به نام خدا

آموزش معادلات دیفرانسیل به روش دکتر شفیعی

شماره جلسه	۴
عنوان مبحث	حل معادلات دیفرانسیل به روش سری ها

$$f'(x)\Big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Longrightarrow f(x)-f(x_0) \cong f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$y' - 2y = 0$ ⟶ (روش معمولی) ⟶ $\frac{y'}{y} = 2 \int \Rightarrow \ln y = 2x + c$

$y = k e^{2x}$

روش سری: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ⟵ جایگذاری

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y' - 2y = 0 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ضریب x^k $= 0 \longrightarrow (k+1)a_{k+1} - 2a_k = 0 \longrightarrow a_{k+1} = \frac{2a_k}{k+1}$

$$a_0 \quad , a_1 = \frac{2a_0}{1} = 2a_0 \ , \ a_2 = \frac{2a_1}{2} = \frac{2(2a_0)}{2} = 2a_0$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{3} = \frac{2(2a_0)}{3} = \frac{4a_0}{3} \ , \quad a_4 = \frac{2a_3}{4} = \frac{2\left(\frac{4a_0}{3}\right)}{4} = \frac{4a_0}{3}$$

$$a_5 = \frac{2a_4}{5} = \frac{2\left(\frac{2a_0}{3}\right)}{5} = \frac{4a_0}{15} \ , \ \cdots$$

$$y = a_0 + 2a_0 x^1 + 2a_0 x^2 + \frac{4a_0}{3} x^3 + \frac{2a_0}{3} x^4 + \cdots$$

$$y = a_0 \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$y = a_0 e^{2x}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$y'' + 9y = 0 \xrightarrow{\text{روش معمول}} D^2 + 9 = 0 \longrightarrow D = \pm 3i$$

$$y_2 = k_2 \sin 3x \ , \ y_1 = k_1 \cos 3x$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \longrightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$y''+9y=0 \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 9\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

x^m ضریب $=0 \longrightarrow (m+2)(m+1)a_{m+2} + 9a_m = 0$

رابطه بازگشتی $\quad a_{m+2} = \dfrac{-9a_m}{(m+2)(m+1)}$

$$a_0 \;,\; a_2=\frac{-9a_0}{2} \;,\; a_4=\frac{-9a_2}{12}=\frac{-9\left(\frac{-9a_0}{2}\right)}{12} \;,\; \cdots$$

$$a_1 \;,\; a_3=\frac{-9a_1}{6} \;,\; a_5=\frac{-9a_3}{20}=\frac{-9\left(\frac{-9a_1}{6}\right)}{20} \;,\; \cdots$$

$$y=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots + a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots$$

$$y=a_0\left[1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\cdots\right]+\frac{a_1}{3}\left[3x-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}-\cdots\right]$$

$$y=a_0\cos 3x+\frac{a_1}{3}\sin 3x$$

حل معادلات دیفرانسیل با روش سری‌ها

توابع
- تحلیلی ← بسط تیلور
- غیر تحلیلی ← بسط لوران

بسط تیلور — در ناحیه‌ی همگرایی

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \rightarrow \quad a_n=\left.\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right|_{z=z_0}$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \rightarrow \quad a_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

بسط تیلور

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

حالت خاص $x_0=0$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R(x)$$

$$y'' + 2y' + 3y = \frac{\sin x}{x}$$

نشانه‌ای برای استفاده از روش سری یا روش تغییر پارامتر

جواب‌های عمومی

$$y = -y_1 \int \frac{y_2 R}{W}\,dx + y_2 \int \text{—}$$

خصوصی

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R(x)$$

$$1\,y^{(n)} + \boxed{\frac{a_{n-1}}{a_n}}\,y^{(n-1)} + \cdots + \boxed{\frac{a_1}{a_n}}\,y' + \boxed{\frac{a_0}{a_n}}\,y = \boxed{\frac{R(x)}{a_n}}$$

اگر این توابع در نقطه $x = x_0$ تعریف شده (تحلیلی) باشند، x_0 نقطه عادی است.

جواب را به فرم سری تیلور فرض می‌کنیم.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$ جایگذاری در معادله

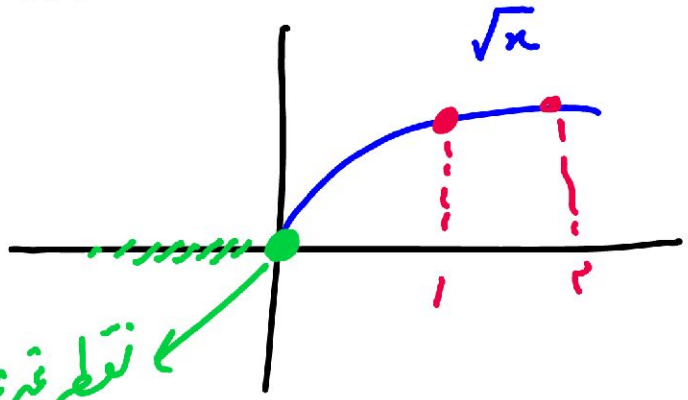
رابطه بین ضرایب a_n به دست می‌آید.

* گوییم $x=x_0$ نقطه عادی است، اگر ضریب $(x-x_0)^n$ در بسط تیلور جواب به صورت $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ خواهد بود.

شرط تحلیلی بودن ⟵ در مرحله اول باید پیوسته باشد.
⟵ در مرحله دوم باید مشتق‌پذیر باشد.

$$y''+\sqrt{x}\,y'=0$$

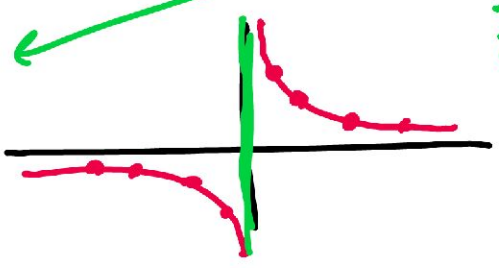
در $x=0$ پیوسته است



$$x^2y''+xy'+x^2y=0 \longrightarrow y''+\frac{1}{x}y'+1\,y=0$$

در $x=0$ تعریف نشده است

$x=0$ نقطه غیرعادی



$$x^2 y'' + x y' - y = 0 \longrightarrow y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 1$$

$$y = c_1 x^1 + c_2 x^{-1}$$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} y' + \frac{a_0}{a_n} y = \frac{R(x)}{a_n}$$

$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^n \frac{R(x)}{a_n}$ توقف شده

$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^{n-i} \frac{a_i}{a_n}$ توقف شده

نقطه غیرعادی ← شرط ← منظم

نامنظم

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = R(x)$$

$$y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{R(x)}{a_2}$$

فرض کنید $x = x_0$ نقطه غیرعادی باشد.

شرط اینکه از نوع منظم باشد.

$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^1 \frac{a_1}{a_2}$ (توقف شده)

$\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2 \frac{a_0}{a_2}$ (تعریف نشده)

$\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{a_2}$ (تعریف نشده)

$y'' + \sqrt{x}\, y = 0$

$a_2 = 1$

$a_1 = 0$

$a_0 = \sqrt{x}$

$x=0$ غیرعادی

$\lim_{x\to 0} (x-0)^1 \frac{a_1}{a_2} = \lim_{x\to 0} x \frac{0}{1} = 0$ تعریف نشده

$\lim_{x\to 0} (x-0)^2 \frac{a_0}{a_2} = \lim_{x\to 0} x^2 \frac{\sqrt{x}}{1} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} x^2\sqrt{x} = \text{وجود ندارد} \\ \lim_{x\to 0^+} x^2\sqrt{x} = 0 \end{cases}$

در $x=0$ حد ندارد (تعریف نشده)

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ← برای نقاط عادی

روش سری ها

برای نقاط غیرعادی منظم ← روش فروبنیوس

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x)$$

نقطه غیرعادی منظم x_0

① تشکیل معادل مشخصه

$$p_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

$$q_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

$$\longrightarrow \boxed{r^2 + (p_0-1)r + q_0 = 0}$$

② حالت امکانپذیرات

1. $r_2 - r_1 \notin \mathbb{Z}$
2. $r_1 = r_2$
3. $r_2 - r_1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$

① ⟶

$$\begin{cases} y_1 = (x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ y_2 = (x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \end{cases}$$

② ⟶

$$\begin{cases} y_1 = (x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ y_2 = y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \end{cases}$$

③ $\rightsquigarrow$

$r_2 - r_1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$r_2 > r_1$

$$\begin{cases} y_1 = (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ y_2 = k y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \end{cases}$$

در جواب مربوط به ریشه کوچکتر، جواب مربوط به ریشه بزرگتر نهفته است.

معادله بسل:

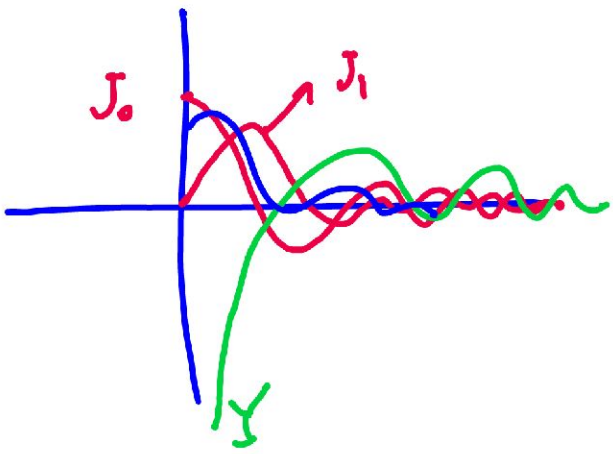
$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

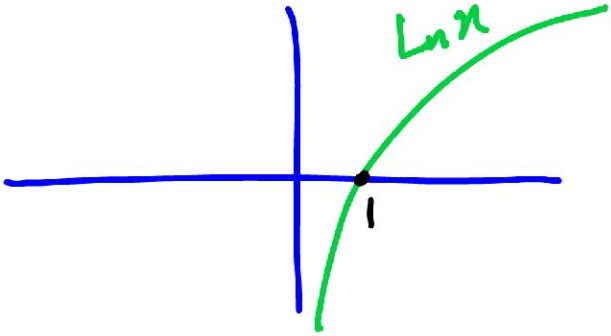
$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} y = 0$$

