۲۶- پوسته‌ای کروی به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع a دارای توزیع بار سطحی با چگالی $\sigma(\theta,\varphi)=\sigma_0 \sin\theta\cos\varphi$ $(\frac{C}{m^2})$ است که σ_0 مقداری ثابت است و θ و φ متغیرهای مختصات کروی هستند.
پتانسیل الکتریکی ناشی از این توزیع بار در نقاط بسیار دور از کره، با کدام گزینه بیان می‌شود؟

$$\vec{P}=\iint \vec{r}\sigma\, ds=\iint a\hat{r}(\sigma_0 \sin\theta\cos\varphi)(a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi)$$

$$\hat{r}=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x}+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{y}+\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{P}=\frac{4}{3}\pi\sigma_0 a^3\hat{x}$$

$$V\Big|_{r\gg a}=\frac{\vec{P}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\hat{x}\cdot\hat{r}}{r^2}=\frac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r^2}$$

۱) $\frac{\sigma_0 a^4}{3\varepsilon_0}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r^3}$

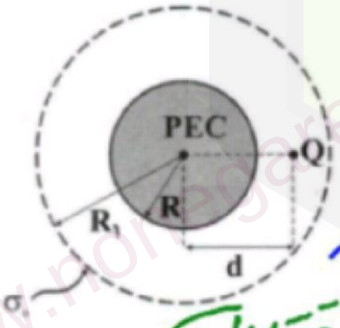
۲) $\frac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r^2}$ ✓

۳) $\frac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r^2}$

۴) $\frac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r}$

حل ارائه شده در روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵

۲۷- بار نقطه‌ای Q مطابق شکل زیر به فاصلهٔ d از مرکز یک کرهٔ رسانای بدون بار و مجزا به شعاع R در فضای آزاد مفروض است. بار کروی پوسته‌ای به چگالی سطحی ثابت σ_0 (کولمب بر مترمربع) به صورت هم‌مرکز با کرهٔ رسانا و به شعاع R_1، $(R_1>d>R)$ حول این مجموعه قرار داده می‌شود. اختلاف کار لازم برای تشکیل این پوستهٔ بار نسبت به کار لازم برای ساختن آن در فضای خالی، کدام است؟



۱) ۰ ✓

۲) $\frac{\sigma_0 Q R_1^2}{\varepsilon_0 d}$

۳) $\frac{\sigma_0 Q R_1^2}{\varepsilon_0(d-\frac{R^2}{d})}$

۴) $-\frac{\sigma_0 Q R_1^2}{2\varepsilon_0 d}$

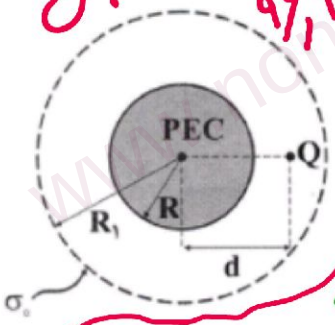
با کوچ به انتهای کره رسانا بدون بار اولیه فرض شده است و توزیع بار الکتریکی روی پوسته کروی به صورت یکنواخت و متقارن نسبت به کره رسانای مرکزی می‌باشد، بنابراین وجود یا عدم وجود پوسته بار کروی تغییری در انرژی سیستم نشان داده شده در صورت مسأله ایجاد نخواهد کرد.

تحلیل اولیه روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵

توضیح: متأسفانه گزینه‌های مطرح شده در تناقض با راه حل کلاسیک این مسأله بوده و تنها گزینه ۱ با شرط $R_1\to\infty$ در نگاه سطحی منطقی به نظر می‌رسید.

استدلال ارائه شده بعد از اعلام کلید توسط سازمان سنجش ۹۶/۱۲/۹

بار نقطه‌ای Q مطابق شکل زیر به فاصلهٔ d از مرکز یک کرهٔ رسانای بدون بار و مجزا به شعاع R در فضای آزاد مفروض است. بار کروی پوسته‌ای به چگالی سطحی ثابت $\sigma_\circ$ (کولمب بر مترمربع) به صورت هم‌مرکز با کرهٔ رسانا و به شعاع R_1، $(R_1 > d > R)$ حول این مجموعه قرار داده می‌شود. اختلاف کار لازم برای تشکیل این پوستهٔ بار نسبت به کار لازم برای ساختن آن در فضای خالی، کدام است؟



۱) ۰

۲) $\frac{\sigma_\circ Q R_1^2}{\varepsilon_\circ d}$

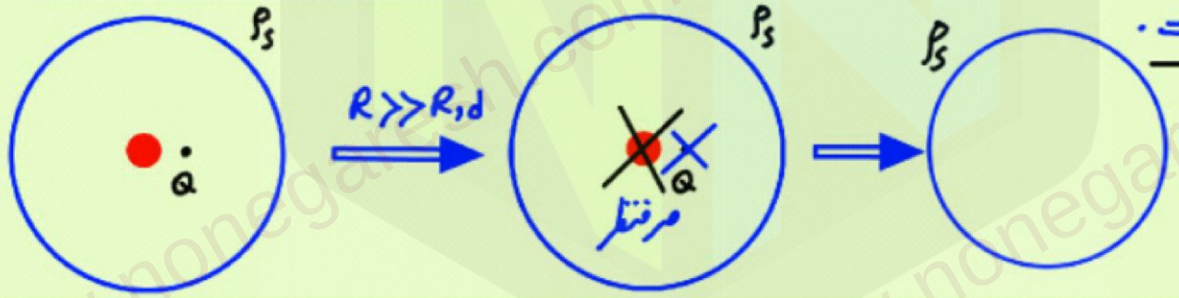
۳) $\frac{\sigma_\circ Q R_1^2}{\varepsilon_\circ (d - \frac{R^2}{d})}$

۴) $-\frac{\sigma_\circ Q R_1^2}{2\varepsilon_\circ d}$

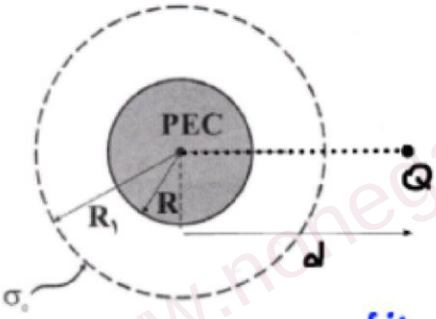
$R_1 \gg R, d \rightsquigarrow \Delta W \simeq 0$

توضیح: هرچند در این تحلیل نیز سعی بر آن بوده که نادرست بودن گزینه‌ی ۱ اثبات گردد، با این وجود به یک نکته فیزیکی مهم دقت نشده است و آن اینکه بار کل پوسته ثابت نبوده بلکه چگالی بار (σ) ثابت است. بنابراین وقتی $R_1 \to \infty$، هرچند پتانسیل الکتریکی با نسبت $\frac{1}{R_1}$ به صفر میل می‌کند، بار کل پوسته طبق رابطه $Q = 4\pi R_1^2 \sigma$ با نسبت R_1^2 به بینهایت میل می‌کند و لذا انرژی نهایی سیستم متناسب با R_1^2 خواهد شد که با جمع در تناقض با گزینه اعلام شده توسط سازمان سنجش می‌باشد.

