۲۶- چگالی بار سطحی یکنواخت روی یک استوانهٔ طویل به شعاع a برابر ρ_s است. محور استوانه بر محور z منطبق و اندازهٔ میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطهٔ $(x=2a, y=0, z=0)$ برابر $2\frac{V}{m}$ است. مقدار ρ_s کدام است؟

$$\rho_L = \rho_s(2\pi a) \rightsquigarrow E = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 r}\Big|_{r=2a} = 2$$

$$\rho_s = 4\varepsilon_0$$

۱) $\frac{1}{2}\varepsilon_0$

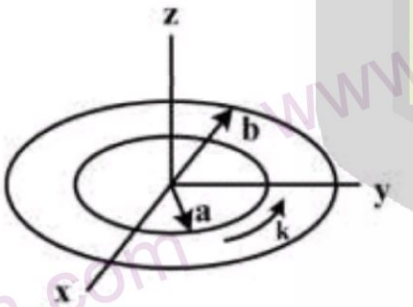
۲) ε_0

۳) $2\varepsilon_0$

۴) $4\varepsilon_0$

سوال بسیار ساده مربوط به موارد خاص محاسبه میدان الکتریکی

۲۷- مطابق شکل زیر طوق هادی در $z=0$، $0 \le \varphi \le 2\pi$ و $a \le r \le b$ حامل جریان سطحی با چگالی $\vec{k} = \frac{k_0}{\rho}\hat{\varphi}(\frac{A}{m})$ است. گشتاور دو قطبی مغناطیسی این طوق کدام است؟



$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iint \vec{\rho} \times [\vec{k}\,\rho\, d\rho\, d\varphi]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_a^b \rho\,\hat{a}_\rho \times \left[\frac{k_0}{\rho}\rho\, d\rho\, d\varphi\, \hat{a}_\varphi\right]$$

$$= \frac{\pi k_0}{2}(b^2 - a^2)\,\hat{a}_z$$

۱) $\hat{z}\frac{\pi k_0}{2}(b^2-a^2)$

۲) $\hat{z}\pi k_0(b^2-a^2)$

۳) $\hat{z}2\pi k_0(b-a)$

۴) $\hat{z}2\pi k_0(b^2-a^2)$

سوال بسیار ساده و تکراری و بدون نیاز به حل تشریحی

۲۸- دو حلقهٔ هادی مدور یکی روی صفحهٔ $z=0$ با شعاع a و دیگری روی صفحهٔ $z=c$ با شعاع b با مرکز هر دو حلقه روی محور z، مفروض است. با فرض $b \ll a$، اندوکتانس متقابل بین این دو حلقه کدام است؟

۱) $M=\dfrac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{2(a^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$

۲) $M=\dfrac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{4(a^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$

۳) $M=\dfrac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{2(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$

۴) $M=\dfrac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{4(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$

با توجه به اینکه $b \ll a$ می‌باشد، با یک تقریب مناسب می‌توان میدان مغناطیسی در نقاط مختلف حلقه واقع در صفحه $z=c$ را نسبت و برابر میدان مغناطیسی در مرکز آن در نظر گرفت:

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(a^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{a}_z$$

ساده و تکراری و بدون نیاز به حل تشریحی

$$\varphi=\iint \vec{B}_1\cdot d\vec{S}_2=\frac{\mu_0 I_1 a^2(\pi b^2)}{2(a^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow M=\frac{\varphi}{I_1}=\frac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{2(a^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۲۹- لایهٔ کروی $a \le R \le 2a$ ، $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le \phi < 2\pi$ دارای بردار مغناطش (Magnetization) یکنواخت $\vec{m}=\mu_0\hat{z}$ است و بقیهٔ فضا را فضای آزاد تشکیل می‌دهد. انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در لایهٔ کروی $4a \le R \le 6a$ ، $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le \phi < 2\pi$ ، کدام است؟

یادآوری:

$$\left(\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\phi\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\phi}F_\theta\right]\hat{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Fr}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right]\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)-\frac{\partial Fr}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}\right)$$