$x=0$ غیرعادی منظم

$J \rightsquigarrow$ بسل نوع اول

$Y \rightsquigarrow$ بسل نوع دوم





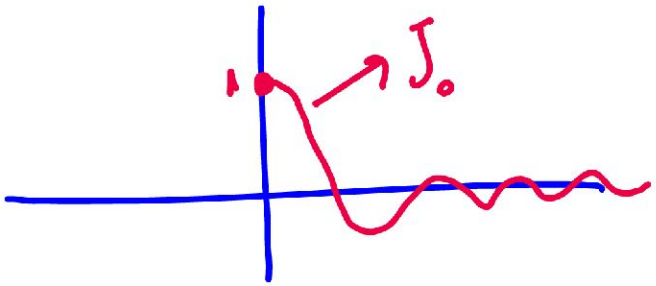
$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

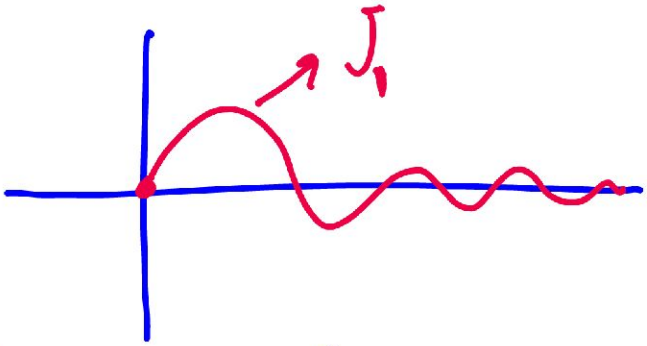
$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$ ← ν عدد صحیح نباشد

$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$ ← $\nu = 0$

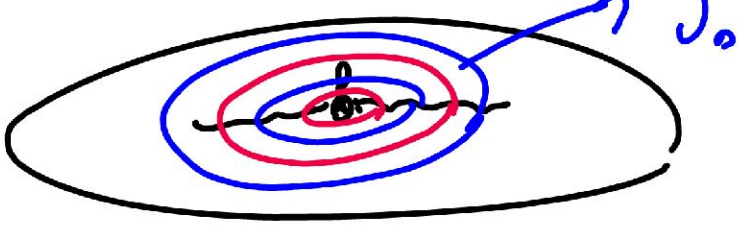
$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$ ← ν عدد صحیح (مخالف صفر) باشد

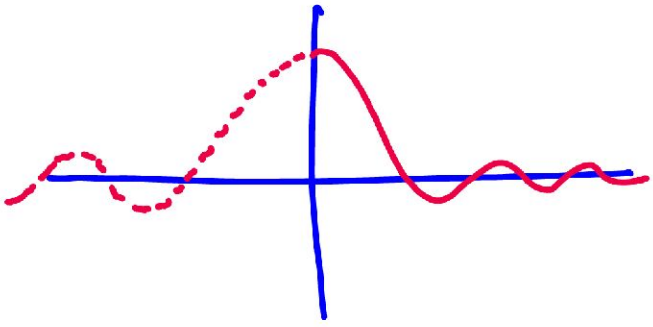
$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$





$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\;m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$





$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{K_1}{\sqrt{x}} \sin x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$J_0(0) = 1$$

$$J_1(0) = 0$$

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \frac{1}{4}) y = 0 \qquad \nu = \pm \frac{1}{2}$$

$$y = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$y = c_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x + c_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x) \right] \rightsquigarrow x^n J_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x) \right] \rightsquigarrow -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

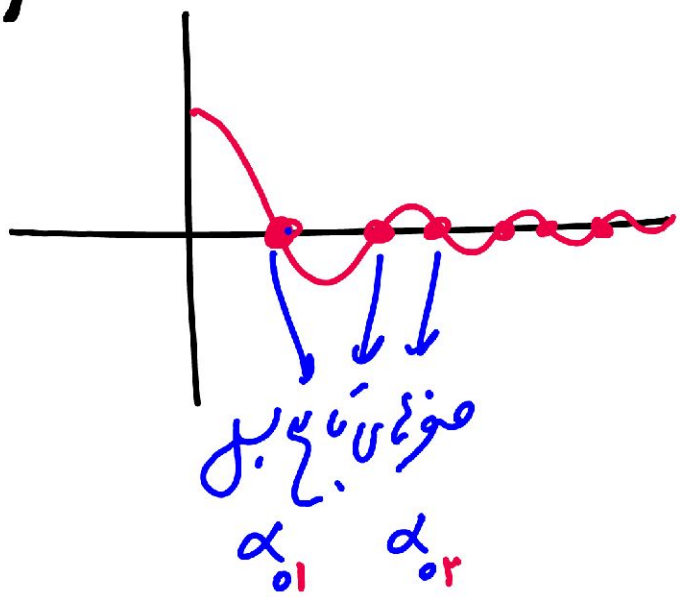
$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 J'_\nu(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

تعامد توابع بسل :

$$\int_0^a x\, J_\nu\left(\alpha_{\nu k}\frac{x}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{x}{a}\right) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \dfrac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu k})\right]^2 & m = k \end{cases}$$



بسل

فرم معادله

فرم جواب‌ها

$\nu \notin \mathbb{Z}$

$\nu = 0$

$\nu \in \mathbb{Z}$

روابط بازگشتی

$J_0(0) = 1$

$(J_{-\frac{1}{2}}, J_{\frac{1}{2}})$

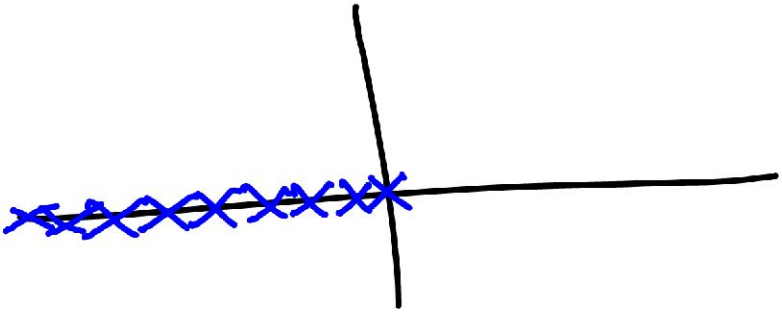
$$J_0(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

معادله لژاندر:

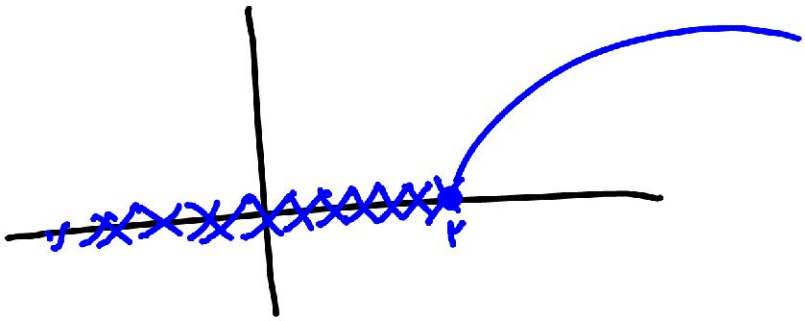
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

$$y'' - \boxed{\frac{2x}{1-x^2}}\,y' + \boxed{\frac{n(n+1)}{1-x^2}}\,y = 0$$

$\ln x$



$\sqrt{x-2}$



$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \times n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

فرمول رودریگ

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad n(n+1) = 2$$

$$(1-x^2)(0) - 2x(1) + 2(x) = 0 \quad \rightarrow \quad y = P_1(x) = x$$

$$n(n+1) = 12 \rightarrow n = 3$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \boxed{12}y = 0 \quad \rightarrow \quad y = P_3(x)$$

$$\int_0^1 P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \qquad x = \cos\theta$$

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = 0$$

بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه عادی $x=x_0$ به صورت زیر می باشد:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

بسط مک لوران تابع $f(x)$ حول نقطه عادی $x=0$ به صورت زیر می باشد:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

ضریب x^n در بسط مک لوران تابع y به صورت $\frac{y^{(n)}}{n!}$ می باشد.

معادله دیفرانسیل	$y'''(0)$	ضریب x^3 در بسط مک لوران پاسخ معادله
$\frac{d^2y}{dx^2}-(x+1)y=0$ $\xrightarrow{x=0}$ $y''(0)-y(0)=0$ $y(0)=-2$, $y'(0)=2$ $y''(0)=-2$	$y'''-y-(x+1)y'=0$ $\xleftarrow{x=0}$ $y'''(0)+2-2=0$	ضریب $x^3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{0}{3!}=0$
$e^{-x}y''+xy'+y=3$ $\xrightarrow{x=0}$ $y''(0)+y(0)=3$ $y(0)=0$, $y'(0)=1$ $y''(0)=3$	$-e^{-x}y''+e^{-x}y'''$ $+y'+xy''+y'=0$	$y'''(0)=1 \rightsquigarrow$ ضریب $x^3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{1}{6}$
$y''+y'\sin x+e^x y=0$ $y(0)=1$, $y'(0)=1$		
$y''-(\sin x)y'+xy=0$ $y(0)=0$, $y'(0)=-1$		

بسط مک لوران برخی از توابع مقدماتی مهم

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad |x|<1$$

نقطه $x=x_0$ را یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل مرتبه n ام

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)$$

می نامند، هرگاه هریک از توابع $\frac{a_i(x)}{a_n(x)}$ و $\frac{R(x)}{a_n(x)}$ در $x=x_0$ تحلیلی باشند.

چنانچه $x=x_0$ یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل مرتبه n ام

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)$$

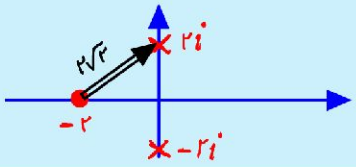
باشد، آنگاه معادله دارای یک جواب $y(x)$ است که در $x=x_0$ تحلیلی است. در این حالت، فرض می‌کنیم که جواب معادله به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ می باشد. با قرار دادن این جواب در معادله دیفرانسیل داده شده و ضرایب مجهول a_n بدست می‌آید.