فرض کنید شعاع پوسته باردار با چگالی به را خیلی خیلی بزرگتر از R , d در نظر بگیریم. در این حالت تأثیر میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای Q و کره رسانای داخلی بر روی نقاط مختلف پوسته باردار به شعاع R_1 ناچیز خواهد بود و قابل صرفنظر کردن است. بنابراین با فرض $R_1 \gg R, d$ اختلاف کار لازم برای تشکیل این پوسته باردار نسبت به کار لازم برای ساختن آن در فضای خالی تقریباً صفر خواهد بود که با کلید ارائه شده توسط سازمان سنجش در تناقض است.



به نظر می‌رسد در صورت مسأله بار Q باید در خارج پوسته کروی در نظر گرفته شود. و شرایط مسأله به صورت زیر اصلاح گردد: $(d > R_1 > R)$



در چنین حالتی کل بار الکتریکی پوسته باردار برابر $q = \sigma 4\pi R_1^2$ خواهد بود و تغییر پتانسیل الکتریکی ناشی از حضور پوسته باردار در محل بار نقطه‌ای Q برابر $\Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ d} = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_\circ d}$ خواهد شد و لذا:

$$\Delta W = Q\,\Delta V = \frac{\sigma Q R_1^2}{\varepsilon_\circ d}$$

سؤال) دو بار الکتریکی q_1 و q_2 را مطابق شکل الف در فاصله معینی از یکدیگر قرار می‌دهیم. چنانچه بخواهیم مطابق شکل ب بار q_3 را نیز به مجموعه قبلی اضافه کنیم، اختلاف کار لازم در دو حالت الف و ب چه مقدار خواهد بود؟

جواب) بدیهی است که کار لازم برابر تفاضل انرژی در حالتهای الف و ب خواهد بود:

$$W_{\text{الف}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

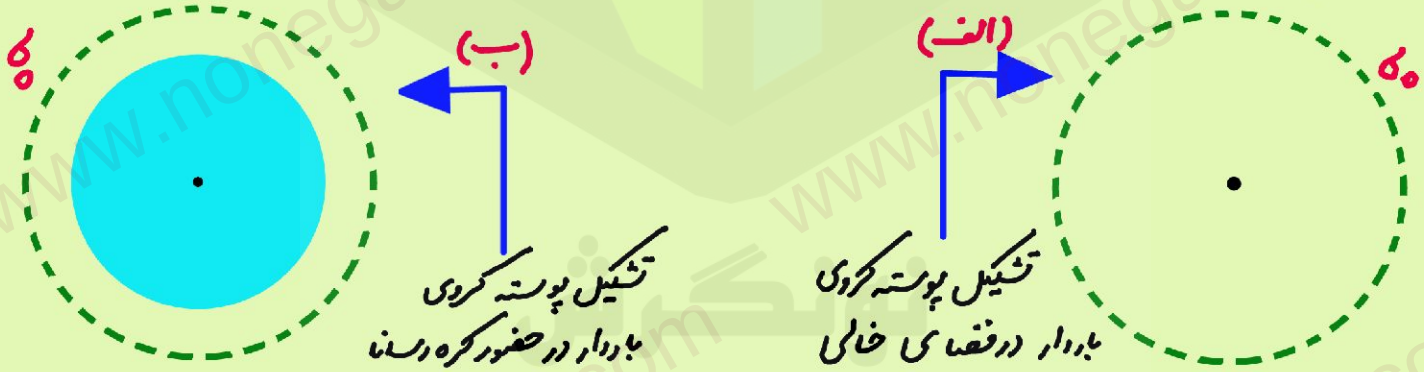
$$W_{\text{ب}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

$$\Delta W = q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right)$$

در روابط فوق از انرژی ساخت بارهای الکتریکی منفرد صرفنظر شده است. به این ترتیب عبارت داخل پرانتز در رابطه $\Delta W = q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta W = \boxed{\text{انرژی ساخت بار نقطه‌ای } q_3 \text{ در فضای خالی}} + \boxed{\text{انرژی متقابل بین بار } q_3 \text{ و بارهای نقطه‌ای } q_1 \text{ و } q_2} = 0 + q_3(V_{13} + V_{23})$$

سؤال) کره رسانایی به شعاع R بدون بار اولیه مفروض است. بار کروی پوسته‌ای به چگالی سطحی ثابت σ_0 به صورت هم مرکز با کره رسانا و به شعاع R_1 حول کره رسانا قرار داده می‌شود. اختلاف کار لازم برای تشکیل این پوسته بار نسبت به کار لازم برای ساختن آن، در فضای خالی کدام است.

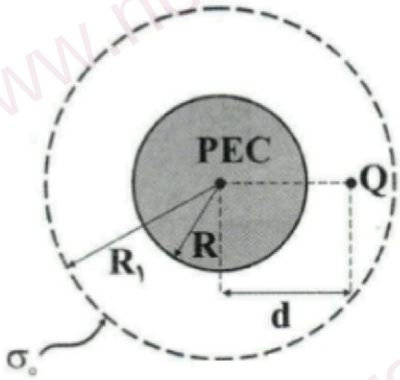


پاسخ: انرژی الکتریکی در وضعیت (ب) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$W_{\text{ب}} = \boxed{\text{انرژی الکتریکی متقابل بین پوسته باردار و کره رسانا}} + \boxed{\text{انرژی الکتریکی لازم برای ساخت پوسته باردار در فضای خالی}}$$

با توجه به تقارن کروی توزیع بار الکتریکی بر روی سطح پوسته کروی باردار، اثر القایی آن بر روی کره رسانای داخلی نیز متقارن بوده و با توجه به اینکه کره رسانا ایزوله و بدون بار اولیه فرض شده است، مجموع بارهای القا شده بر روی کره رسانای داخلی صفر گردیده و طبق قانون گاوس شدت میدان الکتریکی در فضای بین کره رسانا و پوسته کروی باردار نیز صفر خواهد بود. بنابراین انرژی الکتریکی متقابل بین پوسته باردار و کره رسانا صفر خواهد بود. بنابراین: $\boxed{\Delta W = 0}$

بار نقطه‌ای Q مطابق شکل زیر به فاصلهٔ d از مرکز یک کرهٔ رسانای بدون بار و مجزا به شعاع R در فضای آزاد مفروض است. بار کروی پوسته‌ای به چگالی سطحی ثابت σ_0 (کولمب بر مترمربع) به صورت هم‌مرکز با کرهٔ رسانا و به شعاع R_1، $(R_1 > d > R)$ حول این مجموعه قرار داده می‌شود. اختلاف کار لازم برای تشکیل این پوستهٔ بار نسبت به کار لازم برای ساختن آن در فضای خالی، کدام است؟