۱) $w_m=0$

۲) $w_m=\dfrac{49\times 19}{9\times 81\times 16}\mu_0\pi a^3\mu_0^2$

۳) $w_m=\mu_0\dfrac{4\pi}{3}a^3\mu_0^2$

۴) $w_m=24\mu_0\pi a^3\mu_0^2$

$$\vec{M}=\mu_0\hat{z} \rightsquigarrow \vec{m}=\iiint \vec{M}\,dv=\frac{4}{3}\pi\left[(2a)^3-(a)^3\right]\mu_0\hat{z}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_r+\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right)$$

$$|\vec{B}|^2=\frac{49a^6\mu_0^4}{9r^6}\left(3\cos^2\theta+1\right)$$

سوال ساده و تکراری (محاسباتی)

$$w_m=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{4a}^{6a}\frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{49\times 19}{9\times 81\times 16}\mu_0\pi a^3\mu_0^2$$

۳۰- جریان خطی ثابت I روی محور z از $-\infty$ تا مبدأ مختصات وجود دارد و سپس روی ربع اول صفحهٔ هادی xy $(x>0, y>0)$ توزیع می‌شود. شدت میدان مغناطیسی $\bar{H}$ در $(0,0,h)$ کدام است؟

۱) $\bar{H}=\frac{I}{2\pi^2 h}(\bar{a}_x+\bar{a}_y)$

۲) $\bar{H}=\frac{I}{4\pi^2 h}(\bar{a}_x-\bar{a}_y)$

۳) $\bar{H}=\frac{I}{4\pi^2 h}(\bar{a}_x+\bar{a}_y)$

۴) $\bar{H}=\frac{I}{2\pi^2 h}(\bar{a}_x-\bar{a}_y)$

$$\vec{J}_s=\frac{I}{\frac{\pi}{2}r}\hat{a}_r=\frac{2I}{\pi r}\hat{a}_r$$

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\frac{(\vec{J}_s\, r\,dr\,d\varphi)\times[-r\hat{a}_r+h\hat{a}_z]}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

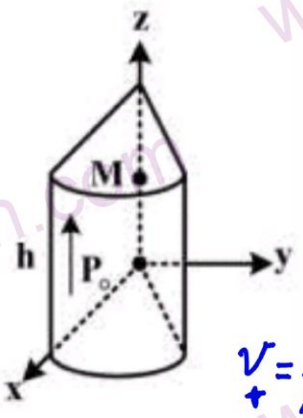
$$=\frac{Ih}{2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\frac{r\,dr\,d\varphi\,(-\hat{a}_\varphi)}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\sin\varphi\,\hat{a}_x-\cos\varphi\,\hat{a}_y$

$$=\frac{I}{2\pi^2 h}(\hat{a}_x-\hat{a}_y)$$

سؤال کاملاً تکراری
(دکتری خارج ۹۳)

۳۱- در ناحیهٔ استوانه‌ای $0\le r\le a$ ، $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ و $0\le z\le h$ مطابق شکل زیر و عایق با قطبیدگی (Polarization) $P_0\hat{z}$ وجود دارد. میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطهٔ $M(x=0, y=0, z=\frac{h}{2})$ کدام است؟



۱) $\hat{z}\frac{P_0 h}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4}}}+\frac{2}{h}\right)$

۲) $\hat{z}\frac{P_0 h}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4}}}-\frac{2}{h}\right)$

۳) $\hat{z}\frac{P_0 h}{16\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4}}}-\frac{2}{h}\right)$

۴) $\hat{z}\frac{P_0 h}{16\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4}}}+\frac{2}{h}\right)$

$$\rho_b=-\nabla\cdot\vec{P}=0$$

$$\rho_{sb}=\begin{cases}P_0 & z=h \text{ روی سطح}\\ -P_0 & z=0 \text{ روی سطح}\end{cases}$$

$$V_+=\frac{1}{4}\left\{\frac{P_0}{2\varepsilon}\left[\sqrt{a^2+(h-z)^2}-(h-z)\right]\right\}$$

