$V(z) - \cancel{V(\infty)}^{\,0} = -\int_{\infty}^{z} \vec{E}\cdot d\vec{L} = -\int_{\infty}^{z} \frac{\rho_L R z\, dz}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V(z) = \frac{\rho_L R}{2\varepsilon_0 \sqrt{R^2+z^2}}$$

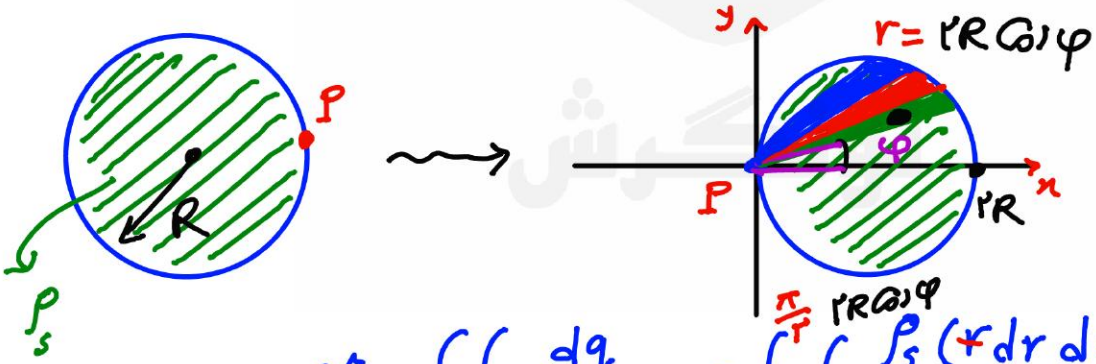


$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}\left[\cos\alpha - \cos\beta\right]\hat{a}_z$$

$$= \frac{\rho_s}{2\varepsilon}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right]\hat{a}_z$$

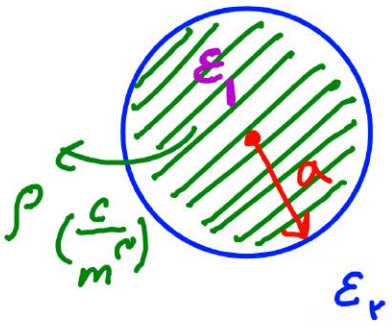
$$V(z) - \cancel{V(\infty)}^{\,0} = -\int_{\infty}^{z} \vec{E}\cdot d\vec{L}$$

$$V(z) = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+b^2} - \sqrt{z^2+a^2}\right]$$

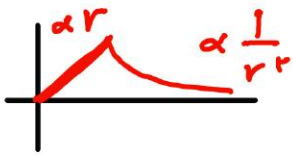


$$V = \iint \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}|} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2R\cos\varphi} \frac{\rho_s (\cancel{r}\, dr\, d\varphi)}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r}}$$

$$V = \frac{\rho_s 2R}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{\rho_s R}{\pi\varepsilon_0}$$



$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_1}\,\hat{a}_r & r<a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_2 r^2}\,\hat{a}_r & r>a \end{cases}$$

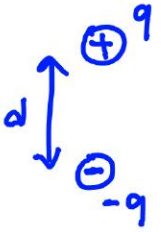


$$\underset{r>a}{V(r) - \cancel{V(\infty)}} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_{out}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_2 r^2}\,dr = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_2 r}$$

$$\underset{r<a}{V(r) - \cancel{V(\infty)}} = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}_{out}\cdot d\vec{l} - \int_{a}^{r} \vec{E}_{in}\cdot d\vec{l} = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_2} - \int_{a}^{r} \frac{\rho r}{3\varepsilon_1}\,dr$$

$$V(r) = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_2} + \frac{\rho}{6\varepsilon_1}(a^2 - r^2)$$

دوقطبی الکتریکی:

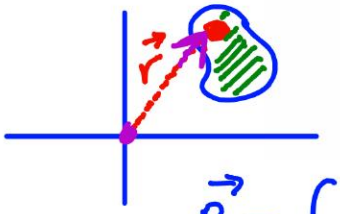


$\equiv \uparrow \vec{P}$ (cm)

گشتاور دوقطبی الکتریکی

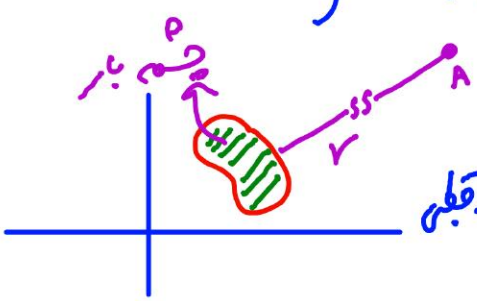
$$\vec{P} = \int \vec{r}\, dq$$

بردار مکان چشمه



$$\vec{P} = \int \vec{r}\,(\rho_L\, dL) \qquad \vec{P} = \int \vec{r}\,(\rho_s\, ds)$$

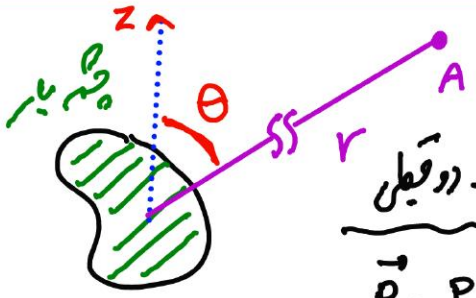
$$\vec{P} = \int \vec{r}\,(\rho\, dv)$$



$\vec{E} = -\nabla V \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left[3(\vec{P}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{P}\right]$

$\Longrightarrow$ تقریب دوقطبی

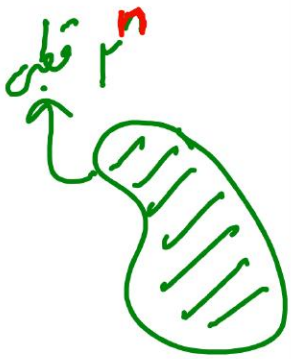
$$V = \frac{\vec{P}\cdot\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



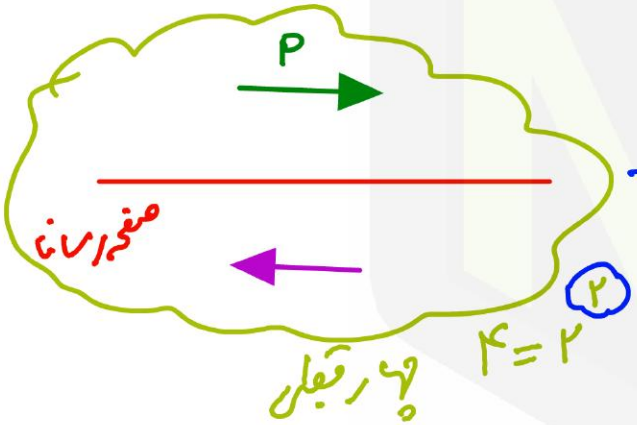
$\xrightarrow[\vec{P}=P_0\hat{a}_z]{\text{تقریب دوقطبی}}$

$$V=\frac{\vec{P}\cdot\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{P_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}=\frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_r+1\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$



$$\rightsquigarrow\begin{cases} V\cong\dfrac{1}{r^{n+1}} \\ E\cong\dfrac{1}{r^{n+2}}\end{cases}$$

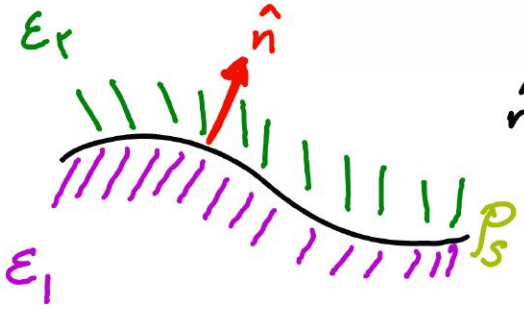


$$\xrightarrow{n=2}\begin{cases} V\cong\dfrac{1}{r^3} \\ E\cong\dfrac{1}{r^4}\end{cases}$$

$$\nabla\cdot(\vec{D})=\rho$$

$\rightarrow \nabla^2 V=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ محیط خطی و همگن

$\rightarrow \nabla^2 V=0$ محیط خطی و همگن و بدون بار



$$\hat{n}\cdot\left[\vec{D}_2-\vec{D}_1\right]=\rho_s$$

$$\hat{n}\cdot\left[\varepsilon_2\nabla V_2-\varepsilon_1\nabla V_1\right]=-\rho_s$$

$$\left(\varepsilon_2\frac{\partial V_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)=-\rho_s$$

ناحیه بالا $\nabla^2 V=0$

$\rho=\rho_0\, e^{-\beta x}$ صفحه $y=0$ $\rightsquigarrow V=k\, e^{-\beta x}\begin{cases}\cancel{\cos\beta y}\\ \sin\beta y\ \checkmark\end{cases}$

ناحیه پایین $\nabla^2 V=0$

$\nabla^2 V=0$

$\rho_s=\rho_0\cos\beta x$ $y=0$ $\rightsquigarrow V=k\, e^{-\beta y}\cos\beta x$

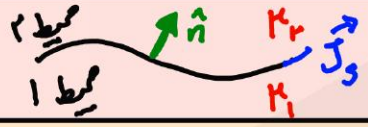
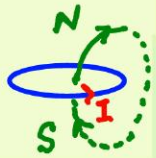
$\nabla^2 V=0$

$\nabla^2 V=0$

$\rho_s=\rho_0\cos\beta x\cos\alpha y$ صفحه $z=0$ $\rightsquigarrow V=k\, e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z}\cos\beta x\cos\alpha y$