شعاع همگرایی سری جواب معادله دیفرانسیل حول نقطه تحلیلی (عادی) $x=x_0$ برابر فاصله نقطه $x=x_0$ تا نزدیکترین نقطه غیر تحلیلی (غیرعادی) معادله دیفرانسیل می باشد.

$(4+x^2)y''+4xy'+4x^2y=0$

$y''+\frac{4x}{4+x^2}y'+\frac{4x^2}{4+x^2}y=0$

شعاع همگرایی سری جواب حول $x=-2$



$R=2\sqrt{2}$

$(x^2+x+2)y''+y'+\frac{1}{x^2+3}y=0$

$y''+\frac{1}{x^2+x+2}y'+\frac{1}{(x^2+3)(x^2+x+2)}y=0$

شعاع همگرایی سری جواب حول $x=0$

$x^2+3=0 \rightsquigarrow x=\pm i\sqrt{3} \rightsquigarrow |x-0|=\sqrt{3}$

$x^2+x+2=0 \rightsquigarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \rightsquigarrow |x-0|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}=\sqrt{2}$

$R=\min(\sqrt{3},\sqrt{2})=\sqrt{2}$

$(1+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0$

شعاع همگرایی سری جواب حول $x=2$

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش سری حول نقطه عادی

$$\begin{cases} y''+(y')^2=e^x y^3 \\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=2 \end{cases}$$

$x=0$

$y''(0)+4=1$

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$

$\frac{y(0)}{0!}=1$, $\frac{y'(0)}{1!}=2$, $\frac{y''(0)}{2!}=\frac{-3}{2!}=-\frac{3}{2}$, $\frac{y'''(0)}{3!}=\cdots$

$(x^2+3)y''-7xy'+16y=0$ ($x=0$ نقطه عادی است. (شعاع همگرایی سری جواب حول $x=0$ برابر $\sqrt{3}$ است.)

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \rightsquigarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$, $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

جایگذاری $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}3n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}7na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}16a_nx^n=0$

x^m ضریب $=0$ $\rightsquigarrow$ $m(m-1)a_m+3(m+2)(m+1)a_{m+2}-7ma_m+16a_m=0$

$a_{m+2}=\frac{8m-m^2-16}{3(m+2)(m+1)}a_m$

هرگاه نقطه $x=x_0$ یک نقطه تحلیلی معادله دیفرانسیل مرتبه n ام

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x)$$

نباشد، اما توابع $(x-x_0)^n \frac{R(x)}{a_n(x)}$ ، $(x-x_0)^{n-i}\frac{a_i(x)}{a_n(x)}$ در $x=x_0$ تحلیلی باشند، نقطه $x=x_0$ را غیرعادی منظم می‌نامند.

$(2x^4-x^3)y'' + xy' + (x^2+1)y = 0$

$y'' + \frac{x}{x^4(2-x)}y' + \frac{x^2+1}{x^4(2-x)}y = 0$

$x=0$ غیرعادی نامنظم

$x=2$ غیرعادی منظم

نقاط غیرعادی $x=0$ ، $x=2$

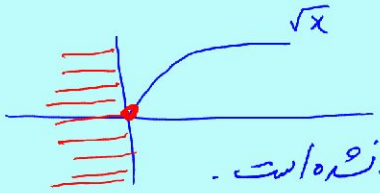
$(\ln x)y'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$

$y'' + \frac{1}{2\ln x}y' + \frac{1}{\ln x}y = 0$

$x=0$ غیرعادی نامنظم $\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{1}{2\ln x} \overset{HOP}{=} \frac{1}{2}$ ✓

$x=1$ غیرعادی منظم $\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{1}{\ln x} \overset{HOP}{=} 0$ ✓

$\begin{cases} y'' + (n\sqrt{x})y = 0 \\ n\in\mathbb{N},\ 0\le x<\infty \end{cases}$



$x=0$ غیرعادی نامنظم $\lim_{x\to 0}(x-0)^2(n\sqrt{x}) =$ موجود نیست

زیرا تابع $\sqrt{x}$ در $x=0$ تعریف نشده است.

حل معادله دیفرانسیل با استفاده از روش سری حول نقطه غیرعادی منظم (روش فروبنیوس)

چنانچه $x=x_0$ یک نقطه غیرعادی منظم برای معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ باشد، معادله مشخصه آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda P(x_0) + q(x_0) = 0$$

$$P(x_0) = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x) \qquad q(x_0) = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 Q(x)$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ ⟹

$$\begin{cases} y_1 = (x-x_0)^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \\ y_2 = (x-x_0)^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \end{cases}$$

$\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ ⟹

$$\begin{cases} y_1 = (x-x_0)^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \\ y_2 = y_1\ln|x-x_0| + (x-x_0)^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \end{cases}$$

$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}-\{0\} \\ \lambda_1 > \lambda_2 \end{cases}$ ⟹

$$\begin{cases} y_1 = (x-x_0)^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \\ y_2 = k\,y_1\ln|x-x_0| + (x-x_0)^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \end{cases}$$

روش فروبنیوس برای حل معادلات دیفرانسیل حول نقاط غیرعادی منظم

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

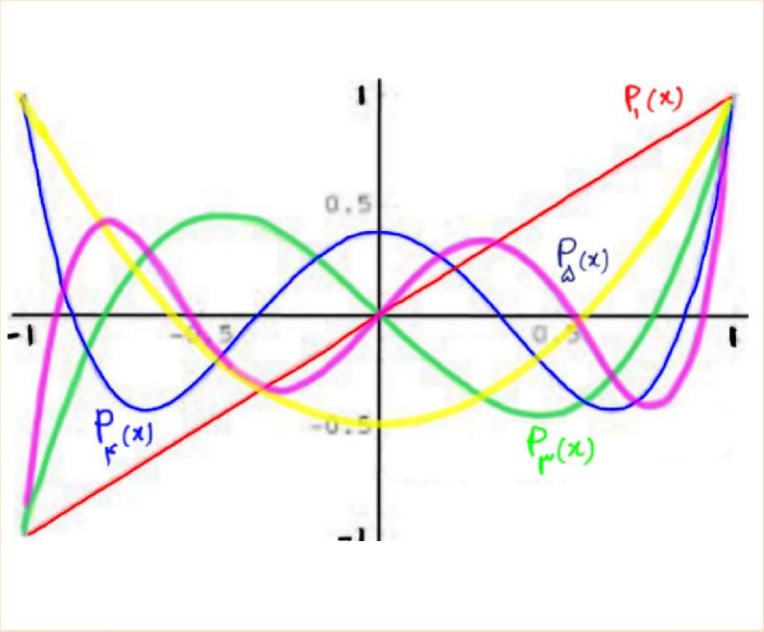
① $p = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^1 P(x)$ $\qquad q = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2 Q(x)$

② معادله مشخصه $\lambda(\lambda-1) + p\lambda + q = 0$

معادله دیفرانسیل	$P(x_0)$ ، $q(x_0)$	معادله مشخصه	فرم سری فروبنیوس جواب
$3x(x+1)y'' + 2(x+1)y' + 4y = 0$ $y'' + \frac{2}{3x}y' + \frac{4}{3x(x+1)}y = 0$ نقطه غیرعادی منظم $x=0$	$p = \lim_{x\to 0} x\frac{2}{3x} = \frac{2}{3}$ $q = \lim_{x\to 0} x^2\frac{4}{3x(x+1)} = 0$	$\lambda(\lambda-1) + \frac{2}{3}\lambda = 0$ $\lambda^2 - \frac{\lambda}{3} = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$	$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ $y_1 = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $y_2 = x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$ $y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1+x}{2x^2}y = 0$ نقطه غیرعادی منظم $x=0$	$p = \lim_{x\to 0} x\left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{2}$ $q = \lim_{x\to 0} x^2\left[\frac{1+x}{2x^2}\right] = \frac{1}{2}$	$\lambda(\lambda-1) - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$ $\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$ $(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2}) = 0$ $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = \frac{1}{2}$	$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ $y_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
$x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$			
$x^2y'' + 3(\sin x)y' - 2y = 0$			

معادله لژاندر :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0 \qquad -1<x<1 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$



هرگاه $\lambda = n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه جواب معادله لژاندر به صورت یک چند جمله‌ای از درجه n خواهد بود، که به چند جمله‌ای لژاندر معروف است و با $P_n(x)$ نشان داده می‌شود.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2m+1} & m = n \end{cases}$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$\int_{-1}^{1}(x^3+ax+b)P_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx + a\int_{-1}^{1} x P_2(x)\,dx + b\int_{-1}^{1} P_2(x)\,dx$$
$$= b\int_{-1}^{1} P_0(x)P_2(x)\,dx = 0 \qquad P_0(x)=1$$

$$\begin{cases}(1-x^2)y_1'' - 2xy_1' + 6y_1 = 0 \\ (1-x^2)y_2'' - 2xy_2' + 2y_2 = 0\end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} n(n+1)=6 \to n=2 \\ n(n+1)=2 \to n=1\end{matrix}} \begin{cases} y_1 = P_2(x) \\ y_2 = P_1(x)\end{cases} \rightsquigarrow \int_{-1}^{1} y_1 y_2\,dx = 0$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0 \longrightarrow \int_{-1}^{1}(x^2+y_1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^4\,dx + \int_{-1}^{1} 2x^2 y_1\,dx + \int_{-1}^{1} y_1 y_1\,dx$$
$$n(n+1)=12 \rightsquigarrow n=3 \rightsquigarrow y_1 = P_3(x) \qquad = \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{24}{35}$$

$$y'' + (\cot x)y' + n(n+1)y = 0 \xrightarrow{t=\cos x} (\sin^2 x)\ddot{y} - \cos x\,\dot{y} - \cos x\,\dot{y} + n(n+1)y = 0 \qquad y = P_n(\cos x)$$
$$\left[\left(\frac{t}{x}\right)^2 \ddot{y}_{tt} + \frac{t}{xx}\dot{y}_t\right] + \cot x\left[\frac{t}{x}\dot{y}_t\right] + n(n+1)y = 0 \qquad (1-t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + n(n+1)y = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{P_n'(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int_{-1}^{1} P_n(t)P_n(t)\,dt = \frac{2}{2n+1} \qquad \tan x = t$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 P_{10}(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left[c_0 + c_2 P_2(x) + c_4 P_4(x)\right]P_{10}(x)\,dx = 0$$
(each term $=0$)

معادله بسل : $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad \nu \in \mathbb{R}$

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

به ازای اعداد غیر صحیح $\pm\nu$ جوابهای معادله مستقل خطی هستند و جواب عمومی معادله بسل به صورت $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$ خواهد بود.

