۱- اگر $u(x,t)$ جواب مسئله موج

$$\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0 \ , \ 0<x<2, t>0 \\ u(x,0)=2x+1 \\ u_t(x,0)=x \ , \ 0\le x\le 2 \\ u(0,t)=u(2,t)=0 \ , \ t\ge 0 \end{cases}$$

$c^2=9$

شکل اولیه

سرعت اولیه

$T=4$

منتشر به سمت دو طرف

باشد، مقدار تقریبی $u(0/4,1/3)$ کدام است؟

۱) ۱/۲۴

۲) ۱/۷۹

۳) ۱/۹۶

۴) ۲/۱۵

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+3t)+f(x-3t)\}+\frac{1}{2\times 3}\int_{x-3t}^{x+3t} g(s)\,ds$$

$$u(0/4,1/3)=\frac{1}{2}\{f(1/3)+f(-1/5)\}+\frac{1}{6}\int_{-1/5}^{1/3} g(s)\,ds$$

$$=\frac{1}{2}\{f(0/3)+f(0/5)\}+\frac{1}{6}\left[\cancel{\int_{-0/5}^{0/3} g(s)\,ds}+\int_{0/3}^{1/3} g(s)\,ds\right]$$

$$=\frac{1}{2}\{f(0/3)+f(0/5)\}+\frac{1}{6}\int_{-0/5}^{0/3} \overset{x}{g(s)}\,ds$$

$$=\frac{1}{2}\{1/6+2\}+\frac{1}{12}\{(0/3)^2-(0/5)^2\}\simeq 1/8-0/01\simeq 1/79$$

۲- فرض کنید $z=x+iy$ باشد. مقدار ماکزیمم $|\sin z|$ در دامنهٔ مربعی شکل $D=\{(x,y), 0\le x,y\le 2\pi\}$، کدام است؟

تمرین

۱) ۱

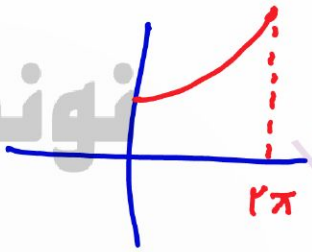
۲) $e^{2\pi}$

۳) $\sinh 2\pi$

۴) $\cosh 2\pi$

$$|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}$$

$$|\sinh y|\le|\sin z|\le\cosh y$$



$$\max|\sin z|=\max(\cosh y)=\cosh 2\pi$$

۳- جواب مسئلهٔ پواسن روبه‌رو کدام است؟

عامل ناهمگن

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2}=\boxed{\dfrac{\sin\theta}{r^2}} \quad , 0<r<2 \quad , 0<\theta<2\pi \\ \omega(r,0)=0 \\ \omega(2,\theta)=\sin 3\theta \end{cases}$$

(بدون نیاز به حل تشریحی)

$$\omega(r,\theta)=u(r,\theta)-\sin\theta$$

$$\boxed{\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u(r,0)=0 \\ u(2,\theta)=\sin\theta+\sin 3\theta \end{cases}}$$

۱) $\omega(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin 3n\theta$ ✗

۲) $\omega(r,\theta)=\frac{1}{2}r\sin\theta+\frac{1}{8}r^3\sin\theta$ ✗

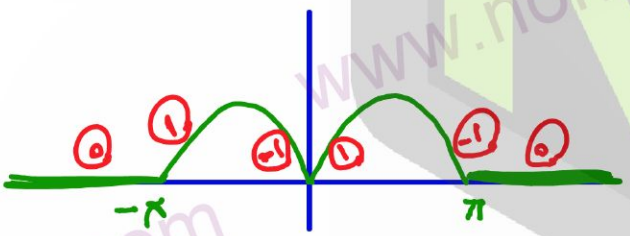
۳) $\omega(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+r^{-n})\sin 3n\theta$ ✗