$\nabla^2 V=0$

$\nabla\times\vec{E}=0$	$\vec{E}=-\nabla V \rightsquigarrow V(A)-V(B)=-\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$
	$\vec{E}=-\nabla V \rightsquigarrow V=\int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\lvert\vec{R}\rvert}$
	$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ (محیط خطی) $\rightsquigarrow (\nabla\varepsilon)\cdot\vec{E}+(\nabla\cdot\vec{E})\varepsilon=\rho$
$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$	$\nabla\varepsilon\perp\vec{E}$ یا $\nabla\varepsilon=0 \rightsquigarrow \nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon}$ معادله پواسن
	$\left(\varepsilon_2\frac{\partial V_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)=-\rho_s$
$\vec{P}=\int\vec{r}\,dq$	$V=\frac{\vec{P}\cdot\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{P}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{P}\right]$
	$\vec{P}=P_0\hat{a}_z \rightsquigarrow V=\frac{P_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\vec{E}=\frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_r+1\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$
	$\rho_s=\rho_0\, e^{-\beta x}$ صفحه $y=0$ $\rightsquigarrow V=k\, e^{-\beta x}\sin\beta y$

$\nabla\cdot\vec{B}=0$	$\nabla\cdot\vec{B}=0 \xrightarrow{\nabla\cdot(\nabla\times\ )=0} \vec{B}=\nabla\times\vec{A} \rightsquigarrow \oint \vec{A}\cdot d\vec{l}=\iint \vec{B}\cdot d\vec{s}$
	$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,d\vec{l}\times\vec{R}}{\lvert\vec{R}\rvert^3} \rightsquigarrow \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,d\vec{l}}{\lvert\vec{R}\rvert}$
$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$	$\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)=\vec{J} \rightsquigarrow \underbrace{\nabla\times\vec{B}}_{\nabla\times\vec{A}}=\mu_0\vec{J} \rightsquigarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}$
	$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J} \rightsquigarrow \begin{cases}\nabla^2 A_x=-\mu_0 J_x\\ \nabla^2 A_y=-\mu_0 J_y\end{cases} \quad \nabla^2 A_z=-\mu_0 J_z$
	 $\rightsquigarrow \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial\vec{A}_2}{\partial n}-\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\vec{A}_1}{\partial n}=-\vec{J}_s$
$\vec{m}=\frac{1}{2}\int\vec{r}\times I\,d\vec{l}$	$\vec{A}=\frac{\mu_0\,\vec{m}\times\hat{a}_r}{4\pi r^2}$, $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}\right]$
(Am^2)	$\vec{m}=m_0\,\hat{a}_z \xrightarrow{\text{تقریب دوقطبی}} \vec{A}=\frac{\mu_0 m_0\sin\theta}{4\pi r^2}\hat{a}_\varphi$, $\vec{B}=\frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_r+\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$
	$\vec{J}_s=J_0 e^{-\beta x}\,\hat{y}$ $z=0$ صفحه $\rightsquigarrow \vec{A}=k\,e^{-\beta x}\sin\beta z\,\hat{y}$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J} \xrightarrow[\vec{J}=0]{\text{محیط بدون جریان آزاد}} \nabla\times\vec{H}=0 \xrightarrow{\nabla\times(\nabla\ )=0} \vec{H}=-\nabla V_m$$

$$\underbrace{\nabla\cdot\vec{B}=0}_{\text{همواره}} \xrightarrow[\text{و همگن}]{\text{محیط خطی}} \nabla\cdot(\mu_0\vec{H})=0 \rightsquigarrow \nabla\cdot(\overset{-\nabla V_m}{\vec{H}})=0$$

$$\nabla^2 V_m=0$$

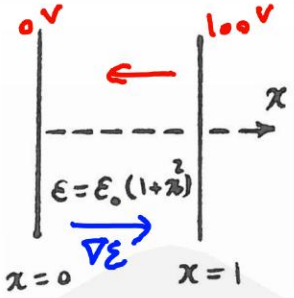
معادله لاپلاس

$$\nabla^2 V=0 \rightsquigarrow \begin{cases} \text{دستگاه دکارتی} \rightsquigarrow \text{ترکیب نمایی و مثلثاتی} \\ \text{دستگاه استوانه‌ای} \rightsquigarrow \begin{cases} k_1\varphi+k_2 \\ k_1\ln r+k_2 \\ \sum(A_n r^n+B_n r^{-n})(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi) \end{cases} \\ \text{دستگاه کروی} \rightsquigarrow \sum(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)})\,P_n(\cos\theta) \end{cases}$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

جوشنهای خازن مسطحی که در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ واقع شده‌اند (طبق شکل) به ترتیب در پتانسیلهای ۰ و ۱۰۰ ولت قرار دارند و $\epsilon = \epsilon_0(1 + x^2)$ می‌باشد. تغییرات ولتاژ بصورت زیر است (۶۷)



۱- $v = 100 \sin \frac{\pi x}{2}$

۲- $v = 100x$

۳- $v = 100(1 + x^2) - 100x$

۴- $v = \frac{400}{\pi} \tan^{-1} x$ ✓

پاسخ هوشمندانه

$$(\nabla\varepsilon)\cdot\vec{E} + (\nabla\cdot\vec{E})\varepsilon = 0$$

$$\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{\vec{E}} = -\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow E \propto \frac{k}{\varepsilon}$$

$$v = \int \frac{k}{\varepsilon} dx = \int \frac{k}{\varepsilon_0(1+x^2)} dx \quad (k \to k_1)$$

$$= k_1 \tan^{-1} x + k_2$$

شرایط مرزی تابع برداری پتانسیل $\vec{A}$ مغناطیسی ($\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$) برای مولفه‌های مماسی A_t و عمودی A_n عبارتست از: (۶۷)

۱- $A_{n1} = A_{n2}$ و $\mu_1 A_{t1} = \mu_2 A_{t2}$

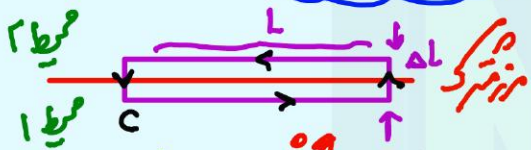
۲- $A_{n1} = A_{n2}$ و $A_{t1} = A_{t2}$

۳- $\mu_1 A_{n1} = \mu_2 A_{n2}$ و $A_{t1} = A_{t2}$ ✗

۴- $A_{n1} = A_{n2}$ و $A_{t1}/\mu_1 = A_{t2}/\mu_2$

پاسخ هوشمندانه

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0 \rightarrow A_{n1} = A_{n2}$$



$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint \cancel{\vec{B}}^{\,0}\cdot d\vec{s}$$

$$A_{t2}L - A_{t1}L = 0 \rightarrow A_t = A_{t2}$$

روی سطح کروی و سطح قاعدهٔ نیم کره‌ای بشعاع $r = a$ و $0 \le \varphi \le 2\pi$ و $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ در فضای آزاد، بارالکتریکی سطحی به چگالی ثابت ρ_s قرار دارد. پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات ($r = 0$) عبارت است از: (۶۷)

نقطه مشاهده

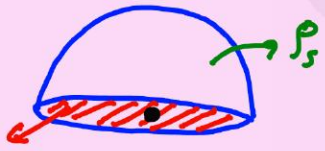
۱- $2\rho_s a/\epsilon_0$

۲- $-\rho_s \frac{a}{\epsilon_0}$ ✗

۳- صفر ✗

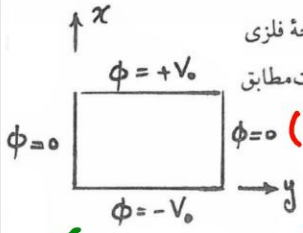
۴- $\rho_s \frac{a}{\epsilon_0}$ ✓

پاسخ هوشمندانه



$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_s a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 a} + \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{\rho_s\, \rho\, d\rho\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 \rho} = \frac{\rho_s a}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_s a}{2\varepsilon_0}$$

یک قطعه عایق کامل به ابعاد a و b و بطول بینهایت بین چهار صفحهٔ فلزی بینهایت که مقطع آن نشان داده شده‌است محصور می‌باشد. پتانسیل صفحات مطابق شکل داده شده‌اند. پتانسیل را درفضای داخل عایق محاسبه نمائید. (۶۷)



۱- $\phi = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \sinh[n\pi(x - \frac{a}{2})/b] \sin(\frac{n\pi y}{b}) / \sinh(n\pi a/2b)$

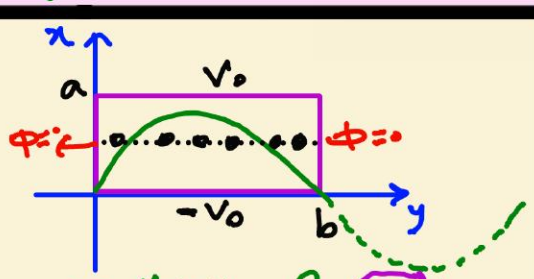
۲- $\phi = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \cosh[n\pi(x - \frac{a}{2})/b] \sin(\frac{n\pi y}{b}) / \cosh(n\pi a/2b)$ ✗

۳- $\phi = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \sinh[n\pi y/a] \sin(\frac{n\pi x}{b}) / \sinh(n\pi a/b)$ ✗

۴- $\phi = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \cosh[n\pi y/b] \sin(\frac{n\pi y}{a}) / \cosh(n\pi a/b)$ ✗

ترکیب مثلثاتی چهار بعدی

پاسخ هوشمندانه



$$\sin\frac{2\pi n y}{2b} = \sin\frac{n\pi y}{b}$$

if $x = \frac{a}{2} \rightarrow \phi = 0$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

در یک ماده غیر همگون (Inhomogeneous) و عاری از بار تغییرات ε درجهات x و y یکسان است یعنی $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ (۶۸)

$\nabla \varepsilon \neq 0$ $\rho = 0$

$$\nabla \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\hat{y}$$

۱- معادلات لاپلاس صادق است یعنی $\nabla^2 V = 0$

۲- معادلات لاپلاس درجهات x و y صادق است یعنی $\begin{cases}\nabla^2 V_x = 0\\ \nabla^2 V_y = 0\end{cases}$

۳- معادلات لاپلاس صادق نبوده و بجای آن $\varepsilon\nabla^2 V + \nabla V \cdot \nabla \varepsilon = 0$ صادق است. ✓