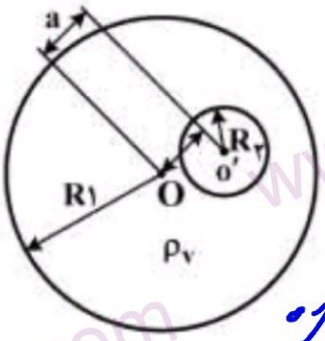
$$V_-=\frac{1}{4}\left\{\frac{-P_0}{2\varepsilon}\left[\sqrt{a^2+z^2}-z\right]\right\}$$

$$V=V_++V_-=\frac{P_0}{16\varepsilon}\left(\sqrt{a^2+(h-z)^2}-\sqrt{a^2+z^2}+2z-h\right)$$

$$E=-\nabla V\Big|_{z=\frac{h}{2}}=\frac{P_0 h}{16\varepsilon}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4}}}-\frac{2}{h}\right\}\hat{z}$$

موارد خاص
(محاسباتی)

۳۲- کره‌ای به شعاع R_1 باری به چگالی حجمی ρ_v را به‌طور یکنواخت (غیر از یک حفرهٔ کروی کوچک به شعاع R_2) در درون خود دارد. فاصلهٔ بین مراکز دو کره a است. با فرض پتانسیل در بی‌نهایت برابر با صفر، پتانسیل ϕ در مرکز حفرهٔ کروی، کدام است؟



۱) $\phi_{o'} = \frac{\rho_v}{4\varepsilon_0}[2(R_1^2 - R_2^2) - a^2]$

۲) $\phi_{o'} = \frac{\rho_v}{6\varepsilon_0}[3(R_1^2 - R_2^2) - a^2]$

۳) $\phi_{o'} = \frac{\rho_v}{2\pi\varepsilon_0}[2(R_1^2 - R_2^2) - a^2]$

۴) $\phi_{o'} = \frac{\rho_v}{3\pi\varepsilon_0}[3(R_1^2 - R_2^2) - a^2]$

(موارد خاص)

پتانسیل الکتریکی در داخل کره باردار یکنواخت با چگالی بار حجمی ρ و شعاع R در فاصله r از مرکز کره از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$$

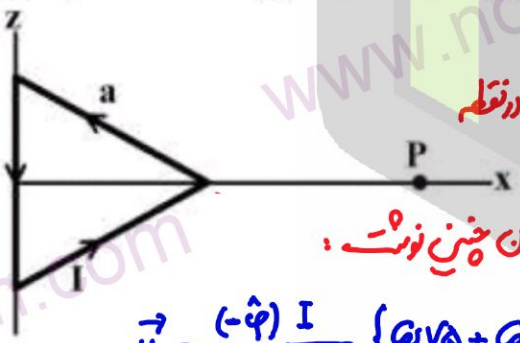
با استفاده از قضیه جمع آثار می‌توان چنین نوشت:

$$V = V_+ + V_- = \left[\frac{\rho_v R_1^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho_v}{6\varepsilon_0}(R_1^2 - a^2)\right] + \left[\frac{-\rho_v R_2^2}{3\varepsilon_0} + \frac{(-\rho_v)}{6\varepsilon_0}(R_2^2 - 0)\right]$$

$$= \frac{\rho_v}{6\varepsilon_0}\left[3(R_1^2 - R_2^2) - a^2\right]$$

بدون نیاز به حل تشریحی

۳۳- مطابق شکل زیر، حلقه‌ای به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، جریان I را حمل می‌کند. شدت میدان مغناطیسی $(\vec{H})$ در نقطهٔ $P(x = 2a, y = 0, z = 0)$ کدام است؟



۱) $\hat{\varphi}\frac{I}{\pi a}(\sin 15^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sin 75^\circ}{2+\sqrt{3}})$

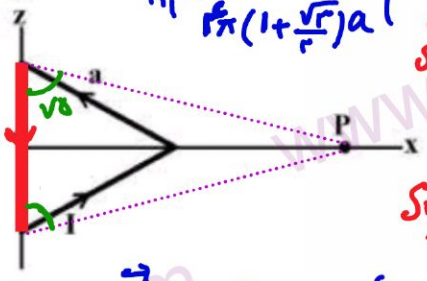
۲) $\hat{\varphi}\frac{2I}{\pi a}(\sin 75^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sin 15^\circ}{2+\sqrt{3}})$