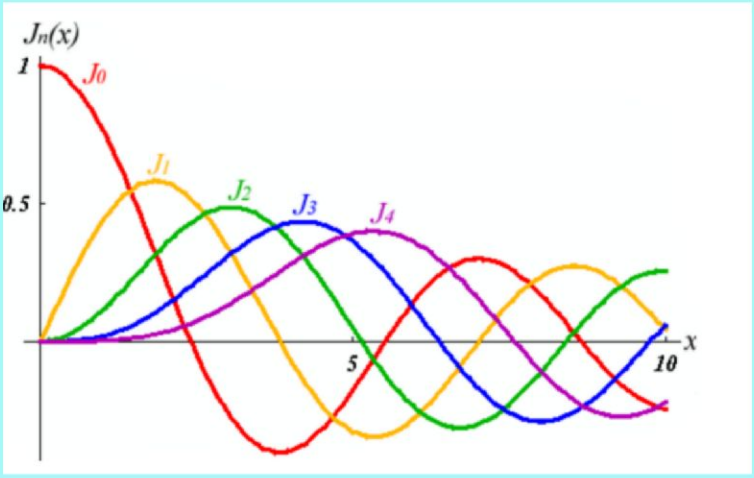
هرگاه ν عدد صحیح باشد، دو جواب مستقل خطی نخواهیم داشت. در چنین حالتی یک جواب معادله بسل به صورت $J_\nu(x)$ خواهد بود و جواب دیگر معادله را می‌توان با روش کاهش مرتبه، بدست آورد.

$$y_2(x) = J_\nu(x) \int \frac{dx}{x J_\nu^2(x)} \qquad Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} \left(J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x) \right)$$

در حالتی که ν یک عدد صحیح باشد، جواب عمومی معادله بسل به صورت زیر خواهد بود:

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$$

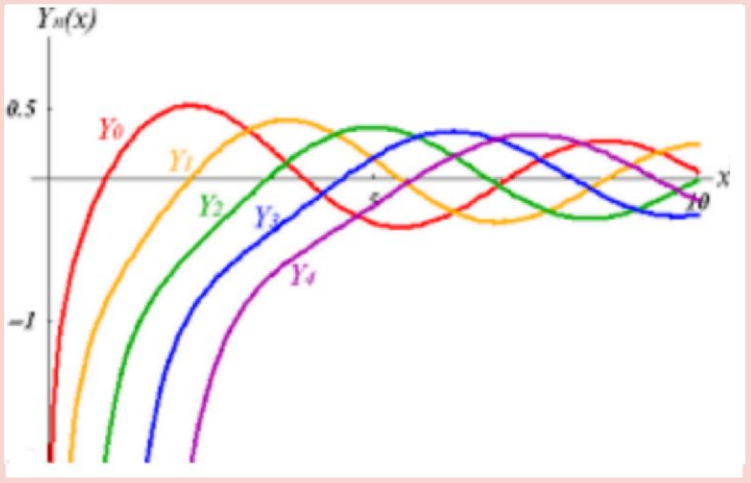
توابع بسل نوع اول



تابع بسل نوع اول، رفتاری نوسانی داشته و در بینهایت به صفر میل می‌کند.
تابع بسل نوع اول، بی‌شمار ریشه مثبت دارد.
تابع بسل نوع اول، در $x=0$ کراندار است.

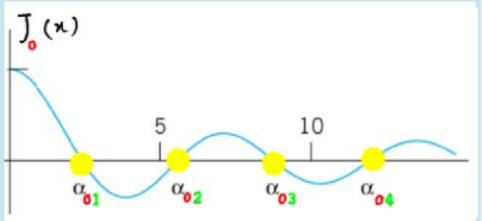
$$J_0(0) = 1 \quad , \quad J_n(0) = 0 \qquad n \geq 1$$

توابع بسل نوع دوم



تابع بسل نوع دوم رفتاری نوسانی داشته و در بینهایت به صفر میل می‌کند.
تابع بسل نوع دوم، بی‌شمار ریشه مثبت دارد.
تابع بسل نوع دوم، در $x=0$ کراندار نیست.

خیانچه $\alpha_{\nu k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) ریشه‌های معادله $J_\nu(x) = 0$ باشند، آنگاه توابع بسل $J_\nu(\alpha_{\nu k} \frac{x}{a})$ در بازه $[0, a]$ متعامدند.



$$\int_0^a J_\nu(\alpha_{\nu n} \frac{x}{a}) J_\nu(\alpha_{\nu m} \frac{x}{a})\, x\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} a^2 \left[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n}) \right]^2 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_{\nu}(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu} J_{\nu}(x) \qquad \int x^{-2} J_{2}(x)\,dx = -x^{-2} J_{2}(x)$$

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\,dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) \qquad \int x^{3} J_{2}(x)\,dx = x^{3} J_{3}(x) + C$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 J_{\nu}'(x) \qquad \int \left[J_{2}(x) - J_{4}(x)\right] dx = 2 J_{3}(x) + C$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x)$$

$$\int x^{3} J_{0}(x)\,dx = \int x^{2}\left(x J_{0}(x)\right) dx = x^{2}\left(x J_{1}(x)\right) - 2\int x^{2} J_{1}(x)\,dx = x^{3} J_{1}(x) - 2x^{2} J_{2}(x)$$

$$J_{0} + J_{2} = \frac{2x}{x} J_{1}(x) \qquad = x^{3} J_{1}(x) - 2x^{2}\left[\frac{2}{x} J_{1}(x) - J_{0}(x)\right]$$

$$\int J_{3}(x)\,dx = \int \left(J_{1}(x) - 2J_{2}'(x)\right) dx = \int J_{1}(x)\,dx - 2J_{2}(x) + C$$

$$J_{1}(x) - J_{3}(x) = 2 J_{2}'(x) \qquad = -J_{0}(x) - 2J_{2}(x) + C$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^{2}} J_{3}(x)\,dx = \int_{1}^{2} x^{-2} J_{3}(x)\,dx = \left[-x^{-2} J_{2}(x)\right]_{1}^{2} = J_{2}(1) - \frac{1}{4} J_{2}(2)$$

$$\int_{0}^{b} x J_{0}(ax)\,dx = \int_{0}^{ab} \frac{t}{a} J_{0}(t)\,\frac{dt}{a} = \frac{1}{a^{2}} \int_{0}^{ab} t J_{0}(t)\,dt = \frac{1}{a^{2}}\left[t J_{1}(t)\right]_{0}^{ab} = \frac{b}{a} J_{1}(ab)$$

$ax = t$

$$\int_{0}^{1} r^{2} J_{1}(r)\,dr = \left[r^{2} J_{2}(r)\right]_{0}^{1} = J_{2}(1)$$

$$\int_{0}^{1} x(1-x^{2}) J_{0}(x)\,dx = \int_{0}^{1} x J_{0}(x)\,dx - \int_{0}^{1} x^{3} J_{0}(x)\,dx = x J_{1}(x)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} x^{2}\left(x J_{0}(x)\right) dx = \cdots$$

ادامه حل

برخی از معادلات دیفرانسیل قابل تبدیل به معادله بسل

$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0 \xrightarrow{t=\lambda x} t^2y'' + ty' + (t^2-\nu^2)y = 0 \rightsquigarrow y = J_\nu(t)$

$x^2\left[(t_x)^2 y''_{tt} + \frac{t}{xx}y'_t\right] + x\left[\frac{t}{x}y'_t\right] + (t^2-\nu^2)y = 0$

$y = J_\nu(\lambda x)$

$x^2y'' + xy' + 4(x^2-\nu^2)y = 0 \xrightarrow{t=x^2} t^2y'' + ty' + (t^2-\nu^2)y = 0 \rightsquigarrow y = J_\nu(t)$

$x^2\left[4x^2y'' + 2y'\right] + x\left[2xy'\right] + 4(t^2-\nu^2)y = 0$

$y = J_\nu(x^2)$

$4x^2y'' + 4xy' + (x-\nu^2)y = 0 \xrightarrow[t=\sqrt{x}]{x=t^2} t^2y'' + ty' + (t^2-\nu^2)y = 0 \rightsquigarrow y = J_\nu(t)$

$4x^2\left[\frac{1}{4x}y'' - \frac{1}{4x\sqrt{x}}y'\right] + 4x\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}y'\right] + (t^2-\nu^2)y = 0$

$y = J_\nu(\sqrt{x})$

$xy'' + (1+2\nu)y' + xy = 0 \xrightarrow{y=x^{-\nu}u} x^2u'' + xu' + (x^2-\nu^2)u = 0 \rightsquigarrow u = J_\nu(x)$

$y' = -\nu x^{-\nu-1}u + u'x^{-\nu}$

$y'' = \cdots\cdots$

$y = x^{-\nu}J_\nu(x)$

$x^2y'' + (x^2+k)y = 0 \xrightarrow{y=\sqrt{x}u} x^2u'' + xu' + \left[x^2 - (\frac{1}{4}-k)\right]u = 0$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}u + \sqrt{x}u'$

$y'' = \cdots$

$u = J_{\sqrt{\frac{1}{4}-k}}(x)$

$y = \sqrt{x}\left[J_{\sqrt{\frac{1}{4}-k}}(x)\right]$

$x^2y'' + x(1-2x\tan x)y' + (x\tan x + \nu^2)y = 0 \xrightarrow{y=u\sec x} x^2u'' + xu' + (x^2-\nu^2)u = 0$

$y' = u'\sec x + u\sec x\tan x$

$y' = \cdots\cdots$

$u = J_\nu(x) \rightsquigarrow y = \frac{1}{\cos x}J_\nu(x)$

معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + y' = \sinh x$ به همراه شرایط $y(0) = 1$ و y' در نزدیکی مبدأ کراندار، مفروض است. جواب $y(x)$ کدام است؟ (دکتری - سیستم‌های کنترل ۹۲)