۴- $\nabla^2 V_z = 0$

$$\nabla \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(\hat{x} + \hat{y})$$

پاسخ هوشمندانه

$$(\nabla \varepsilon)\cdot \underbrace{\vec{E}}_{-\nabla V} + \underbrace{(\nabla \cdot \vec{E})}_{-\nabla^2 V}\varepsilon = 0$$

$$\varepsilon \nabla^2 V + \nabla V \cdot \nabla \varepsilon = 0$$

دسته سطوح هم پتانسیل توسط $y^2 = xy + c$ بیان می‌شوند و $E_z = 0$ است. در صورتی‌که در نقطه $\begin{matrix}2\\5\\0\end{matrix}$ مقدار $E_x = 20\,v/m$ باشد $\bar{E}$ بصورت: (۶۸)

$$\vec{E} = -\nabla V$$

۱- $\bar{E} = 4y\,\hat{a}_x + (4x - 8y)\,\hat{a}_y$ v/m ✓

۲- $\bar{E} = 20\,\hat{a}_x + 50\,\hat{a}_y$ v/m

۳- $\bar{E} = (100y - 50)^{\frac{1}{2}}\,\hat{a}_x$ v/m

۴- $\bar{E} = (6y - 5x)\,\hat{a}_x + y^2\,\hat{a}_y$ v/m

$$y^2 - xy = c \rightsquigarrow V = k(y^2 - xy)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y$$

$$= ky\,\hat{a}_x + k(x - 2y)\,\hat{a}_y$$

$$E_x\Big|_{y=5} = 20 \rightsquigarrow 5k = 20 \quad k = 4$$

ناحیه $3 < \rho < 5$ متر بین دو هادی استوانه‌ای شامل عایق غیرهموژن با $\varepsilon_r = \frac{1}{\rho^2}$ می‌باشد. (۶۹)

$\nabla \varepsilon \not\perp \vec{E}$

(a) آیا معادله لاپلاس در ناحیه بین دو استوانه صادق است.؟

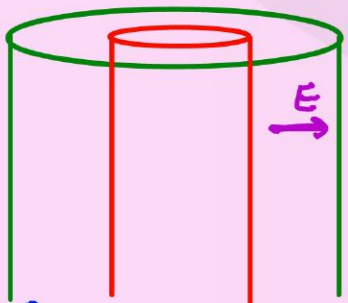
(b) اگر پتانسیل هادی داخلی ۱۰۰ ولت و پتانسیل هادی خارجی ۲۰ ولت باشد معادله پتانسیل را بدست آورید.

۱- معادله لاپلاس صادق است ✗ $V = 145 - 5\rho^2$

۲- معادله لاپلاس صادق نیست. ✗ $V = 272 - 156.6\ln\rho$

۳- معادله لاپلاس صادق نیست $V = 145 - 5\rho^2$

۴- معادله لاپلاس صادق است. ✗ $V = 272 - 156.6\ln\rho$



$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\rho} = \frac{k}{\varepsilon\rho} \cong k\rho$$

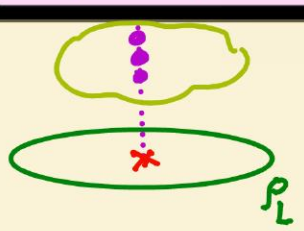
قسمتی ازفضا که عاری از بار الکتریکی است را درنظر می‌گیریم و تابع پتانسیل را با $V = V(r, \phi, \theta)$ نشان می‌دهیم، کدامیک از عبارات زیر صحیح است. (۶۹)

۱- تابع پتانسیل حتماً دارای ماکزیمم و یا مینیمم است که مطابقت دارد با صفر شدن شدت میدان الکتریکی E

۲- از آنجاکه تابع پتانسیل از بارهای موجود در خارج از فضای مورد بحث ناشی شده است ماکزیمم و می‌نیمم شدن آن بستگی بوضعیت آن بارها دارد. ✓

۳- هیچگونه قضاوتی در باره ماکزیمم و می‌نیمم پتانسیل نمی‌توان کرد زیرا تابع پتانسیل کلی است و می‌تواند انواع تغییرات را داشته باشد. ✗

۴- دراین قسمت ازفضا تابع پتانسیل فاقد ماکزیمم یامی‌نیمم است زیراباری وجود ندارد. ✗

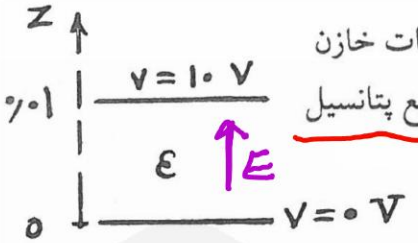


$$V = \frac{\rho_L R}{2\varepsilon\sqrt{R^2 + Z^2}}$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

ضریب نفوذالکتریکی نسبی بین صفحات خازن طبق رابطه $\varepsilon=\varepsilon_0 e^{-\alpha z}$ تغییر می‌کند تابع پتانسیل V چگونه است. (۶۹)



۱- $V=1000Z$ ✗

۲- $V=10\sin\frac{\pi z}{2\times 0.01}$ ✗

۳- $V=\frac{10[e^{\alpha z}-1]}{e^{0.01\alpha}-1}$

۴- $V=\frac{10[e^{-\alpha z}-1]}{e^{-0.01\alpha}-1}$ ✗

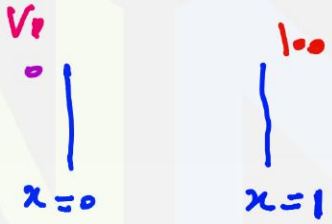
پاسخ هوشمندانه

$$E \propto \frac{k}{\varepsilon} = \frac{k}{\varepsilon_0 e^{-\alpha z}}$$

$$V=\int E\,dz = \int \frac{k}{\varepsilon_0} e^{+\alpha z}\,dz$$

$$= k_1 e^{\alpha z} + k_2$$

مطلوبست محاسبه پتانسیل را در $x=0.24$ در یک خازن با صفحات بینهایت و موازی، در حالیکه در $x=0$، $V=0$ و در $x=1$، $V=100$ ولت باشد. مابین دو صفحه خازن، دی الکتریک غیر همگن با مشخصات $\varepsilon=\varepsilon_0(1+x^2)$ پر شده است.



۱- ۳۰ V

۲- ۴۰ V

۳- ۵۰ V

۴- ۶۰ V

$$V=\int \frac{k}{\varepsilon(1+x^2)}\,dx$$

$$= k_1 \tan^{-1}x + k_2$$

$$x=0 \rightsquigarrow V=0 \rightsquigarrow k_2=0$$

$$x=1 \rightsquigarrow V=100 \rightsquigarrow k_1=\frac{\varepsilon_0 100}{\pi}$$

$$V=\frac{\varepsilon_0 100}{\pi}\tan^{-1}x$$

در داخل کره دی‌الکتریک بشعاع a و ضریب دی الکتریک (پرمیتیویته) ε بارهای آزاد با دانسیته حجمی $\rho=kr$ پخش شده است دراینجا k ثابت است و r فاصله نقطه داخل کره از مبدأ آن می‌باشد کره در خلاء قرار گرفته است پتانسیل در مرکز کره برابر است با: (V_0)

۱- صفر

۲- $V=\frac{ka^3}{12\varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon+3\varepsilon_0)$

۳- $V=\frac{ka^3(3\varepsilon+\varepsilon_0)}{12\varepsilon\varepsilon_0}$

۴- $V=\frac{ka^2}{4\varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon+\varepsilon_0)$

$$\frac{ka^3}{4\varepsilon_0}+\frac{ka^3}{12\varepsilon}$$

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\int_0^r kr(4\pi r^2 dr)}{4\pi\varepsilon r^2} \\[2ex] \dfrac{\int_0^a kr(4\pi r^2 dr)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\end{cases}$$

$$E_{in}=\frac{kr^2}{4\varepsilon}\hat{a}_r$$

$$E_{out}=\frac{ka^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$$

$$V(0)=-\int_{\infty}^{a}\frac{ka^4}{4\varepsilon_0 r^2}dr-\int_a^0\frac{kr^2}{4\varepsilon}dr$$

ناحیه بین دواستوانه، هم محور هادی با شعاعهای ۲cm و ۵cm دارای توزیع بار حجمی $-10^{-9}\varepsilon_0 C/m^3$ می‌باشد. اگر E_r و V هر دو در استوانه داخلی برابر با صفر باشند میزان V را در استوانه خارجی بدست آورید: (V_0)

$$\nabla^2 V=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\cancel{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

$$E=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial\rho}\hat{a}_\rho$$

۱- ۰/۳۸۷ V

۲- هیچکدام

۳- ۰/۶۵۳ V

۴- ۰/۷۰۸ V

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}=+10^{-9}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)=10^9$$

$$\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}=\frac{10^9}{2}\rho^2+k_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial\rho}=\frac{10^9}{2}\rho+\frac{k_1}{\rho}$$

$$V=\frac{10^9}{4}\rho^2+k_1\ln\rho+k_2$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

پتانسیل الکتریکی رادر ناحیه $y>0$ در فضا بصورت $\phi=\phi_0 e^{-\alpha x}\sin\alpha y$ فرض می‌کنیم (که درآن ϕ_0 و α اعداد ثابتی می‌باشند). اگر $y=0$ یک رسانای کامل باشد مقدار باری راکه در فاصلهٔ $0<x<\infty$ و $0<z<1$ در روی صفحه قرار دارد بدست آورید. (V1)

$$Q=\int_0^1\int_0^\infty \rho_s\,dx\,dz=\int_0^\infty -\alpha\phi_0 e^{-\alpha x}\varepsilon_0\,dx=-\phi_0\varepsilon_0$$