۱) ۰

۲) $\frac{\sigma_0 Q R_1^2}{\varepsilon_0 d}$

۳) $\frac{\sigma_0 Q R_1^2}{\varepsilon_0 (d - \frac{R^2}{d})}$

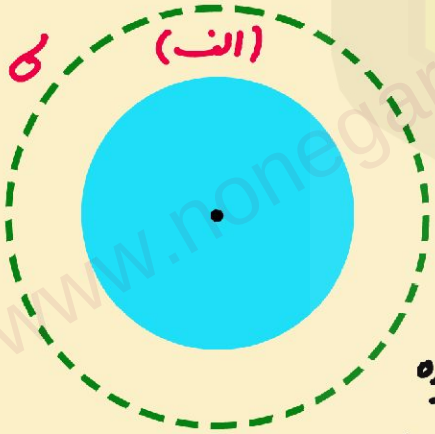
۴) $-\frac{\sigma_0 Q R_1^2}{2\varepsilon_0 d}$

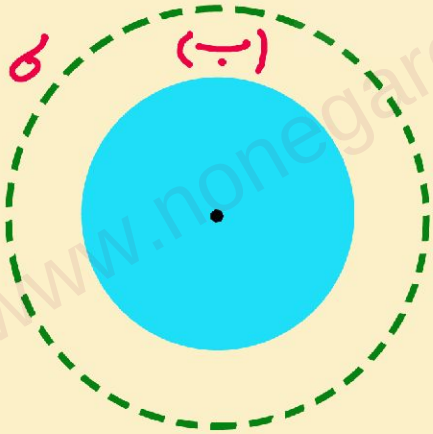
سوال ۲۷ آزمون دکتری ۹۷

به نظر می‌رسد، طرح سؤال به این فرم، نادرست باشد.

با توجه به کلید اولیه ارائه شده توسط سازمان سنجش، به نظر می‌رسد فرم طرح سؤال اشکال داشته و احتمالاً بار نقطه‌ای Q در خارج پوسته قرار داشته و شرایط مسأله به صورت $d > R_1 \gg R$ باشد.

با توجه به توضیحات صفحه قبل انرژی ساخت پوسته کروی باردار با انرژی ساختار نشان داده شده در شکل (الف) یکسان خواهد بود. چنانچه مطابق شکل (ب) بار نقطه‌ای Q را به مجموعه قبلی (یعنی شکل الف) اضافه نماییم، با فرض $d > R_1 \gg R$ از اثر متقابل بین بارهای القا شده بر روی سطح کره رسانا و بار نقطه‌ای Q صرف‌نظر کرده و فقط اثر متقابل بین پوسته کروی باردار و بار نقطه‌ای Q را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه پتانسیل الکتریکی ناشی از پوسته کروی باردار در محل بار نقطه‌ای Q برابر





$\frac{\sigma_0 4\pi R_1^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$ می‌باشد، بنابراین:

$$\Delta W = Q\left(\frac{\sigma_0 4\pi R_1^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\right) = \frac{\sigma_0 Q R_1^2}{\varepsilon_0 d}$$

۲۸- خازن استوانه‌ای هم‌محور بسیار طویل به شعاع رسانای داخلی a و شعاع رسانای بیرونی c، در فضای آزاد مفروض است. ناحیهٔ $a < r < b < c$ از یک توزیع ثابت دوقطبی‌ها با بردار قطبش الکتریکی $\vec{P} = k\vec{r}$ پر شده است. محور ساختار منطبق بر محور z و $\vec{r}$ بردار مکان در دستگاه استوانه‌ای است. اگر رساناهای داخلی و بیرونی اتصال کوتاه شوند، چگالی بار آزاد در واحد طول رسانای داخلی چقدر است؟

تحلیل ارائه شده در روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵

۱) $\dfrac{k\pi(b^2 - a^2)}{\ln(\frac{c}{a})}$

۲) $\dfrac{k\pi a^2(b^2 - a^2)}{c^2 - b^2}$

۳) $\dfrac{ka^2\ln(\frac{b}{a})}{\ln(\frac{c}{a})}$

۴) ۰ ✓

با توجه به اینکه چشمه برای آزاد نداریم و همچنین رسانای داخلی و بیرونی اتصال کوتاه شده اند، هیچگونه بار آزادی تشکیل نخواهد شد و فقط بارهای مقید ناشی از پدیده قطبی شدگی خواهیم داشت.

توضیح: در این سؤال رفتار بارهای الکتریکی القا شده بر روی صفحات رساناهای داخلی و خارجی شباهت بسیار زیادی به رفتار بارهای الکتریکی ایجاد شده در محیط‌های دی الکتریک در اثر پدیده قطبی شدگی دارد، به طوری که بارهای مثبت و منفی از یکدیگر فاصله گرفته و بارهای مثبت بر روی رسانای داخلی و بارهای منفی بر روی رسانای خارجی قرار می‌گیرند و لذا از لحاظ مفهومی با مفهوم بار آزاد تناسبی ندارند.

هر چند از لحاظ کاربردی و قضیه دیورژانس ($\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$) اشکالی بر این مسأله وارد نیست.

۲۸- خازن استوانه‌ای هم‌محور بسیار طویل به شعاع رسانای داخلی a و شعاع رسانای بیرونی c، در فضای آزاد مفروض است. ناحیهٔ $a<r<b<c$ از یک توزیع ثابت دوقطبی‌ها با بردار قطبش الکتریکی $\vec{P}=k\vec{r}$ پر شده است. محور ساختار منطبق بر محور z و $\vec{r}$ بردار مکان در دستگاه استوانه‌ای است. اگر رساناهای داخلی و بیرونی اتصال کوتاه شوند، چگالی بار آزاد در واحد طول رسانای داخلی چقدر است؟

۱) $\dfrac{k\pi(b^2-a^2)}{\ln(\frac{c}{a})}$ ۲) $\dfrac{k\pi a^2(b^2-a^2)}{c^2-b^2}$ ۳) $\dfrac{ka^2\ln(\frac{b}{a})}{\ln(\frac{c}{a})}$ ۴) ۰

استدلال ارائه شده پس از اعلام کلید اولیه سازمان سنجش ۹۶/۱۲/۹

با توجه به کلید ارائه شده توسط سازمان سنجش، به نظر می‌رسد منظور طراح محترم، محاسبه چگالی بار القایی در واحد طول رسانای داخلی بوده است. از آنجا که هیچگونه چشمه بار آزادی وجود نداشته و اختلاف پتانسیل بین دو استوانه رسانا نیز صفر می‌باشد با خارج کردن دی الکتریک از فضای بین دو استوانه رسانا، چگالی بار الکتریکی استوانه‌های رسانا نیز صفر خواهد شد و بنابراین می‌توان استدلال کرد که بار تشکیل شده بر روی استوانه داخلی و خارجی از نوع القایی است. بنابراین استفاده از مباحث چگالی بار آزاد، مناسب این سؤال نمی‌باشد.