۱) $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!(2n)}$

۲) $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

۳) $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!(2n)}$

۴) مشخص نیست چون $y'(0)$ مقدارش داده نشده است.

$$xy'' + y' = (xy')' = \sinh x \rightarrow xy' = \cosh x + c \rightarrow y' = \frac{\cosh x + c}{x}$$

$$y' = \frac{c}{x} + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x} = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \xrightarrow{y'(0) \text{ کراندار}} c = -1$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \rightarrow y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)(2n)!} + c \xrightarrow{y(0)=1} c = 1$$

نوع نقاط تکین معادلهٔ $x^3(x-1)^2(x+1)y'' + 2xy' + x(x+1)y = 0$ چیست؟ (مهندسی نفت ۹۴)

۱) $x = -1$ تکین منظم، $x = 1$ تکین منظم

۲) $x = -1$ تکین منظم، $x = 1$ تکین نامنظم

۳) $x = -1$ تکین نامنظم، $x = 1$ تکین نامنظم

۴) $x = -1$ تکین نامنظم، $x = 1$ تکین منظم

$$y'' + \frac{2}{x^2(x-1)^2(x+1)} y' + \frac{1}{x^2(x-1)^2} y = 0$$

$x = 0$ و $x = 1$ غیرعادی نامنظم

$x = -1$ غیرعادی منظم

اگر $x_0 = 0$ یک نقطه عادی برای معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد و از روش فروبنیوس برای یافتن سری‌های جواب آن استفاده شود، یکی از ریشه‌های معادله مشخصه برابر صفر می‌باشد. ریشه دیگر کدام است؟ (عمران – ۹۴)

۱) -1

۲) 0

۳) 1

۴) بستگی به ضرایب $p(x), q(x)$ دارد.

$p = \lim_{x\to 0} x\boxed{P(x)} = 0$ (عدد گرانبار)

$q = \lim_{x\to 0} x^2\boxed{Q(x)} = 0$ (عدد گرانبار)

$\lambda(\lambda-1) + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$

در حل معادله دیفرانسیل زیر به روش سری‌ها حول نقطه صفر، رابطه بازگشتی نظیر ریشه کوچکتر معادله مشخصه، کدام است؟ (عمران – ۹۴)

$$xy'' + (3-x)y' - y = 0$$

۱) $a_n = \frac{a_{n-1}}{n-2},\ n \neq 2$

۲) $a_n = \frac{a_{n-1}}{n-1},\ n \neq 1$

۳) $a_n = \frac{a_{n-1}}{n},\ n \neq 2$

۴) $a_n = \frac{a_{n-1}}{n+2},\ n \neq 1$

$p = \lim_{x\to 0} x\left[\frac{3-x}{x}\right] = 3$

$q = \lim_{x\to 0} x^2\left[-\frac{1}{x}\right] = 0$

$\lambda(\lambda-1) + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \checkmark,\ \lambda = -2 \checkmark$

$\lambda = -2 \rightsquigarrow y = x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2}$

$y' = \sum (n-2)a_n x^{n-3}$

$y'' = \sum (n-2)(n-3)a_n x^{n-4}$

جایگذاری $\sum (n-2)(n-3)a_n x^{n-4} + \sum 3(n-2)a_n x^{n-4} - \sum (n-2)a_n x^{n-3} - \sum a_n x^{n-3} = 0$

ضریب x^1 $= 0 \rightsquigarrow 2a_4 + 6a_4 - a_3 - a_3 = 0 \rightsquigarrow a_4 = \frac{a_3}{4}$

فقط گزینه ۴ این ویژگی را دارد.

در حل یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه ۲ به روش سری‌ها، حول یک نقطهٔ تکین منظم، (مثلاً $x = 0$)، فرض کنیم دو ریشهٔ معادلهٔ مشخصه r_1 و r_2 بوده که دارای اختلاف صحیح می‌باشند. در این صورت کدام گزینه در ارتباط با جواب نظیر ریشهٔ کوچکتر، صحیح می‌باشد؟ (عمران – ۹۲)

۱) حتماً هر دو جواب را خواهد داد.

۲) ممکن است هر دو جواب معادله را بدهد و یا هیچ‌کدام را ندهد.

۳) همواره هیچ جوابی از معادله را نمی‌دهد.

۴) همواره فقط منجر به یک جواب معادله خواهد شد.

$y_2 = k y_1 \ln|x| + x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

معادله دیفرانسیل $4x^2y'' + 4xy' + (8x^2 - 1)y = 0$ مفروض است. با فرض

این که $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ توابع بسل باشد

جواب عمومی معادله‌ی داده شده، کدام است؟ (مکانیک - ۹۳)

$x^2y'' + xy' + (2x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

$y = c_1 J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)$

$y = c_1\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{2}x}}\sin(\sqrt{2}x) + c_2\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{2}x}}\cos(\sqrt{2}x)$

$= k_1\frac{\cos(\sqrt{2}x)}{\sqrt{x}} + k_2\frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{x}}$

۱) $y = c_1\frac{\cos\sqrt{2}x}{x} + c_2\frac{\sin\sqrt{2}x}{x}$

۲) $y = c_1\frac{\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}$

۳) $y = c_1\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

۴) $y = c_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

نقطه $x_0 = 0$ برای معادله دیفرانسیل $x^2y'' + y'\sin x + y\cos x = 0$ چه نوع نقطه‌ای است؟ (مکانیک - ۸۹)

۱) عادی نامنظم ۲) عادی

۳) غیرعادی نامنظم ۴) غیرعادی منظم

$y'' + \frac{\sin x}{x^2}y' + \frac{\cos x}{x^2}y = 0$

$\lim_{x\to 0} x^2\left[\frac{\cos x}{x^2}\right] = 1$

$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{\sin x}{x^2}\right] \overset{\text{هم‌ارز}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$

$x = 0$ غیرعادی منظم

ضریب x^3 در بسط مک لورن جواب مسئله مقدار اولیه $y'' + y'\sin x + e^x y = 0$ ، $y(0) = y'(0) = 1$ کدام است؟ (مکانیک - ۸۹)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$\frac{y'''(0)}{3!}$

$x = 0$

$y''(0) + y(0) = 0 \longrightarrow y''(0) = -1$

$y''' + y''\sin x + y'\cos x + e^x y + e^x y' = 0$

$x = 0$

$y'''(0) = -3$

ضریب $x^3 = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

اگر $y_1(x)=e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $xy''-(x+n)y'+ny=0$ ، و $n\in N$ باشد، جواب مستقل دیگر کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (برق - ۹۴)

$n=1 \rightsquigarrow xy''-(x+1)y'+y=0$

۱) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k$ ← $n=1$ ← $y=1+x$ ← در معادله صدق می‌کند

۲) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k$ ← $n=1$ ← $y=1$ ← // // نمی‌کند

۳) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k$ ← $n=1$ ← $y=x$ ← // // نمی‌کند.

۴) $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}x^k$ ← $n=1$ ← $y=x+\frac{x^2}{2}$ ← // // نمی‌کند.

معادله دیفرانسیل $2x^2y''-xy'+(1+x)y=0$ ، $x>0$ ، داده شده است. معادله شاخص سری فروبنیوس، و رابطه بازگشتی بین ضرایب آن، a_n ، a_{n-1}، کدام است؟ $(n\geq 1)$ (برق - ۹۴)

۱) $a_n=\frac{-a_{n-1}}{n(2n-1)}$ ، $a_n=\frac{-a_{n-1}}{n(2n+1)}$ ، $3r^2-4r+1=0$

۲) $a_n=\frac{-a_{n-1}}{(2n-1)n}$ ، $a_n=\frac{-a_{n-1}}{(2n+1)(n+1)}$ ، $2r^2-3r+1=0$

۳) $a_n=\frac{-a_{n-1}}{(2n-1)(n+1)}$ ، $a_n=\frac{-a_{n-1}}{(2n+1)n}$ ، $2r^2-3r+1=0$

۴) $a_n=\frac{-a_{n-1}}{n(2n-1)}$ ، $a_n=\frac{-a_{n-1}}{(2n+1)n}$ ، $2r^2-3r+1=0$

$P=\lim_{x\to 0} x\left[-\frac{1}{2x}\right]=-\frac{1}{2}$

$q=\lim_{x\to 0} x^2\left[\frac{1+x}{2x^2}\right]=\frac{1}{2}$

$\lambda(\lambda-1)-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}=0$

$2\lambda^2-3\lambda+1=0$ ← غیرقابل قبول است

$\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}=0 \rightsquigarrow (\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})=0$

$\lambda=1$ ، $\lambda=\frac{1}{2}$

$y_2=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{1}{2}}$

$\begin{cases} y_2'=\sum (n+\frac{1}{2})a_n x^{n-\frac{1}{2}} \\ y_2''=\sum (n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})a_n x^{n-\frac{3}{2}} \end{cases}$

$2x^2y''-xy'+(1+x)y=0 \rightsquigarrow \sum 2(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})a_n x^{n+\frac{1}{2}}-\sum (n+\frac{1}{2})a_n x^{n+\frac{1}{2}}+\sum a_n x^{n+\frac{1}{2}}+\sum a_n x^{n+\frac{3}{2}}=0$

$x^{\frac{3}{2}}$ ضریب $=0 \rightsquigarrow \frac{3}{2}a_1-\frac{3}{2}a_1+a_1+a_0=0 \rightsquigarrow a_1=-a_0$ ← گزینه ۳ نادرست.

اگر رابطه بازگشتی مربوط به $\lambda=1$ را نیز محاسبه کنیم، گزینه صحیح مشخص خواهد شد.

قبلاً حل شده.