۱- $\frac{-\varepsilon_0\phi_0}{\alpha^2}$ ۲- $-\varepsilon_0\phi_0\alpha^2$

۳- $-\varepsilon_0\phi_0$ ۴- $+\varepsilon_0\phi_0$

ضریب دی الکتریک یک محیط نامحدود در سیستم مختصات کروی بصورت $\varepsilon(r)=\varepsilon_0(1+\frac{a}{r})$ داده شده است. مرکز یک کره کوچک هادی کامل به شعاع R که بار Q حمل می‌کند در $r=0$ قرار دارد. معادلهٔ تغییرات پتانسیل استاتیک V(r) در ناحیه $r>R$ (نسبت به مبداء پتانسیل در $r=\infty$) با رابطهٔ زیر داده می‌شود: K,a مقادیر ثابت هستند) (V1)

۱- $V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln\frac{K(a+r)}{r(a+k)}$ ✗

۲- $V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r(a+r)}$ ✗

۳- $V(r)=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}$ ✗

۴- $V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln\frac{a+r}{r}$ ✓

یک میلیون قطره کروی کوچک از مایع هادی بشعاعهای مساوی r در فضا بفاصله خیلی دور از یکدیگر قرار دارند. بهر قطره پتانسیل V ۱۰ (نسبت به مبداء بینهایت) اعمال شده است. نهایتاً از بهم پیوستن این قطرات کره‌ای یکنواخت ساخته می‌شود. پتانسیل این کره چقدر است؟ (V1)

$$\frac{4}{3}\pi R^3=10^6\frac{4}{3}\pi r^3$$

۱- 10^6 ولت ۲- 10^5 ولت

۳- 10^7 ولت ۴- 10^3 ولت

یک حباب توخالی از جنس مایع هادی بشعاع ۲ cm و ضخامت 10^{-3}cm دارای پتانسیل ۱۰۰۰ولت است، پتانسیل قطره‌ای که ازترکیدن حباب حاصل می‌شود چقدر است؟ (قطره و حباب راکروی فرض کنید) (V2)

$$V_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(2+10^{-3})\times10^{-2}}$$

۱- ۱۰٫۲۵۰ KV ۲- ۷٫۶۲۵ KV

۳- ۸٫۶۹۵ KV ۴- ۶٫۳۲۵ KV

پاسخ هوشمندانه

$E=-\nabla\phi$

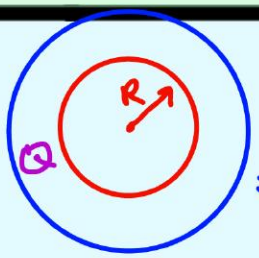
② $E=0$

$y=0$ رسانای کامل

① $E=0$

$$\varepsilon_0\frac{\partial V_2}{\partial y}-\varepsilon_0\cancel{\frac{\partial V_1}{\partial y}}=-\rho_s$$

$$\rho_s=-\varepsilon\frac{\partial V_2}{\partial y}\Big|_{y=0}=-\alpha\phi_0 e^{-\alpha x}\varepsilon_0$$



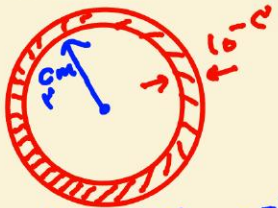
$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r(r+a)}\hat{a}_r$$

$$V(r)-\cancel{V(\infty)}=-\int_\infty^r\frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r(a+r)}$$

$$V_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\rightarrow Q=4\pi\varepsilon_0 r V_0$$

$$V=\frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{10^6 Q}{4\pi\varepsilon_0(100r)}$$

$$=\frac{10^6(\cancel{4\pi\varepsilon_0 r}V_0)}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}(100\cancel{r})}=10^5$$



$$Q=4\pi\varepsilon_0(2+10^{-3})$$

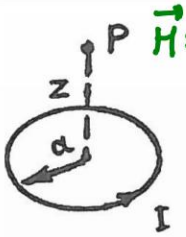
$$\cancel{\frac{4}{3}}\pi r^3=\cancel{\frac{4}{3}}\pi\left[(2+10^{-3})^3-(2)^3\right]$$

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

جریان I از یک حلقه دایره‌ای شکل به شعاع a می‌گذرد پتانسیل اسکالر مغناطیسی در نقطه P روی محور حلقه که در ارتفاع z قرار دارد برابر است با: (۷۴)



$\vec{H} = -\nabla V_m$

$\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}}$

$\int \frac{u\,du}{(a^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}$

۱- $\frac{I}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$ ✓

۲- $2I\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$

۳- $\frac{I}{2\pi}\left(1-\frac{2z}{\sqrt{a^2+4z^2}}\right)$

۴- $I\left(1-\frac{2z}{\sqrt{a^2+4z^2}}\right)$

صفحات شعاعی هادی کامل در $45°$ و $\varphi = 30°$ که از $r = 0.002\ m$ تا $r = 0.5\ m$ ادامه دارند، در دست است. اگر E_φ در $r = 0.2\ m$ و $\varphi = 36°$ برابر با $240\ v/m$ و در $\varphi = 45°$ پتانسیل برابر صفر درنظر گرفته شود به فرض اینکه تابع پتانسیل فقط تابع φ باشد (با توجه به خیلی بزرگ فرض کردن صفحات فلزی)، مطلوبست محاسبه اختلاف پتانسیل بین این دو صفحه. (۷۵)

$\nabla^2 v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$

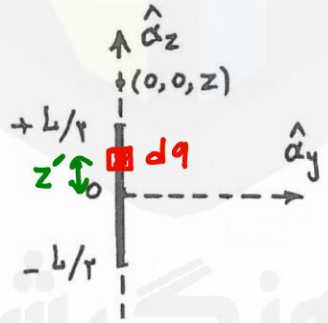
$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi + \frac{\partial v}{\partial z}\hat{a}_z$

$|\Delta V| = |K_1 \Delta\phi| = 240 \times \frac{\pi}{12}$

۱- 4π ۲- 5π ۳- 6π ۴- 7π

$-\frac{48\pi}{6} + K_2 = 0 \rightarrow K_2 = 12\pi$

پتانسیل الکتریکی بر روی محور Z در نقطهٔ (Z و ۰ و ۰) وقتی $Z > \frac{L}{2}$ است، برای یک توزیع بار الکتریکی خطی یکنواخت بطول L و چگالی بار ρ_l شکل مقابل را بدست آورید؟ (۷۶)



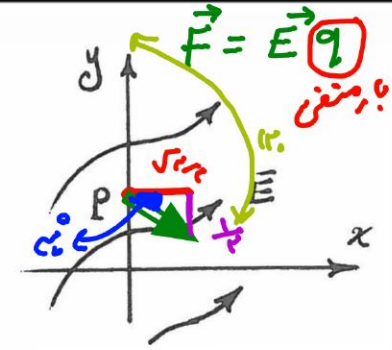
۱- $\Phi = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{Z-L/2}{Z+L/2}$

۲- $\Phi = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Z-L/2}{Z+L/2}\right)^2$ ✗

۳- $\Phi = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Z+L/2}{Z-L/2}\right)^2$ ✗

۴- $\Phi = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{Z+L/2}{Z-L/2}$ ✓

پتانسیل الکتریکی در صفحه $z = 0$ با رابطهٔ $\phi(x, y) = -e^{-x}\sin y$ داده شده است. اگر یک الکترون در نقطه $P(0, \frac{\pi}{3})$ قرار داده شود، زاویه بین محور yها و جهت شروع حرکت الکترون چند درجه است؟ (۷۷)



۱- ۳۰ ۲- ۶۰ ۳- ۱۲۰ ۴- ۱۵۰

پاسخ هوشمندانه

$\vec{H} = \frac{I a^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$

$+\frac{\partial V_m}{\partial z} = \frac{-I a^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$V_m = -\frac{I a^2}{2}\int \frac{dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$= -\frac{I}{2}\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} + K$

$\nabla^2 V = 0$

$V = K_1\varphi + K_2$

$E = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi$

$E = -\frac{K_1}{r}\hat{a}_\varphi$

$-5K_1 = 240 \rightarrow K_1 = -\frac{240}{5} = -48$

$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}|} = \int \frac{\rho_L\,dz'}{4\pi\varepsilon_0(z-z')}$

$= \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\ln(z-z')\right]_{(-\frac{L}{2})}^{(\frac{L}{2})}$

$= \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z+\frac{L}{2}}{z-\frac{L}{2}}$

الکترون در خلاف جهت میدان حرکت می‌کند.

$\vec{E} = -\nabla V\Big|_{(0,\frac{\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_y$

جهت حرکت الکترون ←

$\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x - \frac{1}{2}\hat{a}_y$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

چگالی بار الکتریکی یکنواخت $\rho_0 \left(\frac{C}{m^3}\right)$ در حجم کره‌ای از عایق کامل به شعاع a و ضریب دی‌الکتریک ε حضور دارد. پتانسیل الکتریکی داخل عایق چقدر است؟ (۷۷)

۱- $\frac{\rho_0}{6\varepsilon} a^2 - \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} r^2$

۲- $\frac{\rho_0}{6(\varepsilon - \varepsilon_0)} (a^2 - r^2)$

۳- $\frac{\rho_0}{6} \left[\frac{a^2}{\varepsilon - \varepsilon_0} + \frac{r^2}{\varepsilon_0}\right]$

۴- $\frac{\rho_0}{6\varepsilon} (a^2 - r^2) + \frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}$ ✓

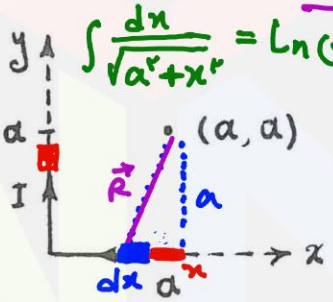
پاسخ هوشمندانه

ε_0

ε یکنواخت ρ

$$V = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{6\varepsilon}(a^2 - r^2)$$

دو قطعه سیم نازک مستقیم با جریان I بطول a مطابق شکل دو ضلع یک مربع را تشکیل می‌دهند. بردار پتانسیل مغناطیسی $\bar{A}$ در گوشهٔ مقابل چقدر است؟ (۷۷)