۳) $\hat{\varphi}\frac{I}{\pi a}(\sin 75^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin 15^\circ}{2+\sqrt{3}})$

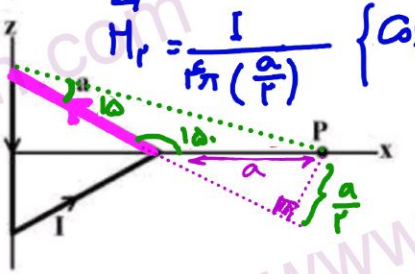
۴) $\hat{\varphi}\frac{2I}{\pi a}(\sin 75^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin 15^\circ}{2+\sqrt{3}})$

احتمالاً منظور طراح می‌بیند $\vec{H}$ در نقطه $P(x = a + \frac{\sqrt{3}}{2}a, y = 0, z = 0)$ بوده که در این صورت می‌توان چنین نوشت:

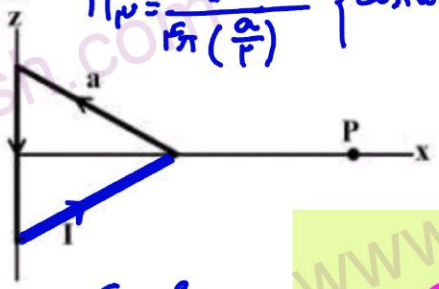
$$\vec{H}_1 = \frac{(-\hat{\varphi})\, I}{4\pi(1+\frac{\sqrt{3}}{2})a}\{\underbrace{\cos 75}_{\sin 15^\circ} + \underbrace{\cos 75}_{\sin 15^\circ}\} = \frac{-I}{\pi a}\left\{\frac{\sin 15}{2+\sqrt{3}}\right\}\hat{\varphi}$$



$$\vec{H}_2 = \frac{I}{4\pi(\frac{a}{2})}\{\underbrace{\cos 15^\circ}_{\sin 75^\circ} + \underbrace{\cos 150}_{-\cos 30}\}(\hat{\varphi})$$



$$\vec{H}_3 = \frac{I}{4\pi(\frac{a}{2})}\{\cos 15^\circ + \cos 150\}(\hat{\varphi})$$

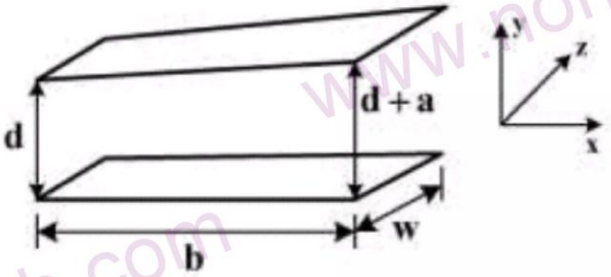


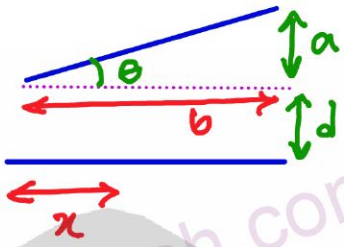
$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 = \hat{\varphi}\frac{I}{\pi a}\left\{\sin 75^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin 15^\circ}{2+\sqrt{3}}\right\}$$

می‌باشد

۳۴- خازنی با صفحه‌های هادی مورب (غیرموازی) به ابعاد w و b مطابق شکل زیر مفروض است. اگر گذردهی الکتریکی عایق خازن ε باشد، ظرفیت خازن با فرض صرف‌نظر کردن از اثر لبه‌ها، کدام است؟