اگر معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$ جوابی به صورت $J_\alpha(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha\theta - x\sin\theta)d\theta$ داشته باشد آنگاه

$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\cos(x\sin\theta)d\theta$ برابر است با: (برق - ۹۳)

۱) $-J_0(x)$ ۲) $-J_0'(x)$

۳) $-J_0''(x)$ ۴) $-J_0'''(x)$

دو جواب مستقل خطی معادله‌ی دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{9}{4})y=0$، کدام است؟ (برق ـ۹۲)

$\nu = \pm\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

۱) $y_1(x)=J_{\frac{3}{2}}(x)$, $y_2(x)=J_{-\frac{3}{2}}(x)$

۲) $y_1(x)=J_{\frac{3}{2}}(x)$, $y_2(x)=-y_1(x)\ln|x|+J_{-\frac{3}{2}}(x)$

۳) $y_1(x)=J_{\frac{3}{2}}(x)$, $y_2(x)=y_1(x)\ln|x|+|x|^{-\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۴) $y_1(x)=J_{\frac{3}{2}}(x)$, $y_2(x)=y_1(x)\ln|x|+J_{\frac{3}{2}}(x)$

$y_1 = J_{\frac{3}{2}}(x)$

$y_2 = J_{-\frac{3}{2}}(x)$

جواب معادلهٔ $y''+\frac{1}{x}y'=\frac{\sin x}{x}$، با شرایط $y(0)=1$ و $y'(0)=0$، کدام است؟ (برق-۹۲)

$$xy''+y'=(xy')'=\sin x \quad \text{انتگرال}$$

$$xy'=c-\cos x \rightsquigarrow y'=\frac{c-\cos x}{x}$$

$$y'(0)=0 \rightsquigarrow c=1$$

$$y'=\frac{1-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots)}{x}=\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\cdots$$

$$y=k+\frac{x^2}{2\times 2!}-\frac{x^4}{4\times 4!}+\cdots \quad y(0)=1 \rightsquigarrow k=1$$

$$y=1+\frac{x^2}{2\times 2!}-\frac{x^4}{4\times 4!}+\cdots$$

۱) $y=1-\frac{x^2}{2\times 2!}+\frac{x^4}{4\times 4!}-\cdots$

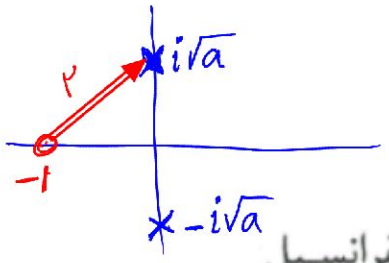
۲) $y=1-\frac{x^2}{2\times 2!}-\frac{x^4}{4\times 4!}-\cdots$

۳) $y=1+\frac{x^2}{2\times 2!}-\frac{x^4}{4\times 4!}+\cdots$

۴) $y=1+\frac{x^2}{2\times 2!}+\frac{x^4}{4\times 4!}+\cdots$

پاسخ‌های سری معادلهٔ دیفرانسیل $(a+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0$ را درنظر می‌گیریم، به‌ازای کدام مقدار مثبت a شعاع همگرایی پاسخ معادله در اطراف نقطه $x=-1$ برابر $R=2$ خواهد بود؟ (برق-۸۶)

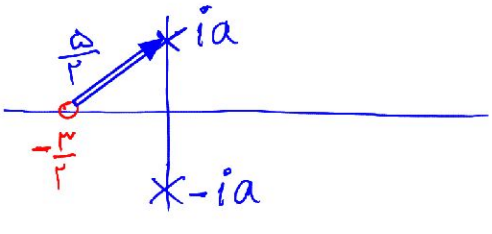
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



$$4=a+1 \rightsquigarrow a=3$$

به ازای کدام مقدار مثبت a، شعاع همگرایی پاسخ‌های سری معادلهٔ دیفرانسیل $(a^2+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0$ در اطراف نقطه $x=-\frac{3}{2}$ برابر $R=\frac{5}{2}$ خواهد بود؟ (برق-۸۵)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱



$$a^2+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$$

$$a^2=4 \rightsquigarrow a=2$$

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + y' = a^2xy$ کدام گزینه است؟ (برق - ۸۴)

۱) $AI_0(ax) + BK_0(ax)$

۲) $AJ_0(ax) + BI_0(ax)$

۳) $AJ_0(\frac{x}{a}) + BY_0(\frac{x}{a})$

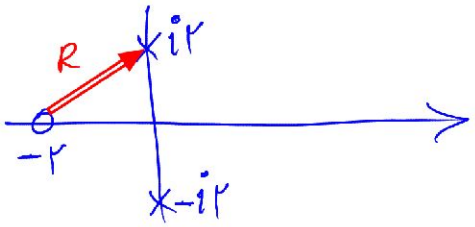
۴) $AY_0(ax) + BK_0(ax)$

$$xy'' + y' + (-a^2x)y = 0 \longrightarrow x^2y'' + xy' + [-a^2x^2 - 0]y = 0$$

$$y = AI_0(ax) + BK_0(ax)$$

شعاع همگرایی پاسخ‌های سری در معادلهٔ دیفرانسیل

$(4 + x^2)y'' + 4xy' + 4x^2y = 0$ در اطراف نقطهٔ $x = -2$ عبارت است از: (برق - ۸۳)



$$R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱) ۲

۲) ۴

۳) $2\sqrt{2}$

۴) $4\sqrt{2}$

شعاع همگرایی سری جواب معادله: $(x^2 + x + 2)y'' + y' + \frac{1}{x^2 + 3}y = 0$ حول $x = 0$ حداقل برابر است با: (برق - ۸۲)

$$x^2 + x + 2 = 0 \rightsquigarrow x = -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{7}}{2} \longrightarrow |x| = \sqrt{2}$$

$$x^2 + 3 = 0 \rightsquigarrow x = \pm i\sqrt{3} \longrightarrow |x| = \sqrt{3}$$

$$R = \min(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \sqrt{2}$$

۱) ۱

۲) $\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$

۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

کدام گزینه دو جواب مستقل خطی برای معادلهٔ زیر است؟ (برق - ۸۱)

$$۳x(x+۱)y'' + ۲(x+۱)y' + ۴y = ۰$$

۱) $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n-۱}$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n+۱}$

۲) $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n}$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n-۱}$

۳) $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n}$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n+\frac{۱}{۳}}$

۴) $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n}$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n-\frac{۱}{۳}}$

$$p = \lim_{x\to ۰} x\left[\frac{۲}{۳x}\right] = \frac{۲}{۳}$$

$$q = \lim_{x\to ۰} x^{۲}\left[\frac{۴}{۳x(x+۱)}\right] = ۰$$

$$\lambda(\lambda-۱) + \frac{۲}{۳}\lambda = ۰$$

$$\lambda^{۲} - \frac{۱}{۳}\lambda = ۰ \Rightarrow \lambda_۱ = ۰ ,\ \lambda_۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$y_۱ = x^{۰}\sum a_n x^n = \sum a_n x^n$$

$$y_۲ = x^{\frac{۱}{۳}}\sum b_n x^n = \sum b_n x^{n+\frac{۱}{۳}}$$

اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $e^{-x}y'' + xy' + y = ۳$ با شرایط اولیه $y(۰)=۰$ و $y'(۰)=۱$ باشد، آنگاه $y'''(۰)$ با کدام گزینه برابر است؟ (برق ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۵ ۴) با اطلاعات فوق نمی‌توان آن را بدست آورد.

مشتق $x=۰$

$$y''(۰) + ۰ = ۳ \longrightarrow y''(۰) = ۳$$

$$-e^{-x}y'' + e^{-x}y''' + xy'' + y' + y' = ۰ \xrightarrow{x=۰} -۳ + y'''(۰) + ۲ = ۰$$

$$y'''(۰) = ۱$$

در معادله دیفرانسیل زیر نوع نقاط تکین را مشخص کنید: (برق ۷۹)

$$x^{۲}(x-۱)^{۳}y'' + x(x-۱)^{۲}y' + y = ۰$$

$$y'' + \frac{۱}{x(x-۱)}y' + \frac{۱}{x^{۲}(x-۱)^{۳}}y = ۰$$

$x=۰$ غیرعادی منظم ، $x=۱$ غیرعادی نامنظم

۱) $x=۰$ و $x=۱$ هر دو منظم‌اند

۲) $x=۰$ و $x=۱$ هر دو نامنظم‌اند

۳) $x=۰$ نامنظم و $x=۱$ منظم است

۴) $x=۰$ منظم و $x=۱$ نامنظم‌است

وضعیت نقاط تکین معادلهٔ دیفرانسیل $x^2(1-x)y'' + y' - y = 0$ عبارتست از: (برق - ۷۸)

$$y'' + \boxed{\frac{1}{x^2(1-x)}}\, y' \boxed{- \frac{1}{x^2(1-x)}}\, y = 0$$

$x=0$ تکین نامنظم

$x=1$ تکین منظم

۱) $x = 0$ منظم و $x = 1$ نامنظم است

۳) $x = 0$ و $x = 1$ هردو نامنظم‌اند

۲) $x = 0$ نامنظم و $x = 1$ منظم است

۴) $x = 0$ و $x = 1$ هر دو منظم‌اند

با توجه به رابطهٔ بازگشتی $x\,J'_n(x) = -n\,J_n(x) + xJ_{n-1}(x)$، انتگرال $n=1$

$$\int_0^1 x(1-x^2)\,J_0(x)\,dx$$ برابر است با: (برق - ۷۷)

$$xJ_0(x) = xJ_1'(x) + J_1(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n\right] = x^n J_{n-1}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)\left[xJ_1'(x) + J_1(x)\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[xJ_1'(x) + J_1(x)\right]dx - \int_0^1 \left(x^3 J_1'(x) + x^2 J_1(x)\right)dx$$

$$= \left(xJ_1(x)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 J_1'(x)\,dx - x^2 J_2(x)\Big|_0^1 = (xJ_1)\Big|_0^1 - \left[x^3 J_1 - 3x^2 J_2\right]\Big|_0^1 - \text{〃}$$

(برق ۷۷)

روش جزء به جزء

۱- $2J_2(1)$

۳- $J_1(1) - J_0(0)$

۲- $J_1(1)$

۴- $2J_2(1) - J_1(1)$

در معادلهٔ $2(x-3)^2xy'' + 3xy' + (x-3)y = 0$

۱- نقاط $x = 0$ و $x = 3$ هر دو نقاط انفراد عادی (تکین منظم) هستند.

۲- نقاط $x = 0$ و $x = 3$ هر دو نقاط انفراد غیر عادی (تکین نامنظم) هستند.