$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$$

۱- $\bar{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(1 + \sqrt{2})(\hat{a}_y - \hat{a}_x)$ ✓

۲- $\bar{A} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi a} (\hat{a}_y + \hat{a}_x)$ ✗

۳- $\bar{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\hat{a}_y + \hat{a}_x)$ ✗

۴- $\bar{A} = \frac{\pi_0 I \ln(1 + \sqrt{2})}{4\pi a} (\hat{a}_y - \hat{a}_x)$ ✗

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\,dx(-\hat{a}_x)}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)\Big|_0^a (-\hat{a}_x)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(1+\sqrt{2})(-\hat{a}_x)$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(1+\sqrt{2})(\hat{a}_y)$$

پتانسیل الکتریکی را در ناحیهٔ $z > 0$ در خلاء به‌صورت $V = V_0 e^{-kz}\sin(kz)$ فرض می‌کنیم، که در آن V_0 و k اعداد ثابتی می‌باشند. اگر سطح $z = 0$ یک رسانای کامل باشد، مقدار بار نوار $0 < x < \infty$ و $0 < y < 1$ واقع بر صفحه $z = 0$ را به‌دست آورید. (۷۹)

۱) $-\varepsilon_0 V_0$

۲) $+\varepsilon_0 V_0$

۳) $-\frac{\varepsilon_0 V_0}{k^2}$

۴) $\frac{\varepsilon_0 V_0}{k^2}$

$E = -\nabla V$ ②

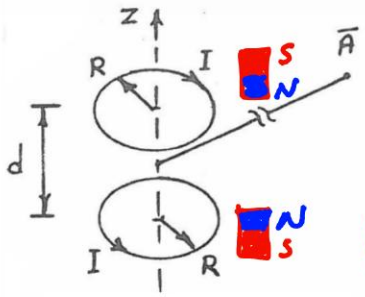
$Z = 0$

① داخل رسانا $E = 0$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial V_2}{\partial Z} - \cancel{\varepsilon_0 \frac{\partial V_1}{\partial Z}} = -\rho_s$$

$$\rho_s = -\varepsilon_0 \frac{\partial V_2}{\partial Z} = \dots$$

فاصله مراکز دو حلقه سیم دایروی مشابه از یکدیگر d بوده و جریان حلقه‌ها نظیر شکل مساوی و مختلف العلامه است. در فواصل بسیار دور، یعنی $r >> d$ و $r >> R$، بردار پتانسیل $\vec{A}$ با کدام گزینه متناسب است؟ (۸۰)



۱) $\frac{1}{r^2}$

۲) $\frac{1}{r^3}$ ✓

۳) $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$

۴) $\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}$

۴ قطبی مغناطیسی $\rightarrow 2^n = 4$

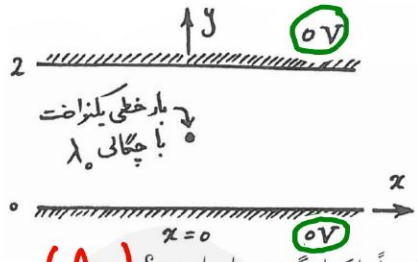
$n = 2$

$$A \propto \frac{1}{r^{n+1}} \propto \frac{1}{r^3}$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

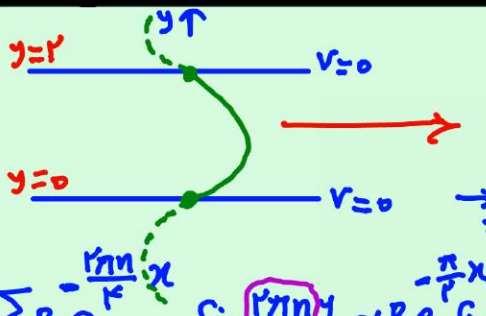
بار خطی یکنواخت به چگالی λ_0 همانند شکل، به موازات محور z و در وسط دو صفحهٔ رسانای موازی که دارای پتانسیل صفر هستند، واقع گردیده است. چنانچه در نقطهٔ A به مختصات $(x,y) = (20,1)$ پتانسیل الکتریکی $0/1V$ باشد، پتانسیل در نقطهٔ $(x,y) = (22,1)$ تقریباً با کدام گزینه برابر است؟ (۸۰)



(راهنمائی: نقطهٔ A نسبت به بار خطی بسیار دور است)

۱) $\frac{e^{-\pi}}{10}$ ۲) $\frac{\lambda_0}{10\varepsilon_0}e^{-\pi}$ ۳) $0/1\left(1-\ln\frac{22}{20}\right)$ ۴) $0/1-\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{22}{20}\right)$

پاسخ هوشمندانه



$$\sum B_n e^{-\frac{2\pi n}{4}x}\sin\frac{2\pi n}{4}y \simeq B_1 e^{-\frac{\pi}{2}x}\sin\frac{\pi}{2}y$$

$$B_1 = 0/1\, e^{10\pi}$$

$$\downarrow x=22 \quad 0/1 e^{-\pi}$$

$y=1$

کره‌ای از دی‌الکتریک با ضریب نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon = 2\varepsilon_0$، به شعاع a با چگالی بار حجمی ثابت ρ ساخته شده است. پتانسیل الکتریکی در مرکز کره کدام است؟ (۸۱)

۱) $\frac{a^2\rho}{12\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{a^2\rho}{4\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{5a^2\rho}{6\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{5a^2\rho}{12\varepsilon_0}$

ε_0

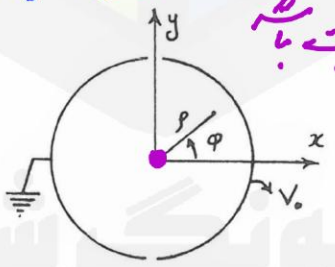
$\varepsilon = 2\varepsilon_0$

ρ یکنواخت

$$V = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho(a^2-r^2)}{6(2\varepsilon_0)}$$

$$V\big|_{r=0} = \frac{5\rho a^2}{12\varepsilon_0}$$

شکل جواب معادلهٔ لاپلاس در داخل دو نیم استوانه طویل با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل زیر چگونه است؟ (A_n، B_n و D ضرایب ثابت هستند). (۸۱)



توان r باید مثبت باشد

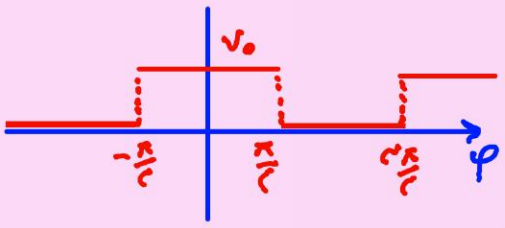
۱) $V(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_n(\rho)$ ✗

۲) $V(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(\rho)$ ✗

۳) $V(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\rho^n\cos n\varphi + \frac{V_0}{2}$

۴) $V(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n\cos n\varphi + B_n\rho^n\sin n\varphi) + D\ln\rho$ ✗

$$V = \sum\left[A_n r^n + B_n r^{-n}\right]\left[C_n\cos n\varphi + d_n\sin n\varphi\right]$$

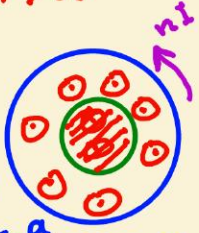


در فضای خالی از یک سیم پیچ استوانه‌ای نامحدود (سیملوله) به شعاع a جریان ثابت I می‌گذرد. تعداد دورهای سیم پیچ بسیار زیاد و n دور بر واحد طول فرض می‌شود. پتانسیل برداری $\bar{A}$ داخل سیم پیچ و در فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از محور آن (محور z) با کدام عبارت بیان می‌شود؟ (۸۳)

۱) $\mu_0 nIa\hat{\varphi}$ ۲) $\frac{\mu_0 nIa^2}{4}\hat{\varphi}$ ✗ ۳) $\frac{\mu_0 nIa}{4}\hat{\varphi}$ ✓ ۴) $\frac{\mu_0 nIa}{2}\hat{\varphi}$

$$\vec{B} = \begin{cases}\mu_0 nI\,\hat{z} & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{s}$$



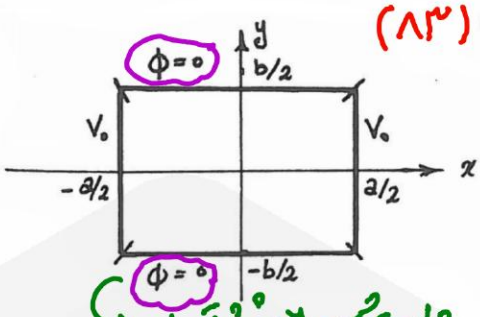
$$A(2\pi r) = \mu_0 nI(\pi r^2)$$

$$A = \frac{\mu_0 nI}{2}r \xrightarrow{r=\frac{a}{2}} \frac{\mu_0 nIa}{4}$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

اگر بخواهیم توزیع پتانسیل را در داخل شکل زیر به دست بیاوریم کدام یک از جواب‌های زیر می‌تواند مناسب باشد؟ (۸۳)



۱) $\sum A_n \cos(k_n x)\cos(k_n y)$

۲) $\sum A_n \cosh(k_n x)\cosh(k_n y)$

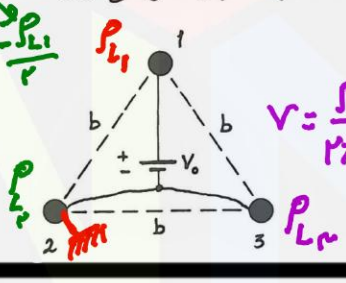
۳) $\sum A_n \cos(k_n x)\cosh(k_n y)$

۴) $\sum A_n \cosh(k_n x)\cos(k_n y)$

جواب برحسب y متناوب است

پاسخ هوشمندانه

سه سیم رسانای بسیار بلند هر یک به شعاع a که در رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع b و عمود بر صفحه قرار دارند، مفروضند. توسط یک سیم نازک رساناهای ۲ و ۳ به یکدیگر متصل شده و به قطب منفی یک منبع ولتاژ وصل می‌شوند. قطب مثبت منبع ولتاژ با سیم بسیار نازکی به رسانای ۱ اتصال می‌یابد. اگر $a << b$ باشد، بار الکتریکی در واحد طول رسانای ۱ چند کولمب بر متر خواهد بود؟ (۸۳)