۴) $\omega(r,\theta)=(\frac{1}{2}r-1)\sin\theta+\frac{1}{8}r^3\sin 3\theta$

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}r^1\sin\theta+\frac{1}{8}r^3\sin 3\theta$$

$$\omega(r,\theta)=u(r,\theta)-\sin\theta$$

۴- انتگرال فوریهٔ تابع $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|\le\pi \\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$ کدام است؟



ساده

۱) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)d\omega$

۲) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}\sin(\omega x)d\omega$ ✗

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)d\omega$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}\sin(\omega x)d\omega$ ✗

فرمول محاسبه می‌کنیم $A(w)$

$$A(w)=\frac{\frac{1}{w^2}[-2\cos 0-2\cos\pi w]}{1-\frac{1}{w^2}}$$

$$=\frac{2(1+\cos\pi w)}{1-w^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(w)\cos wx\,dw$$

۵- اگر C مرز نیم‌دایرهٔ فوقانی $|z|=r$ در جهت مثبت و $I(r)=\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ باشد، $\lim_{r\to\infty} I(r)$ کدام است؟

$$I(r)=\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} = \pi i\left(\frac{e^{iz}}{1}\right)\Big|_{z=0} = \pi i$$

ساده

۱) ۰
۲) ۱
۳) π
۴) ∞

$$\lim_{r\to\infty} I(r) = \pi i$$

اتمام منظور طاع

برای $\lim_{r\to\infty} |I(r)|$

۶- مسئلهٔ گرمای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t(x,t)-4u_{xx}(x,t)=3u(x,t), & x>0, t>0 \\ u(x,0)=-e^{-x}, & x>0 \\ u(0,t)=0, & t\geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{u_t(x,t)\} = sU(x,s)-u(x,0)$$

$U(x,s) = v(x,s)$

اگر $v(x,s)$ تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ باشد، آنگاه $v(x,s)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

$$sv(x,s)-u(x,0)-4v''(x,s)=3v(x,s)$$

$$4v''(x,s)+(3-s)v(x,s)=e^{-x}$$

تبدیل لاپلاس

۱) $4v''(x,s)+(3-s)v(x,s)=e^{-x}$
۲) $v''(x,s)+(4s-3)v(x,s)=e^{-x}$
۳) $4v''(x,s)+(s-3)v(x,s)=se^{-x}$
۴) $v''(x,s)+(3-4s)v(x,s)=se^{-x}$

بسیار ساده

۷- معادلهٔ دیفرانسیل جزئی ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+r(x)$ به یک معادلهٔ همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌شود. $v(x,0)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx}=u_t+x-1 & ,0<x<2\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=3 & ,\ u(2,t)=-1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=1-x^3 & ,0<x<2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{xx}=v_x \\ v(0,t)=0\ ,\ v(2,t)=0 \end{cases}$$

تکراری

$x=0 \rightsquigarrow r(x)\big|_{x=0}=3 \rightsquigarrow$ اولا ناوردست

$x=2 \rightsquigarrow r(x)\big|_{x=2}=-1 \rightsquigarrow$ ۴ ناوردست

$$\begin{cases} r''(x)=x-1 \\ r(0)=3\ ,\ r(2)=-1 \end{cases}$$

بدون نیاز به حل تشریحی

۱) $-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x-2$

۲) $-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}x-2$

۳) $-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}x+3$

۴) $-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x+3$

۸- اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز تابع $u(x,y)=(x^2-y^2+1)^2-4x^2y^2$ با شرط $v(0,0)=0$ باشد، مقدار $v(1,1)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۴

۴) ۴-

$y=0,\ x=z \rightsquigarrow f(z)=(z^2+1)^2$

$f(z)=(x^2-y^2+1+i2xy)^2=u(x,y)+i4xy(x^2-y^2+1)$

$v(x,y)=4xy(x^2-y^2+1) \rightsquigarrow v(1,1)=4$

تکراری و ساده

۹- اگر $F_s\{f(x)\}=\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$ تبدیل فوریهٔ سینوسی تابع $f(x)$ باشد، تبدیل فوریهٔ سینوسی تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}e^{-2\omega}$