۳- نقطهٔ $x = 0$ نقطه انفراد عادی (تکین منظم) و نقطه $x = 3$ نقطه انفراد غیر عادی (تکین نامنظم) است.

۴- نقطهٔ $x = 3$ نقطه انفراد عادی (تکین منظم) و نقطه $x = 0$ نقطه انفراد غیر عادی (تکین نامنظم) است.

$x^3 \oplus J_1'$

$3x^2 \ominus J_1$

$$y'' + \boxed{\frac{3}{2(x-3)^2}}\, y' + \boxed{\frac{1}{2(x-3)x}}\, y = 0$$

$x=3$ غیرعادی نامنظم

$x=0$ غیرعادی منظم

با توجه به رابطهٔ بازگشتی : $xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$

برای $J_n(x)$، تابع بسل نوع اوّل مرتبهٔ n ام (n عددی صحیح)، مقدار

$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$

انتگرال $\int_0^1 r^2 J_1(r)\,dr$ برابر است با : (برق ـ ۷۶)

۱- $J_2(1)$ ۲- $J_0(1)$

۳- $J_1(1) - J_2(1)$ ۴- $J_0(1) - J_1(1)$

$\int x^n J_{n-1}(x)\,dx = x^n J_n(x)$

$\int_0^1 r^2 J_1(r)\,dr = r^2 J_2(r)\Big|_0^1 = J_2(1)$

$n=1 \leftarrow$ $\qquad \rightarrow n=2$

اگر $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ و $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ به ترتیب

دارای جوابهایی به صورت $y_1(x)$ و $y_2(x)$ باشند داریم : (برق ـ ۷۵)

$y_1(x) = P_2(x)$

$y_2(x) = P_1(x)$

۱- $\int_{-1}^{1} xy_1y_2\,dx = 0$ ۲- $\int_{-1}^{1} y_1y_2\,dx = 0$

۳- $\int_{-1}^{1} y_1y_2\,dx = \frac{2}{5}$ ۴- $\int_{-1}^{1} y_1y_2\,dx = \frac{2}{3}$

نتیجه $\int_{-1}^{1} P_2(x)P_1(x)\,dx = 0$

در معادله دیفرانسیل : $y'' + \frac{3x-1}{x^2-x}y' + \frac{1}{x^2-x}y = 0$

هر گاه $y_1(x)$ یکی از جوابهای معادله به صورت سری باشد جواب مستقل دیگر بصورت زیر خواهد بود : (برق ـ ۷۴)

سطح اول $x=0$ ← نقطه غیرعادی منظم

$p_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)\frac{3x-1}{x^2-x} = 1$ $\qquad q_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{1}{x^2-x} = 0$

۱- $y_2(x) = \sqrt{x}\,y_1(x)$

۲- $y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$

۳- $y_2(x) = 3x\,y_1(x)$

۴- $y_2(x) = ax^2 + bx + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$

معادله شاخص $r^2 + (p_0-1)r + q_0 = 0 \rightsquigarrow r^2 = 0$ ← ضعیف $r=0$

$\begin{cases} y_1 = x^0 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \\ y_2 = y_1 \ln x + x^0 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \end{cases}$

ریشه‌های معادله شاخص معادله $2x(1+x)y''+(1+6x)y'+2y=0$ در نزدیکی نقطه $x=0$ عبارت است: (برق ۷۰)

۱- $0, -1$ ۲- $0, \frac{1}{2}$

۳- $1, 2$ ۴- $-1, -1$

$$y''+\frac{1+4x}{2x(1+x)}y'+\frac{2}{2x(1+x)}y=0$$

$$p_0=\frac{1}{2} \quad q_0=0$$

$$r^2+(\frac{1}{2}-1)r=0 \rightarrow r^2-\frac{1}{2}r=0 \rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=\frac{1}{2} \end{cases}$$

هرگاه جواب معادله $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ به صورت زیر باشد

$$y = C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x)$$

(C_1 و C_2 مقادیر ثابت هستند)، آنگاه جواب معادله

$$y''+\frac{1}{x}y'+(8-\frac{1}{x^2})y=0$$

برابر است با (برق ۶۹-)

۱- $AJ_1(x)+BJ_{-1}(x)$

۲- $AJ_1(8x)+BJ_{-1}(8x)$

۳- $AJ_1(\frac{\sqrt{8}}{8}x)+BJ_{-1}(\frac{\sqrt{8}}{8}x)$

۴- $AJ_1(\sqrt{8}\,x)+BJ_{-1}(\sqrt{8}\,x)$

$$x^2y''+xy'+(8x^2-1)y=0$$

$$8x^2=t^2 \rightarrow t=\sqrt{8}\,x$$

$$y''_{xx}=8y''_{tt}+0\,y'_t$$

$$y'_x=\sqrt{8}\,y'_t$$

$$\frac{t^2}{8}[8y''_{tt}]+\frac{t}{\sqrt{8}}[\sqrt{8}y'_t]+(t^2-1)y=0$$

$$t^2y''+ty'+(t^2-1)y=0 \rightarrow c_1J_1(t)+c_2J_{-1}(t)$$

برای توابع بسل نوع اول داریم (n عدد صحیح مثبت، منفی و یا صفر)

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

و $$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x))=x^n J_{n-1}(x)$$

در اینصورت $\frac{dJ_n}{dx}(x)$ برابر است با (برق ۶۸)

۱- $\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$

۲- $\frac{1}{2}J_{n-1}(x)-\frac{1}{2}J_{n+1}(x)$

۳- $xJ_{n-1}(x)-nJ_n(x)$

۴- $nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)$$

$$J_n'(x)=\frac{1}{2}J_{n-1}(x)-\frac{1}{2}J_{n+1}(x)$$

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو پاسخ مختلف معادله بسل مرتبه ν با پارامتر λ (معادله زیر)باشند:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$$

$$y''+\frac{1}{x}y'+\cdots=0$$

و داشته باشیم $$F(x)=e^{\int(y_1(x)dy_2(x)-y_2(x)dy_1(x))/W}$$

$$W=ce^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{c}{x}$$

کدامیک از روابط زیر صحیح است؟ (برق - ۷۷)

۱- $F(x)=kx^{\alpha}$

۲- $F(x)=kx$

۳- $F(x)=e^{\lambda x}$

۴- $F(x)=\lambda x^2$

$$F(x)=e^{\int w\,dx}=e^{\int\frac{c}{x}dx}$$

$$=e^{c\ln x+\alpha}=e^{\alpha}\cdot e^{c\ln x}=kx^c$$

اگر جواب معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ برابر $c_1J_n(x) + c_2Y_n(x)$ باشد که $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم هستند، در این صورت جواب معادله $x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - n^2)y = 0$ به چه صورت است؟ (برق - ۶۷)

۱- $c_1 J_n(\lambda x) + c_2 Y_n(x)$

۲- $c_1 J_{n\lambda}(x) + c_2 Y_{n\lambda}(x)$

۳- $c_1 J_n(-\lambda x) + c_2 Y_n(-\lambda x)$

۴- هیچکدام

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0 \longleftarrow \lambda^2x^2 = t^2$$

$$y = c_1 J_n(t) + c_2 Y_n(t) = c_1 J_n(\lambda x) + c_2 Y_n(\lambda x)$$

کدامیک از بسط‌های توانی زیر یکی از حل‌های معادله دیفرانسیل $y'' + x^4y = 0$ می‌باشد؟ (برق - ۶۷)

نقطه عادی $x = 0$

۱- $y(x) = 1 - x^6/30 + x^{13}/1360 - \cdots$

۲- $y(x) = 1 - x^5/30 + x^{12}/3960 - \cdots$

۳- $y(x) = 1 - x^4/30 + x^{10}/3960 - \cdots$

۴- $y(x) = 1 - x^6/30 + x^{12}/3960 - \cdots$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightsquigarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+4} = 0$$

$n-2$: $n = m+2$ — $n+4$: $n = m-4$

ضریب $x^m = 0$ $\rightsquigarrow$ $(m+2)(m+1)a_{m+2} + a_{m-4} = 0$

گزینه ۲

$$a_{m+2} = -\frac{1}{(m+2)(m+1)} a_{m-4}$$

$m=4$: $a_6 = -\frac{1}{30} a_0 = -\frac{1}{30}$

$m=10$: $a_{12} = -\frac{1}{132} a_6$

۱۳۲ / ۲۹۶۰

معادلهٔ $y'' + (p + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4})y = 0$ (برای عدد ثابت p) دارای جوابی بصورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با کدام فرمول بازگشتی است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) $(n+1)(n+2)a_n + (p-n)a_{n+2} = 0$

۲) $(n+1)(n+2)a_{n+2} + (p-n)a_n = 0$

۳) $(n+1)(n+2)a_{n+2} + (p+\frac{1}{2})a_n - \frac{1}{4}a_{n-2} = 0$

۴) $(n+1)(n+2)a_{n-2} + (p+\frac{1}{2})a_n - \frac{1}{4}a_{n+2} = 0$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ← تقطع عادی $x=0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(p+\frac{1}{2})a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{4}a_n)x^{n+2} = 0$$

ضریب x^m $= 0 \rightsquigarrow (m+2)(m+1)a_{m+2} + (p+\frac{1}{2})a_m - \frac{1}{4}a_{m-2} = 0$

چهار جمله اول جواب معادله دیفرانسیل $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$ در $x = 0$ کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) $y(x) = a_1 x + a_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots)$

۲) $y(x) = a_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4\times 3}x^4 + \ldots) + a_1 x$

۳) $y(x) = a_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4) + \frac{1}{3!\times 2}x^6 + \ldots$

۴) $y(x) = a_0 x + \frac{a_1}{3}x^3 + \frac{a_0}{4}x^4 + \ldots$

$$y'' + \frac{x}{x^2+1}y' - \frac{1}{x^2+1}y = 0$$

$x=0$ ← عادی

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y' = \ldots$

$y'' = \ldots$

جایگذاری ← ضریب $x^m = 0$ ← رابطه بازگشتی

ضریب جملهٔ سوم از جواب معادلهٔ $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$ عبارتست از: (ریاضی ۸۷)

۱) صفر

۲) $\frac{1}{16\times 4}$

۳) $-\frac{1}{4}$

۴) $-\frac{1}{8\times 36}$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+0)!}(\frac{x}{2})^{2m+0} = J_0(x)$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64\times 16}x^4 + \ldots$$