$V=\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$

۱) $\frac{\pi\varepsilon_0 V_0}{\ln[\frac{b}{a}]}$

۲) $\frac{\pi\varepsilon_0 V_0}{3\ln[\frac{b}{a}]}$

۳) $\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{3\ln[\frac{b}{a}]}$

۴) $\frac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{3\ln[\frac{b}{a}]}$

$V_2=V_3=0 \qquad V_1=V_0$

$\rho_{L_1}+\underbrace{\rho_{L_2}+\rho_{L_3}}_{2\rho_{L_2}}=0 \quad , \quad \rho_{L_2}=\rho_{L_3}$

$V_1=V_0=\frac{\rho_{L_1}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}+\frac{\rho_{L_2}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b}+\cancel{\frac{\rho_{L_3}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{b}}$

$\rho_{L_2}=-\frac{\rho_{L_1}}{2}$

$V_0=\frac{3\rho_{L_1}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \rightarrow \rho_{L_1}=\frac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{3\ln\frac{b}{a}}$

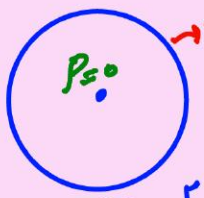
در مختصات کروی پتانسیل الکتریکی روی سطح کره‌ای به شعاع r به مرکز مبدأ مختصات که هیچ‌بار الکتریکی را احاطه نمی‌کند به صورت $V=\cos^2\theta$ تغییر می‌کند. پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات چقدر است؟ (۸۴)

۱) ۰

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۱



$\rightarrow V=\cos^2\theta$

$V=\frac{\iint \cos^2\theta\, \cancel{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi\cancel{r^2}}$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta=\frac{1}{3}$

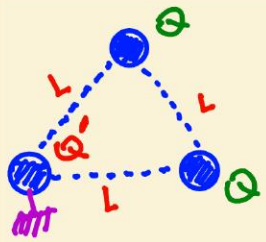
سه کره رسانای یکسان به شعاع a در گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع l ($l>>a$) قرار گرفته‌اند. در ابتدا بار هر کره Q بوده است. یکی از کره‌ها به زمین متصل می‌شود تا به حالت تعادل برسد. بار کره زمین شده تقریباً برابر است با: (۸۴)

۱) صفر

۲) $-\frac{aQ}{l}$

۳) $-\frac{2aQ}{l}$

۴) $-\frac{a^2Q}{l^2}$



$Q'=-\frac{2a}{L}Q$

$0=\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 a}+2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

صفحه $y = 0$ یک رسانای کامل است. برای $y > 0$ برای پتانسیل الکتریکی داریم $V(x,y) = V_0 e^{-ax} \sin ay$. بار موجود روی صفحه xz برای $0 < x < \infty$ و $0 < z < 1$ چقدر خواهد بود؟ (۸۵)

۱) $-V_0\varepsilon_0$ ۲) $\frac{1}{2}V_0\varepsilon_0$ ۳) $V_0\varepsilon_0$ ۴) $-2V_0\varepsilon_0$

پاسخ هوشمندانه

② $E_2 = -\nabla V$ ↑y

$y=0$

① $E_1 = 0$

$$\rho_s = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$Q = \int_0^1\int_0^\infty \rho_s \, dx\, dz$$

پایه هرانیم در فضای خالی روی سطح کره‌ای به شعاع a چگالی بارهای سطحی الکتریکی به صورت $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ فرض شده است (σ_0 ثابت است). پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج کره به صورت زیر بدست آمده است:

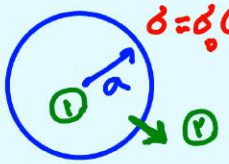
$$\begin{cases} V_i = Ar\cos\theta & r < a \\ V_0 = \frac{B}{r^2}\cos\theta & r > a \end{cases}$$

ضرایب A و B به ترتیب عبارتند از: (۸۵)

۱) $\frac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0}, \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{\sigma_0 a^2}{3\varepsilon_0}, \frac{\sigma_0}{3a\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{\sigma_0 a^4}{\varepsilon_0}, \frac{\sigma_0 a}{\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{\sigma_0 a^3}{\varepsilon_0}, \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

$A = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$

$B = \frac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0}$



$$\left(\varepsilon_0 \frac{\partial V_2}{\partial r} - \varepsilon_0 \frac{\partial V_1}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = -\sigma_0 \cos\theta$$

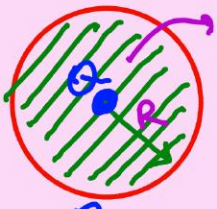
$$-\frac{2B}{a^3} - A = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$V_1\Big|_{r=a} = V_2\Big|_{r=a} \rightarrow Aa = \frac{B}{a^2}$$

مورد خاص

در مرکز یک ابر کروی به شعاع R که دارای بار کل Q − (پخش شده به‌طور یکنواخت) است، یک بار نقطه‌ای Q قرار گرفته است. پتانسیل در نقطه‌ای به فاصلهٔ $\frac{R}{2}$ از مرکز کدام است؟ (۸۶) مورد خاص

۱) $\frac{-3Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$ ۲) $\frac{3Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$ ۳) $\frac{5Q}{32\pi\varepsilon_0 R}$ ۴) $\frac{5Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$



$$\rho = \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (\frac{R}{2})}$$

$$V_2 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right)$$

یک کره رسانا به مرکز مبداء مختصات با شعاع R به پتانسیل V_0 وصل شده است و با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z دوران می‌کند. اندازه چگالی جریان سطحی الکتریکی روی سطح کره کدام است؟ (۸۷)

۱) $\frac{1}{2}\varepsilon_0\omega V_0 \cos\theta$ ۲) $\varepsilon_0\omega V_0$ ۳) $\varepsilon_0\omega V_0 \cos\theta$ ۴) $\varepsilon_0\omega V_0 \sin\theta$

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$J_s = \rho_s \rho \omega$$

$\rho \rightarrow R\sin\theta$

$$J_s = \frac{4\pi\varepsilon_0 V_0 R}{4\pi R^2}(R\sin\theta)\omega$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

بین صفحات مسطح خازنی که در $z=0$ و $z=d$ قرار دارند، ماده‌ای عایق با $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})$ قرار دارد. اگر چگالی بار سطحی روی صفحات این خازن $\pm\rho_s\left(\frac{C}{m^2}\right)$، اختلاف ولتاژ بین صفحات خازن چقدر است؟ (۸۸)

$E \propto \frac{\rho_s}{\varepsilon}$

۱) $\frac{\rho_s d}{2\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{2\pi\rho_s d}{\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{\rho_s \pi d}{4\varepsilon_0}$ ✓

در فضای خالی تابع پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌ی داخل کره‌ای به شعاع ۳ متر به صورت $V(x,y,z)=6x^2-5y+4z^2$ داده شده است. کل بار موجود در داخل این کره کدام است؟ $\left(\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\frac{F}{m}\right)$ (۸۸)

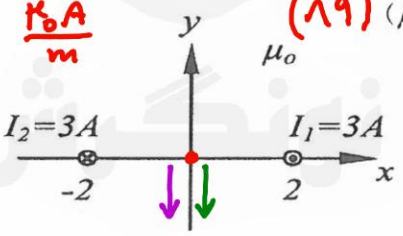
V داده شده

بار خواسته شده

۱) $-80nC$ ۲) $-20nC$ ✓ ۳) $-10nC$ ۴) $-4nC$

جریان‌های رشته‌ای I_1 و I_2 به موازات محور z همانند شکل در فضای خالی ایجاد شده‌اند. محل، جهت و مقدار دو جریان رشته‌ای در شکل داده شده است. اگر $\vec{A}$ بردار پتانسیل مغناطیسی ناشی از این دو جریان باشد، آنگاه مقدار مشتق نسبی $\frac{\partial}{\partial x}A_z$ در نقطه (۰،۰،۰) کدام است؟ (می‌دانیم $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\frac{H}{m}$) (۸۹)

$\frac{\mu_0 A}{m}$

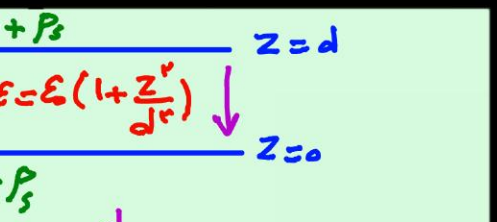


۱) -6×10^{-7} ۲) 3×10^{-7} ۳) -3×10^{-7} ۴) 6×10^{-7}

از یک سیم‌پیچ استوانه‌ای نامحدود (سیملوله) جریان ثبت I می‌گذرد. تعداد دورها بسیار زیاد و n دور بر واحد طول فرض می‌شود. بردار پتانسیل مغناطیسی $\vec{A}$ خارج از سیم‌پیچ و در فاصلهٔ r از محور آن (محور z) با کدام عبارت بیان می‌شود؟ (شعاع سیم‌پیچ را a و جهت جریان آن را $\hat{\varphi}$ فرض کنید.) (۸۹)

۱) $\frac{\mu_0 nIa^2}{2r}\hat{\varphi}$ ✓ ۲) $\frac{\mu_0 nIr}{2}\hat{\varphi}$ ✗ ۳) $\frac{\mu_0 nIa}{2}\hat{\varphi}$ ✗ ۴) $\frac{\mu_0 nIa^2}{2\pi r}\hat{\varphi}$ ✗