با فرض اینکه هدف طراح محاسبه چگالی بار القایی در واحد طول رسانای داخلی بوده، می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{P}=k\vec{r}=kr\hat{a}_r \longrightarrow \rho_{sb}=\vec{P}\cdot\hat{n}=\begin{cases}\vec{P}\cdot(-\hat{a}_r)\Big|_{r=a}=-ka\\ \vec{P}\cdot(\hat{a}_r)\Big|_{r=b}=kb\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}r=a \text{ چگالی بار مقید در واحد طول سطح } = -k2\pi a^2\\ r=b \text{ چگالی بار مقید در واحد طول سطح } = k2\pi b^2\end{cases}$$

$$\rho_b=-\nabla\cdot\vec{P}=-2k$$

حال فرض کنیم چگالی بار القایی در واحد طول رسانای داخلی برابر λ باشد، با استفاده از قانون گاوس خواهیم داشت:

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\lambda-2\pi ka^2-2k\pi(r^2-a^2)}{2\pi\varepsilon r}\hat{a}_r & a<r<b\\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\hat{a}_r & b<r<c\end{cases}$$

توضیح: این سؤال با مفهوم بار آزاد از لحاظ کاربردی و قانون گاوس ($\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$) هیچگونه اشکالی ندارد. اما بر اساس ابهام معنایی بار آزاد، بهتر بود طراح محترم از اصطلاح بار القایی استفاده می‌کردند و یا حداقل مقدار صفر را از گزینه‌ها حذف می‌نمودند.
البته شاید هم طراح محترم دقیقاً مفهوم کاربردی بار آزاد مدنظرشان بوده!!

$$V_b-V_a=-\int_a^b\frac{\lambda-2\pi ka^2-2k\pi(r^2-a^2)}{2\pi\varepsilon r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{k}{2\varepsilon}(b^2-a^2) \quad (1)$$

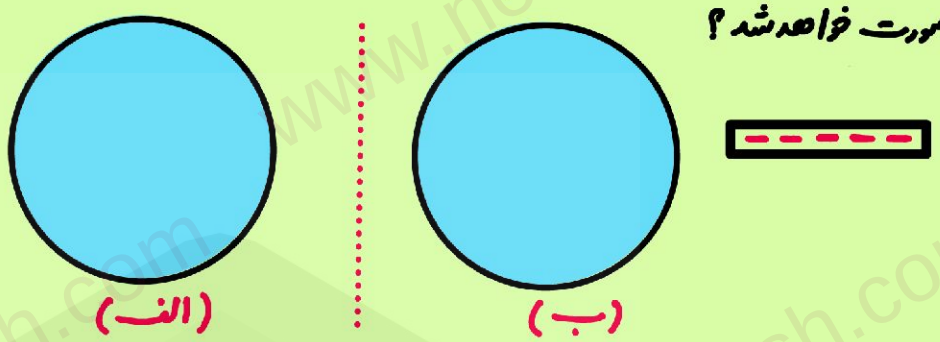
$$V_c-V_b=-\int_b^c\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{c}\right) \quad (2)$$

با توجه به اینکه رسانای داخلی و خارجی اتصال کوتاه شده‌اند، می‌توان چنین نوشت: $V_a=V_b$

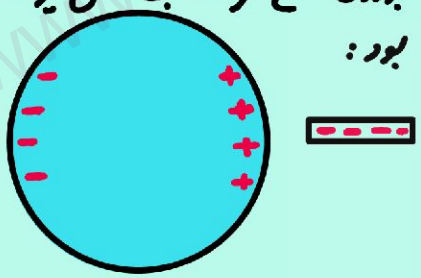
با جمع کردن طرفین رابطه‌های (1) و (2) خواهیم داشت:

$$0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{c}\right)+\frac{k}{2\varepsilon}(b^2-a^2)\longrightarrow\lambda=\frac{k\pi(b^2-a^2)}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)}$$

سؤال) کره رسانایی به شعاع a و بدون بار اولیه مطابق شکل الف مفروض است. چنانچه یک میله باردار را مطابق شکل ب به این کره نزدیک کنیم، بار القا شده بر روی کره رسانا به چه صورت خواهد شد؟

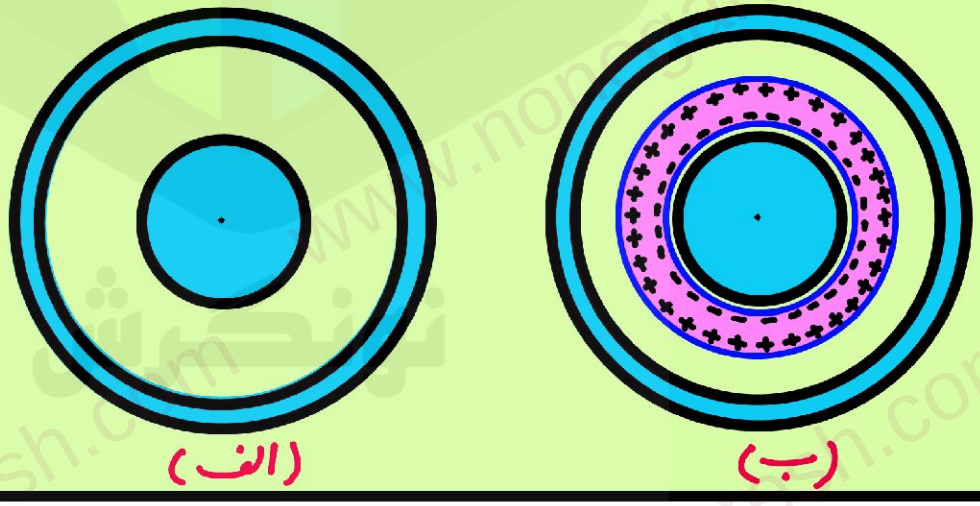


جواب: با توجه به اینکه کره رسانا ایزوله بوده و به زمین متصل نمی باشد آرایش بارهای الکتریکی القا شده بر روی سطح کره مطابق شکل زیر خواهد بود:

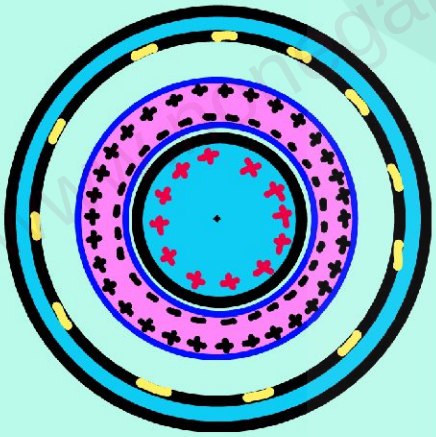


سؤال) خازن استوانه ای هم محور بسیار طویل به شعاع رسانای داخلی a و شعاع رسانای بیرونی b، بدون بار اولیه مطابق شکل الف در فضای آزاد مفروض است. چنانچه یک پیستون دی الکتریک قطبی شده را مطابق شکل ب وارد ناحیه $a<r<b$ نماییم، بار القا شده بر روی استوانه های داخلی و خارجی رسانا به چه صورت خواهد شد.