$tg\theta = \frac{a}{b}$



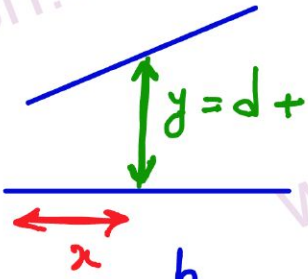


۱) $c = \frac{\varepsilon w}{\tan^{-1}(\frac{b}{a})} \ln(\frac{d+a}{d})$

۲) $c = \frac{\varepsilon w}{\tan^{-1}(\frac{a}{b})} \ln(\frac{d+a}{a})$

۳) $c = \frac{\varepsilon w}{\tan^{-1}(\frac{b}{a})} \ln(\frac{d+a}{a})$

۴) $c = \frac{\varepsilon w}{\tan^{-1}(\frac{a}{b})} \ln(\frac{d+a}{d})$??

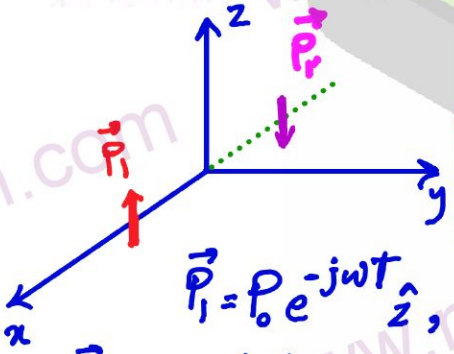


$y = d + x\,tg\theta = d + \frac{ax}{b}$

$$C = \int_0^b \frac{\varepsilon_0 w\,dx}{d + \frac{a}{b}x} = \frac{\varepsilon_0 w}{\frac{a}{b}} \operatorname{Ln}\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

بسیار ساده و بدون نیاز به حل تشریحی

۳۵- یک دیپل الکتریکی با فرکانس f و دامنهٔ P_0 به‌صورت $\bar{P} = P_0 e^{-j\omega t}\hat{z}$ در فاصله $\frac{a}{2}$ از یک صفحهٔ بی‌نهایت بزرگ هادی کامل $x = 0$ و موازی با آن قرار گرفته است. با فرض $r \gg \lambda$ و $r \gg \frac{a}{2}$ در مختصات کروی، بردار پتانسیل مغناطیسی در نقطهٔ (r, θ, ϕ) $(k = \frac{2\pi}{\lambda})$ کدام است؟



احتمالاً مربوط به معضله میدان‌های متغیر با زمان و آنتن‌ها می‌باشد.

۱) $A_z = \frac{-\mu_0}{2\pi}\frac{\omega P}{r} e^{j(kr-\omega t)} \sin(\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\phi)$

۲) $A_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega P_0}{r} e^{j(kr-\omega t)} \sin(ka\sin\theta\cos\phi)$

۳) $A_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega P_0}{r} e^{j(kr-\omega t)} \sin(ka\sin\theta\sin\phi)$

۴) $A_z = \frac{-\mu_0}{2\pi}\frac{\omega P_0}{r} e^{j(kr-\omega t)} \sin(\frac{ka}{2}\sin\theta\sin\phi)$

$\vec{P}_i = P_0 e^{-j\omega t}\hat{z}, \quad \vec{a}_i = \frac{a}{2}\hat{x}$

$\vec{P}_r = -P_0 e^{-j\omega t}\hat{z} = -\vec{P}_i, \quad \vec{a}_r = -\frac{a}{2}\hat{x}$

$\vec{P}_T = \vec{P}_i + \vec{P}_r e^{-j\vec{k}\cdot(\vec{a}_r - \vec{a}_i)}$

$\vec{P}_T = \vec{P}_i(1 - e^{+jk\hat{r}\cdot(a\hat{x})}) = \vec{P}_i(1 - e^{jka\cos\theta\sin\varphi})$

$\vec{P}_T = \vec{P}_i e^{jk\frac{a}{2}\cos\theta\sin\varphi}\left[\underbrace{e^{-jk\frac{a}{2}\cos\theta\sin\varphi} - e^{jk\frac{a}{2}\cos\theta\sin\varphi}}_{-2j\sin(\frac{ka}{2}\cos\theta\sin\varphi)}\right]$

فقط گزینه ۱ دارای این ویژگی است.