پاسخ هوشمندانه



$$\Delta V=\int_0^d \frac{\rho_s}{\varepsilon_0(1+\frac{z^2}{d^2})}dz=\frac{\rho_s\pi d}{4\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rho=-\varepsilon_0\nabla^2 V=-20\varepsilon_0$$ عدد ثابت

$$Q=\rho\left(\frac{4}{3}\pi(3)^3\right)$$

$$=-20\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times36\pi$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & A_z\end{vmatrix}$$

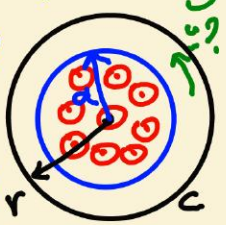
در جهت $-\hat{a}_y$

$$\vec{B}=-\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{a}_y=2\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right](-\hat{a}_y)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}=\frac{\mu_0 I}{\pi r}=6\times10^{-7}$$

$\mu_0 \to 4\pi\times10^{-7}$, $I\to3$, $r\to2$

$$\vec{B}=\begin{cases}\mu_0 nI & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$



$$\oint_c \vec{A}\cdot d\vec{l}=\iint \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$A(2\pi r)=\mu_0 nI(\pi a^2)$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0 nIa^2}{2r}\hat{\varphi}$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

$ds = r\sin\theta\, d\varphi\, dr$

در دستگاه مختصات کروی روی سطح مخروط $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$ برای $0 < r < a$ بار سطحی الکتریکی غیریکنواخت با چگالی $\rho_s = r^2$ کولن بر متر مربع توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات کدام است؟ (مرجع پتانسیل در بی‌نهایت فرض می‌شود.)

(۸۹)

۱) $\frac{a^2}{12\varepsilon_0}$ ✓ ۲) $\frac{a^3}{6\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{a^3}{12\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{a^2}{6\varepsilon_0}$

پاسخ هوشمندانه

$$V = \iint \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

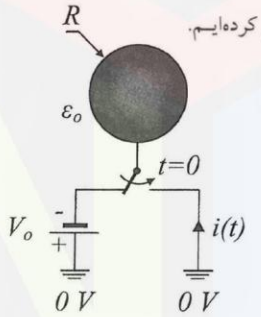
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r^2(r\sin\theta\, d\varphi\, dr)}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \sin\theta \to \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_0^a r^2 dr = \frac{a^3}{12\varepsilon_0}$$

کره‌ای رسانا به شعاع $R = 2m$ در فضای خالی قرار گرفته است. همانند شکل این کره برای مدت زمان طولانی به منبع ولتاژ مستقیم $V_0 = 10V$ با علامت نشان داده شده در شکل متصل بوده است. در لحظهٔ $t = 0$ همانند شکل کره را به ولتاژ صفر متصل کرده‌ایم.

حاصل انتگرال $\int_{0^-}^{\infty} i(t')dt'$ کدام است؟ ($i(t)$ در شکل ملاحظه می‌شود.) (۸۹)

$\frac{dQ}{dt}\, dt$



۱) $-40\pi\varepsilon_0$ ۲) $40\pi\varepsilon_0$ ۳) $80\pi\varepsilon_0$ ✓ ۴) $-80\pi\varepsilon_0$

پاسخ هوشمندانه

$$V = -10 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$Q(0^-) = -80\pi\varepsilon_0$$

$$Q(\infty) = 0$$

$$\int_{0^-}^{\infty} i(t')dt' = Q(\infty) - Q(0^-) = 80\pi\varepsilon_0$$

در فضای خالی در ناحیهٔ $0 \le r \le a$ ، $0 \le \varphi < 2\pi$ ، $|z| < h$ از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای بارهای الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت ρ توزیع شده‌اند. پتانسیل الکتریکی ناشی از این توزیع بار در محل مبدأ مختصات یک ولت است. اگر a و h هر دو نصف شوند ولی ρ بدون تغییر بماند، آنگاه پتانسیل الکتریکی در محل مبدأ مختصات چند ولت خواهد بود؟ (۸۹)

حجم $\frac{1}{8}$ برابر شده

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ✓ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) ۱

پاسخ هوشمندانه

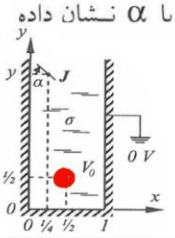
$$V = \frac{\rho(\text{حجم})}{4\pi\varepsilon_0(\text{شعاع})}$$

حجم $\to$ $\frac{1}{8}$ برابر

شعاع $\to$ $\frac{1}{2}$ برابر

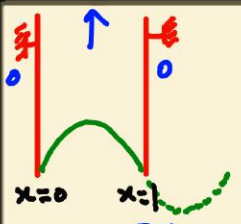
یک استوانهٔ رسانا که به ولتاژ مستقیم V_0 متصل است همانند شکل در محل $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ در داخل یک کانال آب با رسانایی σ قرار دارد. دیواره‌های کانال یعنی صفحات $x = 0$، $x = 1$ و $y = 0$ همگی در پتانسیل صفر ولت قرار دارند. زاویهٔ خطوط چگالی جریان $\vec{J}$ در داخل آب در محل $x = \frac{1}{4}$ برای $y \gg 1$ که در شکل با α نشان داده شده، کدام است؟ (۸۹)

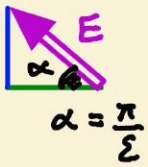
$\vec{J} = \sigma\vec{E}$



۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

پاسخ هوشمندانه





$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$V = ke^{-\pi y}\sin\pi x$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\pi k e^{-\pi y}\cos\pi x\,\hat{a}_x + \pi k e^{-\pi y}\sin\pi x\,\hat{a}_y$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

بار حجمی یکنواخت با چگالی ثابت ρ_0 کولن بر متر مکعب، در حجمی به شکل نیم‌کره به شعاع a توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای از قاعدهٔ نیمکره به فاصلهٔ a/۲ از مرکز نیمکره چند ولت است؟ (۹۰)

۱) $\frac{11}{48}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{11}{24}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$

۳) $\frac{3}{24}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{3}{48}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$

پاسخ هوشمندانه

$$V=\frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}+\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(a^2-r^2)$$

کره

$$V=\frac{1}{2}\left[\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}+\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(a^2-\frac{a^2}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{11}{48}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$$

شدت میدان مغناطیسی در نیم فضای $0<x<\infty$ که هیچ جریان الکتریکی در آن وجود ندارد به صورت $\vec{H}=\exp(-bx)\left(3\sin(2y)\hat{x}+a\cos(2y)\hat{y}\right)$ داده شده که در آن a و b اعداد ثابت و مجهول هستند. پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}=A_z(x,y)\hat{z}$ در این ناحیه کدام است؟ (۹۰)

۱) $A_z=\frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\sin 2y+c$ ✗

۲) $A_z=-\frac{3}{2}\mu_0 e^{-2x}\sin 2y+c$ ✗

۳) $A_z=\frac{3}{2}\mu_0 e^{2x}\cos 2y+c$ ✗

۴) $A_z=-\frac{3}{2}\mu_0 e^{-2x}\cos 2y+c$ ✓

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & A_z\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}=3\mu_0 e^{-2x}\sin 2y$$

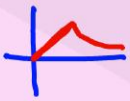
$$A_z=-\frac{3\mu_0}{2}e^{-2x}\cos 2y+c$$

استوانهٔ توپری از جنس یک مادهٔ مغناطیسی رسانا با ضریب نفوذپذیری نسبی $\mu_r=4\pi$ دردست است. محور این استوانه بر محور z منطبق می‌باشد. شعاع استوانه a، طول آن بی‌نهایت و کل جریان عبوری از آن در جهت $\hat{z}$ برابر I است. بردار پتانسیل مغناطیسی $\vec{A}$ با فرض یکنواخت بودن توزیع جریان در داخل استوانه کدام است؟ فرض کنید در $r=a$ داشته باشیم $\vec{A}=0$. (۹۱)

$J=\frac{I}{\pi a^2}$

۱) $\frac{\mu_0 I}{4}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\hat{z}$ ✗ ۲) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\hat{z}$ ✗ ۳) $\frac{\mu_0 I}{\pi}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\hat{z}$ ✗ ۴) $\mu_0 I\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\hat{z}$

$$\vec{B}=\begin{cases}\frac{\mu J r}{2}\hat{\varphi}\\ \frac{\mu_0 J a^2}{2r}\end{cases}$$



$$\vec{B}_{\text{داخل}}=\frac{\mu_0(4\pi)I}{2\pi a^2}r\,\hat{\varphi}=\frac{2\mu_0 I}{a^2}r\hat{\varphi}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\longrightarrow\vec{A}=\mu_0 I\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

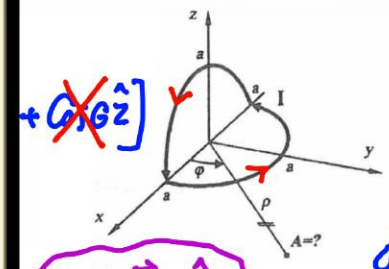
جریان مستقیم I مطابق شکل در یک مدار بسته شامل دو نیم دایرهٔ عمود بر هم جاری است. پتانسیل برداری $\vec{A}(\rho,\varphi,z=0)$ در فواصل خیلی دور از مدار و در صفحهٔ $z=0$ کدام است؟ (۹۱)

$\theta=\frac{\pi}{2}$

تقریب دوقطبی

۱) $\frac{\mu_0 I a^2}{8\rho^2}\left[(\hat{y}-\hat{z})\sin\varphi-\hat{x}\cos\varphi\right]$ ۲) $\frac{\mu_0 I a^2}{8\rho^2}\left[(\hat{y}+\hat{z})\cos\varphi+\hat{x}\sin\varphi\right]$