۲) $\frac{\pi}{2}e^{2\omega}$

۳) $\pi e^{-2\omega}$

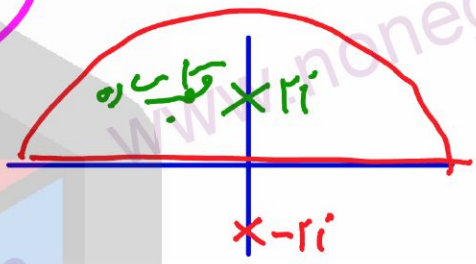
۴) $e^{2\omega}$

$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+4}}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin\omega x}_{\text{فرد}}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\omega x}{x^2+4}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left\{2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=2i}\frac{ze^{i\omega z}}{z^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left\{\cancel{2}\pi i\frac{\cancel{z}e^{i\omega z}}{\cancel{2z}}\right\}\Bigg|_{z=2i}$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-2\omega}$$

تکراری و ساده



تکراری و ساده

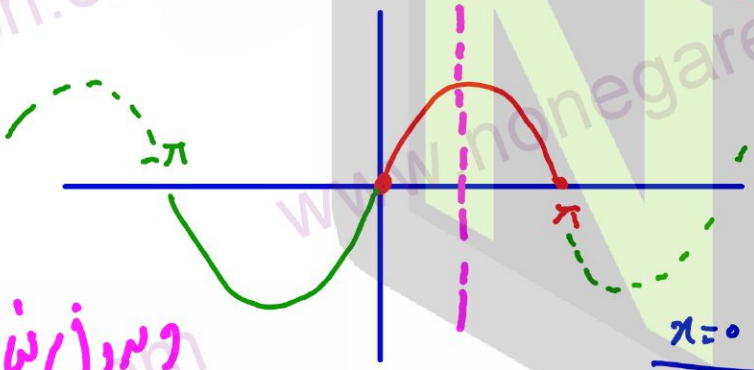
۱۰- سری نیم‌دامنهٔ سینوسی تابع $f(x)=x(\pi-x)$ در فاصلهٔ $0<x<\pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2m+1)\pi}\sin(2m+1)x$

۲) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8}{(2m+1)^3\pi}\sin(2m+1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m\pi}\sin 2mx$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3\pi}\sin 2mx$



$T=2\pi$

$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}$

$x=0$	$x=\frac{T}{4}$
فرد	زوج

بدون نیاز به حل تشریحی

فقط یک رفرنس فرد سینوسی دارد.

که درجه مخرج این فرایب سری فوریه آن قطعاً یک نمی‌باشد.

(؟؟؟)

۱۱- اگر $F(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-i\omega x}dx$ تبدیل فوریهٔ $f(x)$ باشد، تبدیل فوریهٔ جواب مسئلهٔ زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & ,t>0 ,x\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=0 & ,x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

نسبت به x حدس

نسبت به t اشتقاق عادی دارد.

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)e^{+i\omega x}d\omega$$

۱) $\int_0^t F(\omega,\tau)e^{a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$ ✗

۲) $\int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۳) $\int_0^{\infty} F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$ ✗

۴) $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$ ✗

$$\frac{dU(\omega,t)}{dt}-a^2(-\omega^2U(\omega,t))=F(\omega,t)$$

معادله خطی مرتبه اول

$$U(\omega,t)=e^{-a^2\omega^2 t}\left[\int_0^t F(\omega,\tau)e^{+a^2\omega^2\tau}d\tau+C(\omega)\right]$$

(بدون نیاز به حل شرایط)

$$U(\omega,0)=0 \rightsquigarrow C(\omega)=0$$

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

$$U(\omega,t)=\int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$$

$$y=e^{-\int P}\left[\int Qe^{\int P}+c\right]$$

۱۲- فرض کنید تابع تحلیلی $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ برای هر $z\in\mathbb{C}$ در نامساوی $|f(z)-2z^2-iz|\le\sqrt{2}$ صدق کند. در این‌صورت مقدار $\oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{z}\right)dz$ کدام است؟