(فرض کنید که استوانه های رسانای داخلی و خارجی به زمین متصل نشده اند و در عوض اتصال کوتاه شده اند.)



جواب: با توجه به اثر القایی دی الکتریک، انتظار داریم که بر روی استوانه ی داخلی بار مثبت القا گردد و از آنجا که خازن بدون بار اولیه می باشد، همین میزان بار منفی از طریق مسیر اتصال کوتاه بر روی سطح داخلی رسانای خارجی ایجاد گردد.



خازن استوانه‌ای هم‌محور بسیار طویل به شعاع رسانای داخلی a و شعاع رسانای بیرونی c، در فضای آزاد مفروض است. ناحیهٔ $a<r<b<c$ از یک توزیع ثابت دوقطبی‌ها با بردار قطبش الکتریکی $\vec{P}=k\vec{r}$ پر شده است. محور ساختار منطبق بر محور z و $\vec{r}$ بردار مکان در دستگاه استوانه‌ای است. اگر رساناهای داخلی و بیرونی اتصال کوتاه شوند، چگالی بار آزاد در واحد طول رسانای داخلی چقدر است؟

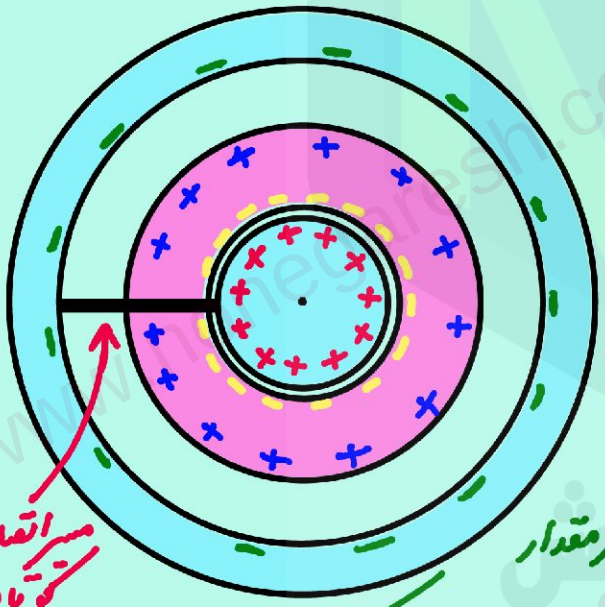
سؤال ۲۸ آزمون دکتری ۹۷

با توجه به ابهامی که بار آزاد از لحاظ معنای لفظی و کاربردی ($\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$) دارد، بهتر بود از واژه بار القایی استفاده می‌گردید.

با توجه به اینکه در اکثر سؤالات تستی بردار قطبی شدگی به صورت $\vec{P}=k\hat{a}_r$ داده شده است، ممکن است در اثر شرطی شدن ذهن، در این سؤال نیز سهواً بردار قطبی شدگی را به صورت $\vec{P}=k\hat{a}_r$ در نظر بگیریم و به جواب نادرست برسیم. با توجه به اینکه در صورت مسأله تأکید شده است که منظور از $\vec{r}$ **بردار مکان** در دستگاه استوانه‌ای است، بنابراین لازم است که بردار قطبی شدگی را به فرم $\boxed{\vec{P}=kr\hat{a}_r}$ در نظر بگیریم.

به این ترتیب نحوه توزیع بارهای الکتریکی مقید در ناحیه $a<r<b$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_b=-\nabla\cdot\vec{P}=-\nabla\cdot(kr\hat{a}_r)=-2 \quad , \quad \rho_{sb}=\begin{cases}\vec{P}\cdot\hat{n}\big|_{r=a}=-ka\\ \vec{P}\cdot\hat{n}\big|_{r=b}=+kb\end{cases}$$



با توجه به توضیحات صفحه قبل انتظار داریم که مقداری بار الکتریکی مثبت بر روی استوانه رسانای داخلی القا گردد و از آنجا که دو صفحه رسانای خازن اتصال کوتاه شده اند، همین میزان بار منفی بر روی سطح داخلی استوانه بیرونی القا گردد.

در صورت مسأله به زمین شدن صفحات خازن اشاره نشده است و بنابراین هر مقدار باری که بر روی صفحه رسانای داخلی القا گردد، لازم است که بار مخالف آن بر روی سطح داخلی صفحه خارجی رسانا القا گردد. (از طریق مسیر اتصال کوتاه)

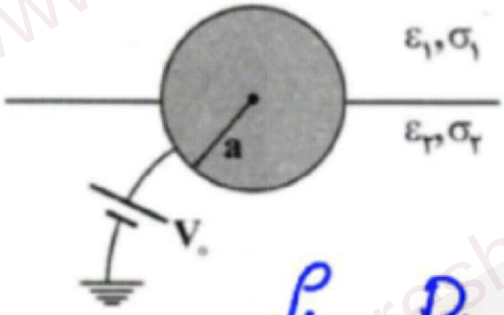
چنانچه فرض کنیم، چگالی بار القا شده در واحد طول رسانای داخلی برابر λ باشد، شدت میدان الکتریکی در نواحی مختلف به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r-\dfrac{kr}{\varepsilon_0}\hat{a}_r & a<r<b\\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r & b<r<c\end{cases}$$

با توجه به اینکه رسانا‌های داخلی و خارجی اتصال کوتاه شده اند، می‌توان چنین نوشت: ($V_a=V_c$)

$$V_b-V_a=V_b-V_c \rightsquigarrow \int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_b^c\vec{E}\cdot d\vec{l} \rightsquigarrow \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{c}{a}=\frac{k}{2\varepsilon_0}(b^2-a^2)\rightarrow\lambda=\frac{k\pi(b^2-a^2)}{\ln(\frac{c}{a})}$$

۲۹- الکترود رسانای کاملی به شکل کره با شعاع a به صورت متقارن، بین دو نیم فضا با رسانایی ویژه و گذردهی الکتریکی σ_1 و ε_1 و σ_2 و ε_2 قرار گرفته است. این الکترود به پتانسیل V_0 نسبت به بی‌نهایت وصل می‌شود. اگر چگالی بار آزاد سطحی روی کره در نیمهٔ واقع در محیط ۱ را با ρ_{s_1} و چگالی بار آزاد سطحی در نیمهٔ واقع در محیط ۲ را با ρ_{s_2} نشان دهیم، نسبت $\frac{\rho_{s_1}}{\rho_{s_2}}$ کدام است؟