تبدیل لاپلاس

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \ldots$$

$$\tan(2x-1)\,y'' + x y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' + \frac{x}{\tan(2x-1)}\,y' = \frac{1}{x\tan(2x-1)}$$

$$y'' + \frac{x\cos(2x-1)}{\sin(2x-1)}\,y' = \frac{\cos(2x-1)}{x\sin(2x-1)}$$

$$\sin(2x-1)=0 \rightsquigarrow 2x-1 = k\pi \rightsquigarrow 2x = k\pi+1$$

$$x = \frac{k\pi+1}{2}$$

$$\tan(2x+1)\,y'' + x y' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\sin(2x+1)}{\cos(2x+1)}\,y'' + x\,y' = \frac{1}{x}$$

$$\cos(2x+1)=0 \rightsquigarrow 2x+1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{(2k+1)\pi-2}{4}$$

$k=-2$: $-\frac{3\pi+2}{4}$

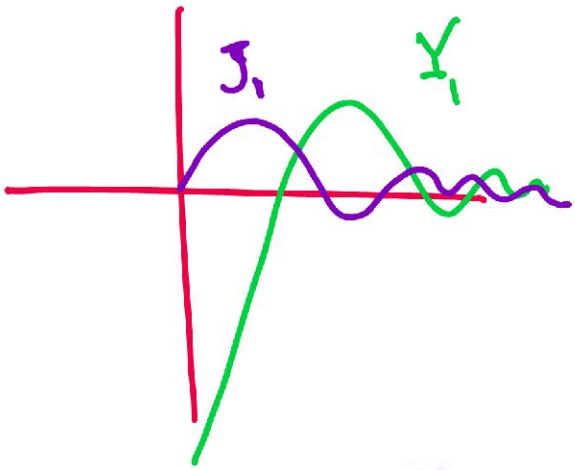
$\frac{-\pi-2}{4}$

$\frac{3\pi-2}{4}$

$\frac{5\pi-2}{4}$

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - 1}{x^2} y = 0$$



$$P_0 = 1 \qquad q_0 = -1$$

$$r^2 + (1-1)r - 1 = 0 \rightsquigarrow r^2 - 1 = 0 \begin{cases} r = 1 \rightsquigarrow J_1 \\ r = -1 \end{cases}$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \rightsquigarrow \begin{cases} y' = \cdots \\ y'' = \cdots \end{cases}$$

۳۰. یک جواب معادله لژاندر $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$، $y_1 = x$ است. جواب دیگر این معادله که مستقل خطی با این جواب باشد کدام است؟ (ریاضی ـ ۸۷)

۱) $y_2 = \frac{x}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x}) + 1$

۲) $y_2 = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) - \frac{1}{x}$

۳) $y_2 = \frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 1$

۴) $y_2 = \frac{1}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x}) + \frac{1}{x}$

$$W = \begin{vmatrix} x & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix}$$

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0 \quad (P = -\frac{2x}{1-x^2}) \rightsquigarrow W = e^{-\int P dx} = e^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$xy' - y = \frac{1}{1-x^2} \rightsquigarrow y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(1-x^2)}$$

$$y = x\left[\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}dx\right] = x\left[\int(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{x^2})dx\right] = \frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 1$$

۳۱. در صورتی که روش فرینیوس را برای حل معادلهٔ $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ به ازای ریشه بزرگتر معادله مشخصه بکار بریم، معادله بازگشتی ضرایب کدام است؟ (ریاضی ـ ۸۷)

۱) $a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+4)}$

۲) $a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+1)(n+3)}$

۳) $a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+4)}$

۴) $a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+3)}$

تکراری

۳۲. کدام گزینه در مورد معادله $(\ln x)y'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$ درست است؟ (ریاضی ـ ۸۷)

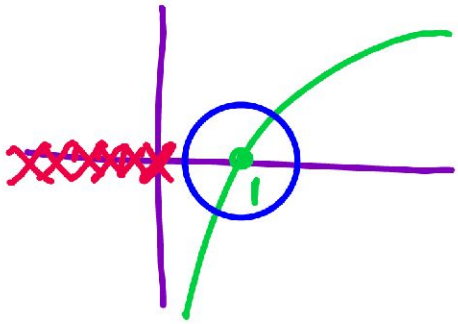
۱) $x = 1$ یک نقطه منفرد نامنظم معادله فوق است.

۲) $x = 1$ یک نقطه منفرد منظم است و حداکثر شعاع همگرایی جواب به شکل سری فرینیوس برابر ۱ است.

۳) $x = 1$ یک نقطه منفرد منظم است و حداقل شعاع همگرایی جواب به شکل سری فرینیوس برابر ۱ است.

۴) $x = 1$ یک نقطه عادی است و حداقل شعاع همگرایی سری جواب برابر ۱ است.

$$y'' + \frac{1}{2\ln x}y' + \frac{1}{\ln x}y = 0$$



نوع معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ کدام است؟ و اگر $y = x$ یک جواب آن باشد، جواب دیگر مستقل خطی آن کدام است؟ (ریاضی - ۸۷)

۱) بسل و $y = -1 + \frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

۲) لژاندر و $y = -1 + \frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

۳) ریکاتی و $y = 1 - \frac{x}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x})$

۴) خطی مرتبه دوم و جواب مستقل خطی دیگری نسبت به $y = x$ ندارد.

اگر $y_1 = x^{-\frac{1}{2}}\cos x$ جوابی از معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ باشد جواب معادله با شرط اولیه $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ و $y'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\pi}$ کدام است؟ (ریاضی - ۸۸)

۱) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}}\sin x$

۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-\frac{1}{2}}\sin x$

۳) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}}\sin x + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{\frac{1}{2}}\sin x$

۴) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x^{\frac{1}{2}}\cos x$

ضرایب سری پاسخ معادله دیفرانسیل زیر حول $x = 0$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟ (ریاضی ۸۸)

$$(x^2+3)y'' - 7xy' + 16y = 0$$

۱) $a_{n+2} = \frac{-(n-4)^2}{(n+1)(n+2)}a_n$

۲) $a_{n+2} = \frac{-(n-4)(n-3)}{3(n+1)(n+2)}a_n$

۳) $a_{n+2} = -\frac{(n-4)^2}{3(n+1)(n+2)}a_n$

۴) $a_{n+2} = \frac{(n-4)^2}{3(n+1)(n+2)}a_n$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = ?$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}\right] = -x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}$$

$$J_{\frac{5}{2}} = -x^{\frac{1}{2}}\left[x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}\right]'$$

$$J_{\frac{5}{2}} = -x^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\right]'$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)'$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{x}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{x}}{x}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right)$$

سه جمله اول جواب سری فرو بینوس معادله‌ی دیفرانسیل $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$ وابسته به ریشه بزرگتر که در شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ صدق کند کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) $y(x) = x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^3 + \cdots$

۲) $y(x) = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{30}x^3 + \cdots$

۳) $y(x) = x^{\frac{1}{2}}[1 - x + \frac{x^2}{6} + \cdots]$

۴) $y(x) = x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{30}x^3 + \cdots$

یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$ به صورت سری توانی حول مبداء کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)!}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n!)}$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n!)^2}$

معادله دیفرانسیل $4x^2y'' + 4xy' + (8x^2 - 1)y = 0$ مفروض است با فرض اینکه $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ توابع بسل به ترتیب از مرتبه $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ باشند، جواب عمومی معادله داده شده کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $y = A_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + A_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

۲) $y = A_1\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{x}} + A_2\frac{\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}$

۳) $y = A_1\frac{\sin\sqrt{x}}{x} + A_2\frac{\cos\sqrt{x}}{x}$

۴) $y = A_1\frac{\sin\sqrt{2}x}{x} + A_2\frac{\cos\sqrt{2}x}{x}$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' + (x^4 - 1)y = 0$ به ازای $x > 0$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x)$

۲) $C_1 J_1(x^2) + C_2 J_{-1}(x^2)$

۳) $C_1 J_{1/2}(x^2/2) + C_2 J_{-1/2}(x^2/2)$

۴) $C_1 J_{1/2}(x/2) + C_2 J_{-1/2}(x/2)$

$\frac{x^2}{2} = t$

$y''_{xx} = x^2 \ddot{y}_{tt} + 1\, \dot{y}_t$

$y'_x = x\, \dot{y}_t$

$x^2[x^2\ddot{y} + \dot{y}] + x[x\dot{y}] + [x^4 - 1]y = 0$

$4t^2\ddot{y} + 4t\dot{y} + (4t^2 - 1)y = 0$

$t^2\ddot{y} + t\dot{y} + (t^2 - \frac{1}{4})y = 0 \rightsquigarrow c_1 J_{\frac{1}{2}}(t) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(t)$

$t = \frac{x^2}{2}$, $t = \frac{x^2}{4}$

انتگرال $\int x J_0(x)\,dx$ که در آن $J_0(x)$ تابع بِسل از مرتبه صفر می‌باشد، کدام است؟ (ریاضی-۹۲)

۱) $x^2 J_1(x) + C$

۲) $x^{-1} J_1(x) + C$

۳) $x J_2(x) + C$

۴) $x J_1(x) + C$

$$\int x^n J_{n-1}(x)\,dx = x^n J_n$$

در معادله $(x\sin x)y'' + 3y' + xy = 0$ نقاط تکین نامنظم عبارتند از: $(k \in \mathbb{Z})$ (هندسی نفت ـ ۹۲)

۱) ۰
۲) $k\pi$
۳) $k\pi , k \neq 0$
۴) همه نقاط تکین‌اند

$$y'' + \boxed{\frac{3}{x\sin x}}\, y' + \frac{1}{\sin x}\, y = 0$$

$x=0$ قطب مرتبه ۲ (تکین نامنظم)

$x=0$

$\sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi \longrightarrow$ { $x=0$ ، $x=k\pi$ $(k\neq 0)$ } منظم

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx$$

یک جواب معادله $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$ کدام است؟ $J_0(x)$ می‌باشد. جواب دوم آن کدام است؟

$$y_2 = J_0 \int \frac{1}{x J_0^2}\, dx$$