۳) $\frac{\mu_0 I a^2}{8\rho^2}\left[(\hat{y}-\hat{z})\cos\varphi-\hat{x}\sin\varphi\right]$ ✓ ۴) $\frac{\mu_0 I a^2}{8\rho^2}\left[(\hat{y}+\hat{z})\sin\varphi+\hat{x}\cos\varphi\right]$



$$\vec{A}=\frac{\mu_0\vec{m}\times\hat{a}_r}{4\pi r^2}$$

$$\vec{m}=\frac{\pi a^2 I}{2}\hat{z}+\frac{\pi a^2 I}{2}\hat{y}$$

$$\vec{m}\times\hat{r}=\vec{m}\times\left[\sin\theta\cos\varphi\hat{x}+\sin\theta\sin\varphi\hat{y}+\cancel{\cos\theta}\hat{z}\right]$$

$$=\vec{m}\times\left[\cos\varphi\hat{x}+\sin\varphi\hat{y}\right]$$

$$=\frac{\pi a^2 I}{2}\left[\cos\varphi\hat{y}-\sin\varphi\hat{x}-\cos\varphi\hat{z}\right]$$

$$=\frac{\pi a^2 I}{2}\left[(\hat{y}-\hat{z})\cos\varphi-\sin\varphi\hat{x}\right]$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

ناحیهٔ $d < x < 2d$ از عایقی با ضریب گذردهی غیریکنواخت به‌صورت $\varepsilon(x) = 4\varepsilon_0 x/d$ پرشده است. اگر پتانسیل الکتریکی در صفحهٔ $x = d$ و $x = 2d$ به ترتیب صفر و V_0 باشد، آنگاه تابع پتانسیل الکتریکی در ناحیهٔ $d < x < 2d$ کدام است؟ (۹۱)

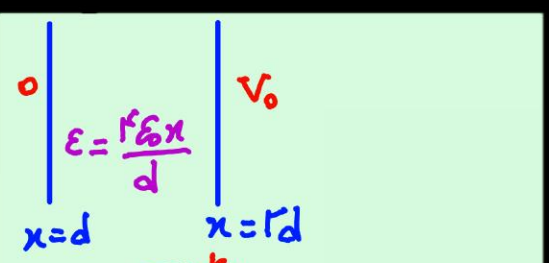
۱) $\dfrac{V_0}{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}\ln\left(\dfrac{4}{3}\dfrac{x}{d}-\dfrac{1}{3}\right)$

۲) $\dfrac{V_0}{3}\left(\left(\dfrac{x}{d}\right)^2-1\right)$

۳) $V_0\left(\dfrac{x}{d}-1\right)$

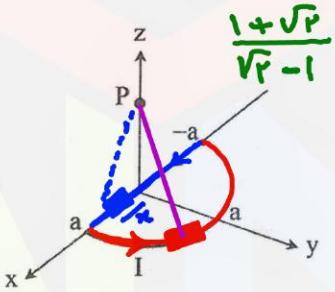
۴) $V_0\dfrac{1}{\ln 2}\ln\dfrac{x}{d}$

پاسخ هوشمندانه



$$V = \int \frac{\overset{k_1}{k d}}{4\varepsilon_0 x}\,dx = k_1 \ln x + k_2$$

حلقهٔ جریان شامل یک نیم دایره پاره‌خط به طول $2a$، هر دو روی صفحهٔ xy به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a و یک مطابق شکل زیر داده شده است. اگر بدانیم $\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \ln\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$ است؛ پتانسیل مغناطیسی برداری در نقطهٔ $P(0,0,a)$ کدام است؟ (۹۲)



۱) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left[2\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right]\hat{a}_x$

۲) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right]\hat{a}_x$

۳) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right]\hat{a}_x$

۴) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right]\hat{a}_x$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{L}}{|\vec{R}|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{I\,a\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi}{a\sqrt{2}} \qquad \hat{a}_\varphi \to -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cancel{\cos\varphi\,\hat{a}_y}$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-a}^{a} \frac{I\,dx\,\hat{a}_x}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}$$

بارهای نقطه‌ای مثبت Q_i در نقاط $(0,0,z_i)$ قرار گرفته‌اند. با فرض $Q_i = \frac{1}{3^i}(C)$ و $z_i = 3^i(m)$، $i = 0,1,2,\ldots$، مقدار پتانسیل در مبدأ مختصات کدام است؟ فرض کنید پتانسیل در بی‌نهایت برابر صفر باشد. (۹۲)

۱) $V = \dfrac{3}{16\pi\varepsilon_0}$

۲) $V = \dfrac{9}{16\pi\varepsilon_0}$

۳) $V = \dfrac{9}{32\pi\varepsilon_0}$

۴) $V = \dfrac{3}{32\pi\varepsilon_0}$

$z=9$ ● $Q_2 = \frac{1}{9}$

$z=3$ ● $Q_1 = \frac{1}{3}$

$z=1$ ● $Q_0 = 1$

$z=0$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(9)} + \cdots = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}{1-\frac{1}{9}}$$

اگر روی صفحه $x = 0$ بار سطحی با چگالی $\rho_s = \rho_0 \cos\alpha_1 y \cos\alpha_2 z$ توزیع شده باشد پتانسیل الکتریکی (V_1) در $x > 0$، کدام است؟ (۹۳)

۱) $\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$

۲) $\dfrac{2\rho_0}{\varepsilon_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$

۳) $\dfrac{\rho_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{4\varepsilon_0}e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$

۴) $\dfrac{4\rho_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{\varepsilon_0}e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$

$$V_2 = k\,e^{-\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$$

$$V_1 = k\,e^{+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,x}\cos\alpha_1 y\cos\alpha_2 z$$

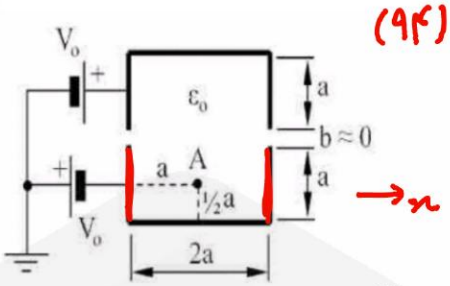
$$\varepsilon_0\frac{\partial V_2}{\partial x} - \varepsilon_0\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\rho_s$$

$$2\varepsilon_0 k\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} = \rho_0 \rightarrow k = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}$$

بررسی سوالات کنکور سالهای گذشته

سوالات کنکور سالهای گذشته

از دو قطعهٔ رسانا با طول بی‌نهایت که سطح مقطع آنها به شکل حرف U است، ساختار شکل زیر تهیه شده است. طبق شکل، پتانسیل الکتریکی این دو قطعه Vo+ و Vo- فرض می‌شود. با توجه به ابعاد مشخص شد در شکل، پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ A کدام است؟ (۹۴)



۱) $\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4V_0}{m\pi}(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{sh(\frac{m\pi}{4})}{sh(\frac{m\pi}{2})}$ ✓

۲) $\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4V_0}{m\pi}(-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{sh(\frac{m\pi}{4})}{sh(\frac{m\pi}{2})}$ ✗

۳) $\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4V_0}{m\pi}(-1)^{\frac{m-1}{2}} sh(\frac{m\pi}{4})$ ✗

۴) $\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4V_0}{m\pi}(-1)^{\frac{m+1}{2}} sh(\frac{m\pi}{4})$

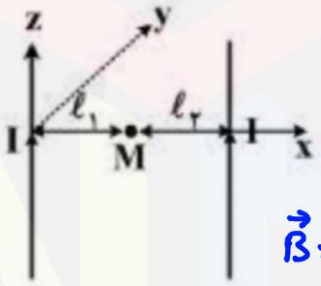
پاسخ هوشمندانه

$$\sum k_n \sinh\frac{2\pi n y}{4a} \cos\frac{2\pi n x}{4a}$$

$$V_0 = \sum \underbrace{k_n \sinh\frac{n\pi}{2}}_{A_n} \cos\frac{n\pi x}{2a}$$

$$A_n = \dots \longrightarrow k_n = \frac{A_n}{\sinh\frac{n\pi}{2}}$$

دو سیم راست موازی بی‌نهایت‌طویل با جریان‌های مساوی و هم‌جهت I مفروض است. در نقطهٔ M که از سیم‌ها فاصلهٔ ℓ_1 و ℓ_2 دارد، اختلاف‌پتانسیل مغناطیسی اسکالر، کدام است؟ (۹۵)



V_m → واحد (A)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

۱) $\frac{I}{2}(\frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_2})$ ✗

۲) $\frac{I\pi}{2}(\frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_2})$ ✗

۳) $\frac{I\pi}{2}$ ✗

۴) $\frac{I}{2}$ ✓

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{\varphi} = -\nabla V_m$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial V_m}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

$$\frac{\partial V_m}{\partial \varphi} = -\frac{I}{2\pi} \rightsquigarrow V_m = \frac{-I}{2\pi}\varphi$$

$$\Delta V_m = \left|\frac{-I}{2\pi}\overset{\pi}{\Delta\varphi}\right| = \frac{I}{2}$$

عبارت تابع پتانسیل الکتریکی را در ناحیهٔ $y \geq -\frac{\pi}{2k}$ به صورت $V(x,y) = V_0 e^{-kx}\cos ky$ فرض می‌کنیم. (V_0 و k اعدادی ثابت‌اند.) سطح $y = -\frac{\pi}{2k}$ را یک صفحهٔ رسانا تشکیل می‌دهد. مقدار باری که در ناحیهٔ نیم‌نوار $0 < x < \infty$ و $0 < z < 1$ بر روی صفحهٔ رسانا قرار دارد، کدام است؟ (۹۶)

$$Q = \int_0^1\int_0^\infty \rho_s \, dx\, dz$$

$$= -\varepsilon_0 V_0$$

۱) $-k\varepsilon_0 V_0$

۲) $-\varepsilon_0 V_0$

۳) $\varepsilon_0 V_0$

۴) $k\varepsilon_0 V_0$

$$V_2 = V_0 e^{-kx}\cos ky$$

$$\rho_s = -\varepsilon_0 \frac{\partial V_2}{\partial y}\Big|_{y=-\frac{\pi}{2k}} = -\varepsilon_0 V_0 k e^{-kx}$$