۱) $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ ✓

۲) $\frac{\varepsilon_1\sigma_2}{\varepsilon_2\sigma_1}$

۳) $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

۴) $\frac{\varepsilon_1\sigma_1}{\varepsilon_2\sigma_2}$

محیط‌های موازی

$E_1 = E_2$

$$\frac{\rho_{s_1}}{\rho_{s_2}} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{\varepsilon_1 E_1}{\varepsilon_2 E_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

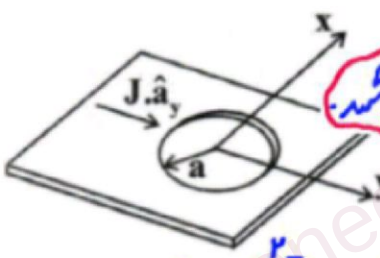
حل ارائه شده در روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵

۳۰- در شکل زیر، بر روی صفحه‌ای نامحدود، به ضخامت ناچیز و رسانایی ویژهٔ σ، جریانی با چگالی $J = J_0\,\hat{a}_y\,(\frac{A}{m^2})$ عبور می‌کند. درصورتی‌که حفره‌ای به قطر $2a$ در این صفحه ایجاد شود، در مختصات استوانه‌ای (ρ, φ, z) توزیع پتانسیل روی صفحه، کدام است؟ مرکز حفره منطبق بر مبدأ مختصات و صفحهٔ رسانا در صفحهٔ xy است.

حل ارائه شده در روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵

$$\vec{E} = \frac{J_0}{\sigma}\hat{a}_y \rightarrow \nabla V\Big|_{\rho\to\infty} = -\frac{J_0}{\sigma}\hat{a}_y \rightarrow V\Big|_{\rho\to\infty} = -\frac{J_0}{\sigma}y = -\frac{J_0}{\sigma}\rho\sin\varphi$$

لاپلاس ویژه



با توجه به تقارن مسأله در دستگاه قطبی انتظار داریم

در پتانسیل نهایی به صورت $V = (k_1\rho + \frac{k_2}{\rho})\sin\varphi$ باشد.

با اعمال شرایط مرزی $\lim_{\rho\to\infty} V = -\frac{J_0}{\sigma}\rho\sin\varphi$

$V\Big|_{\rho=a} = 0$ و خواهیم داشت: $k_1 = -\frac{J_0}{\sigma}$ ، $k_2 = \frac{a^2 J_0}{\sigma}$

۱) $\frac{J_0}{\sigma}(a - \frac{\rho^2}{a})\sin\varphi$

۲) $-\frac{J_0}{\sigma}(\rho - \frac{a^2}{\rho})\sin\varphi$ ✓

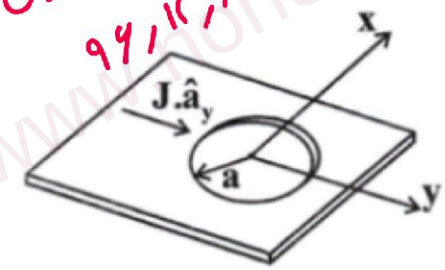
۳) $-\frac{J_0}{\sigma}(\rho + \frac{a^2}{\rho})\sin\varphi$

۴) $-\frac{J_0}{\sigma}(a + \frac{\rho^2}{a})\sin\varphi$

توضیح: در این روش سعوا به جایی اینکه مؤلفه عمودی جگالی جریان در مرز $\rho = a$ برابر صفر در نظر گرفته شود، پتانسیل الکتریکی در مرز $\rho = a$ صفر فرض گردیده.

در شکل زیر، بر روی صفحه‌ای نامحدود، به ضخامت ناچیز و رسانایی ویژهٔ σ، جریانی با چگالی $\mathbf{J}=\mathbf{J}_0\,\hat{a}_y\,(\frac{A}{m^2})$ عبور می‌کند. درصورتی‌که حفره‌ای به قطر $2a$ در این صفحه ایجاد شود، در مختصات استوانه‌ای (ρ,φ,z) توزیع پتانسیل روی صفحه، کدام است؟ مرکز حفره منطبق بر مبدأ مختصات و صفحهٔ رسانا در صفحهٔ xy است.

تحلیل بعد از اعلام کلید اولیه آزمون ۹۶/۱۲/۹



۱) $\frac{J_0}{\sigma}(a-\frac{\rho^2}{a})\sin\varphi$

۲) $-\frac{J_0}{\sigma}(\rho-\frac{a^2}{\rho})\sin\varphi$

۳) $-\frac{J_0}{\sigma}(\rho+\frac{a^2}{\rho})\sin\varphi$

۴) $-\frac{J_0}{\sigma}(a+\frac{\rho^2}{a})\sin\varphi$

با توجه به فرم تابع چگالی جریان ($\vec{J}=J_0\,\hat{a}_y$) و رابطه $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ انتظار داریم که شدت میدان الکتریکی در فواصل دور به صورت $\vec{E}\Big|_{r\to\infty}=\frac{\vec{J}}{\sigma}=\frac{J_0}{\sigma}\hat{a}_y$ باشد. از طرفی با توجه به رابطه $\vec{E}=-\nabla V$، تپانسیل الکتریکی در فواصل دور به فرم $V=-\frac{J_0}{\sigma}y=-\frac{J_0}{\sigma}\rho\sin\varphi$ خواهد بود و همین نکته کلید حل مسأله است.

شرایط برقرار بودن معادله لاپلاس ($\nabla^2 V=0$) و وجود پارامتر متغیر $\sin\varphi$ ایجاب می‌کند که فرم نهایی تپانسیل الکتریکی در داخل و خارج حفره دایره‌ای شکل را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} V_{in}=k_1\rho\sin\varphi \\ V_{out}=(k_2\rho+\frac{k_4}{\rho})\sin\varphi \end{cases}$$

بنابراین با توجه به رابطه $\vec{E}=-\nabla V$ خواهیم داشت:

$$\vec{E}_{in}=-\nabla V_{in}=-\left\{\frac{\partial V_{in}}{\partial\rho}\hat{a}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_{in}}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi\right\}=-k_1\sin\varphi\,\hat{a}_\rho-k_1\cos\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

$$\vec{E}_{out}=-\nabla V_{out}=-\left\{\frac{\partial V_{out}}{\partial\rho}\hat{a}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_{out}}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi\right\}=-(k_2-\frac{k_4}{\rho^2})\sin\varphi\,\hat{a}_\rho-(k_2+\frac{k_4}{\rho^2})\cos\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

با توجه به اینکه در محیط داخل حفره دایره رسانایی برابر صفر است ($\sigma=0$) بنابراین مؤلفه عمودی چگالی جریان الکتریکی در این محیط برابر صفر خواهد شد و لذا طبق شرط مرزی $J_{1n}=J_{2n}$ لازم است که مؤلفه عمودی چگالی جریان الکتریکی در محیط خارج حفره نیز صفر باشد. بنابراین:

$$(k_2-\frac{k_4}{\rho^2})\Big|_{\rho=a}=0\longrightarrow k_4=a^2k_2$$

در حل اولیه این سؤال، سهوا تپانسیل الکتریکی در مرز $r=a$ برابر صفر در نظر گرفته شده بود، در صورتی که مؤلفه عمودی $\vec{J}$ صفر است.