تحلیلی تحلیلی تحلیلی

۱) $2\pi i$

۲) $-2\pi i$

۳) 2π

۴) -2π

مکرر دیگری

و ساده

$$f(z)-2z^2-iz=C \text{ (ثابت)}$$

$$f(z)=C+2z^2+iz$$

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=C+\frac{2}{z^2}+\frac{i}{z}$$

$$\oint f\left(\frac{1}{z}\right)dz=\cancel{\oint_{|z|=1} C\,dz}^{\,0}+\cancel{\oint_{|z|=1}\frac{2}{z^2}dz}^{\,0}+i\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=i[2\pi i]$$

$$=-2\pi$$

۱۳- تصویر خط راست $2x+3y=5$ تحت نگاشت $w=u+iv=\frac{1}{z}$، کدام است؟

۱) $(u-\frac{1}{5})^2+(v+\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

۲) $(u-\frac{1}{5})^2+(v-\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

۳) $(u+\frac{1}{5})^2+(v-\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

۴) $(u+\frac{1}{5})^2+(v+\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

تکراری در ۹۵

$$\frac{1}{z} \rightsquigarrow \begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$2\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)+3\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)=5$$

$$u^2+v^2+\frac{3}{5}v-\frac{2}{5}u=0 \rightsquigarrow \left(u-\frac{1}{5}\right)^2+\left(v+\frac{3}{10}\right)^2=\frac{13}{100}$$

۱۴- فرم کلی جواب مسئلهٔ موج زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t)-9\nabla^2 u(x,y,t)=\begin{cases} te^{-|x+y|} & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases} \quad \boxed{y\in\mathbb{R}},\ t>0 \\ u(x,y,0)=\begin{cases} x+y & 0<x<1,\ -2<y<2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \\ u_t(x,y,0)=0,\ x>0, y\in\mathbb{R} \\ u(0,y,t)=0,\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

موج دو بعدی ناهمگن

$0<x<1$

برای متغیر مکانی x از تبدیل سینوسی (استفاده می‌کنیم)

برای متغیر مکانی y از تبدیل فوریه دوطرفه استفاده می‌کنیم.

۱) $u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 (A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۲) $u(x,y,t)=\int_{-2}^{2}\int_0^1 (A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۳) $u(x,y,t)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۴) $u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} (A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

برای ترتیب جواب کلی معادله فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(A_\xi\cos 3\xi t+B_\xi\sin 3\xi t+C_\xi t+D_\xi\right)e^{i\lambda y}\sin\omega x\,d\omega\,d\lambda$$

تبدیل فوریه دوطرفه

تبدیل فوریه سینوسی

$$\xi=\sqrt{\omega^2+\lambda^2}$$

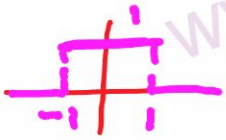
۱۵- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $y''-4y'+3y=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ با شرط $\lim_{x\to\infty} y(x)=\lim_{x\to\infty} y'(x)=0$ باشد، تبدیل فوریهٔ $y(x)$ کدام است؟

(راهنمایی: $F\{y(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{-i\omega x}dx$)

بسیار ساده

تبدیل فوریه

$$\left[(i\omega)^2-4(i\omega)+3\right]Y(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$$



۱) $\dfrac{\sin 2\omega}{\omega^2+4i\omega-3}$

۲) $\dfrac{\sin\omega}{\omega^2+4i\omega-3}$

۳) $\dfrac{-2\sin\omega}{\omega(\omega^2+4i\omega-3)}$

۴) $\dfrac{2\sin\omega}{\omega(\omega^2+4i\omega-3)}$

$$Y(\omega)=\frac{-2\sin\omega}{\omega\left[+\omega^2+4i\omega-3\right]}$$