از طرفی با توجه به شرایط مرزی

$$\boxed{V_{out}\Big|_{r\to\infty}=-\frac{J_0}{\sigma}\rho\sin\varphi}\qquad\boxed{V_{out}\Big|_{r=a}=V_{in}\Big|_{r=a}}$$

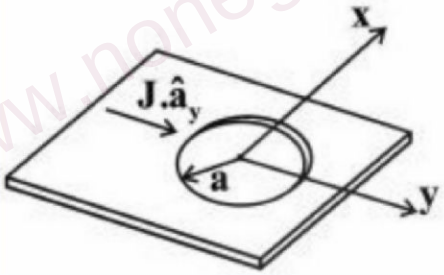
خواهیم داشت: $k_2=-\frac{J_0}{\sigma}$, $k_4=-\frac{J_0a^2}{\sigma}$

بنابراین:

$$V_{out}=-\frac{J_0}{\sigma}(\rho+\frac{a^2}{\rho})\sin\varphi$$

در شکل زیر، بر روی صفحه‌ای نامحدود، به ضخامت ناچیز و رسانایی ویژهٔ σ، جریانی با چگالی $J = J_0\,\hat{a}_y\,(\frac{A}{m^2})$ عبور می‌کند. درصورتی‌که حفره‌ای به قطر $2a$ در این صفحه ایجاد شود، در مختصات استوانه‌ای (ρ, φ, z) توزیع پتانسیل روی صفحه، کدام است؟ مرکز حفره منطبق بر مبدأ مختصات و صفحهٔ رسانا در صفحهٔ xy است.

سوال ۳۰ آزمون دکتری ۹۷



۱) $\frac{J_0}{\sigma}(a - \frac{\rho^2}{a})\sin\varphi$

۲) $-\frac{J_0}{\sigma}(\rho - \frac{a^2}{\rho})\sin\varphi$

۳) $-\frac{J_0}{\sigma}(\rho + \frac{a^2}{\rho})\sin\varphi$

۴) $-\frac{J_0}{\sigma}(a + \frac{\rho^2}{a})\sin\varphi$

با توجه به فرم تابع چگالی جریان ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$) انتظار داریم که شدت میدان الکتریکی در فواصل دور به صورت $\vec{E}\Big|_{\rho\to\infty} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{J_0}{\sigma}\hat{a}_y$ باشد. از طرفی با توجه به رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ پتانسیل الکتریکی در فواصل دور به فرم $V = -\frac{J_0}{\sigma}y = \frac{J_0}{\sigma}\rho\sin\varphi$ خواهد بود. شرایط برقراری معادله لاپلاس ($\nabla^2 V = 0$) و وجود پایه متقارن مثلثاتی $\sin\varphi$ ایجاب می‌کند که فرم نهایی پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج حفره دایره‌ای شکل به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} V_{in} = k_1 \rho \sin\varphi \\ V_{out} = (k_3 \rho + \frac{k_4}{\rho})\sin\varphi \end{cases}$$

چنانچه سمعوا فقط از شرط مرزی در $\rho \to \infty$ استفاده کنیم و بخواهیم به روش رد گزینه از روی گزینه‌های داده شده در رابطه $\vec{E}\Big|_{\rho\to\infty} = -\nabla V\Big|_{\rho\to\infty} = \frac{J_0}{\sigma}\hat{a}_y$ استفاده کنیم، هر دو گزینه ۲ و ۳ این ویژگی را خواهند داشت.

با توجه به اینکه در محیط داخلی حفره دایره‌ای، رسانایی برابر صفر است ($\sigma = 0$) بنابراین مؤلفه عمودی چگالی جریان الکتریکی در این محیط برابر صفر خواهد شد و لذا طبق شرط مرزی $\vec{J}_{1n} = \vec{J}_{2n}$ لازم است که مؤلفه عمودی چگالی جریان الکتریکی در محیط خارج حفره نیز صفر باشد. بنابراین مؤلفه عمودی شدت میدان الکتریکی در این ناحیه برابر صفر بوده و لذا: $k_4 = a^2 k_3$

همچنین با اعمال شرایط مرزی $V_{out}\Big|_{\rho=a} = V_{in}\Big|_{\rho=a}$ و $V_{out}\Big|_{\rho\to\infty} = -\frac{J_0}{\sigma}\rho\sin\varphi$ خواهیم داشت:

$$k_3 = -\frac{J_0}{\sigma}, \quad k_4 = -\frac{J_0 a^2}{\sigma} \rightsquigarrow V_{out} = -\frac{J_0}{\sigma}(\rho + \frac{a^2}{\rho})\sin\varphi$$

۳۱- نیمی از فضا با یک مادهٔ رسانا با مشخصات $\sigma=\sigma_\circ \sin^2\theta(\frac{S}{m})$ و $\varepsilon=\varepsilon_\circ$، $(\circ<\theta<\frac{\pi}{2})$ در مختصات کروی) پر شده و نیم دیگر $(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$ فضای آزاد است. یک الکترود رسانای کامل کروی به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات بین این دو نیم فضا قرار گرفته است؛ به نحوی که دقیقاً نیمی از آن درون رسانا است. اگر بار آزاد Q به الکترود تزریق شود، چه مدت طول می‌کشد تا بار کل الکترود به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه کاهش یابد؟

$$R=\int_a^\infty \frac{dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sigma_\circ \sin^2\theta\,(r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi)}=\frac{3}{4\pi\sigma_\circ a}$$

۱) $\frac{3\varepsilon_\circ}{2\sigma_\circ}$

۲) $\frac{\varepsilon_\circ}{\sigma_\circ}$

۳) $3\frac{\varepsilon_\circ}{\sigma_\circ}$ ✓

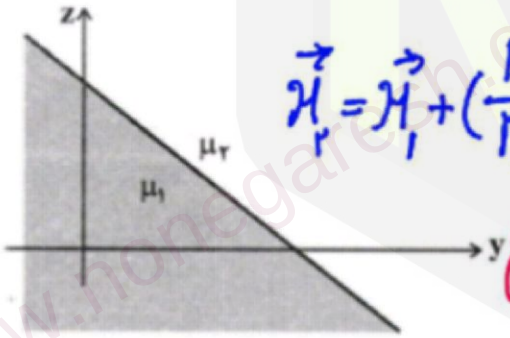
۴) $\frac{\varepsilon_\circ}{2\sigma_\circ}$

$$C=4\pi\varepsilon_\circ a \rightsquigarrow \tau=RC=\frac{3\varepsilon_\circ}{\sigma_\circ} \rightsquigarrow Q(t)=Q_\circ e^{-\frac{\sigma_\circ}{3\varepsilon_\circ}t}$$

$$\frac{\sigma_\circ}{3\varepsilon_\circ}t=1 \rightsquigarrow t=\frac{3\varepsilon_\circ}{\sigma_\circ}$$

حل ارائه شده در روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵

۳۲- صفحهٔ $y+z=1$ مرز دو ناحیه با تراوایی $\mu_1=4\mu_\circ$ و $\mu_2=6\mu_\circ$ است. اگر در ناحیهٔ ۱، $\vec{B}_1=2\hat{x}+\hat{y}$ باشد، میدان مغناطیسی در ناحیهٔ ۲ کدام است؟



$$\vec{H}_2=\vec{H}_1+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}-1\right)(\vec{H}_{1n})$$

$$\vec{H}_{1n}=(\vec{H}_1\cdot\hat{n})\hat{n}$$

$$\hat{n}=\frac{\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$$

۱) $3\hat{x}+\frac{1}{4}\hat{y}-\frac{5}{4}\hat{z}$

۲) $\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}$

۳) $3\hat{x}+\frac{3}{4}\hat{y}-\frac{3}{4}\hat{z}$

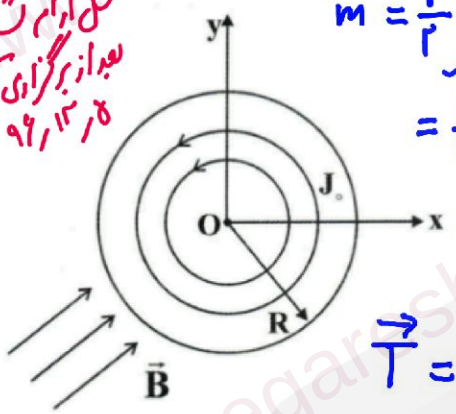
۴) $3\hat{x}+\frac{5}{4}\hat{y}-\frac{1}{4}\hat{z}$ ✓

$$\vec{H}_2=\frac{2}{4\mu_\circ}\hat{x}+\frac{1}{4\mu_\circ}\hat{y}+\left(\frac{4}{6}-1\right)\left[\left(\frac{2}{4\mu_\circ}\hat{x}+\frac{1}{4\mu_\circ}\hat{y}\right)\cdot\left(\frac{\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{2}}\right)\right]\frac{\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{H}_2=\frac{1}{2\mu_\circ}\hat{x}+\frac{1}{4\mu_\circ}\hat{y}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4\mu_\circ\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{2}}\right) \xrightarrow{\vec{B}_2=6\mu_\circ\vec{H}_2} \vec{B}_2=6\hat{x}+\frac{5}{4}\hat{y}-\frac{1}{4}\hat{z}$$

حل ارائه شده در روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵

۳۳- روی قرص $0 \le r \le R$ و $0 \le \phi \le 2\pi$ واقع در صفحهٔ xoy (مانند شکل زیر) جریان سطحی با چگالی یکنواخت $\vec{J}_s = J_0\,\hat{\varphi}\,(\frac{A}{m})$ جاری است؛ و در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_0\,(\hat{x}+\hat{y})$ قرار دارد. گشتاور نیروی وارد بر قرص چقدر است؟



$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times I\,d\vec{L}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho\,\hat{a}_\rho \times \left[J_0\,\hat{a}_\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi J_0 R^3\,\hat{a}_z$$

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = \frac{1}{3}\pi B_0 J_0 R^3 (\hat{y}-\hat{x})$$

۱) $\frac{1}{2}\pi B_0 J_0 R^2 (\hat{y}-\hat{x})$

۲) $\pi B_0 J_0 R (\hat{y}+\hat{x})$

۳) $\pi B_0 J_0 R^2 (\hat{y}+\hat{x})$

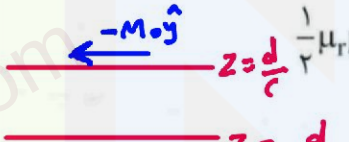
۴) $\frac{1}{3}\pi B_0 J_0 R^3 (\hat{y}-\hat{x})$ ✓

حل ارائه شده در روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵

۳۴- در فضای آزاد، ناحیهٔ $|z| < \frac{h}{2}$ در دستگاه دکارتی با قطبش مغناطیسی ثابت $\vec{M} = M_0\,(\hat{z}+\hat{x})$ پر شده است. در ناحیهٔ $h < z < h+d$ نیز یک مادهٔ مغناطیسی با تراوایی نسبی μ_r قرار گرفته است. چگالی شار مغناطیسی در $z=0$ و چگالی انرژی مغناطیسی ذخیره شده در $z = h + \frac{d}{2}$ کدام است؟

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \hat{n} = \begin{cases} \vec{M} \times \hat{z} = -M_0\,\hat{y} \\ \vec{M} \times (-\hat{z}) = M_0\,\hat{y} \end{cases}$$



۱) $\mu_0 M_0 \hat{x}$ و $\frac{1}{2}\mu_r \mu_0 M_0^2$

۲) $\mu_0 M_0 \hat{z}$ و 0

۳) 0 و 0

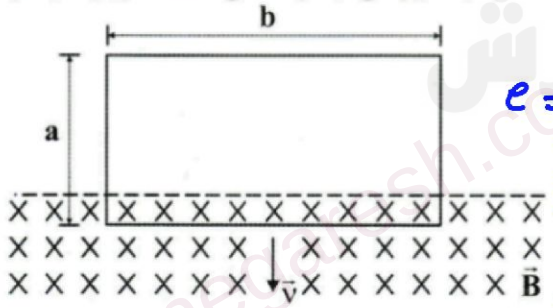
۴) $\mu_0 M_0 \hat{x}$ و 0 ✓

$$\vec{B}\Big|_{z=0} = \mu_0 M_0 \hat{x}$$

$$\vec{B}\Big|_{z=h+\frac{d}{2}} = 0 \rightsquigarrow E_m\Big|_{z=h+\frac{d}{2}} = 0$$

حل ارائه شده در روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵

۳۵- حلقه‌ای مستطیلی به ابعاد a و b و با مقاومت الکتریکی R مطابق شکل با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند. چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$ عمود بر سطح سیم‌پیچ است. با چشم‌پوشی از خودالقایی حلقه، نیروی وارد بر حلقه برابر کدام خواهد بود؟



$$e = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L} = vbB$$

$$I = \frac{e}{R} = \frac{vbB}{R}$$

$$|\vec{F}| = \left|\int I\,d\vec{L} \times \vec{B}\right| = \frac{vb^2B^2}{R}$$

۱) $\frac{-2\vec{v}b^2B^2}{R}$

۲) $\frac{2\vec{v}b^2B^2}{R}$

۳) $\frac{-\vec{v}b^2B^2}{R}$ ✓

۴) $\frac{\vec{v}b^2B^2}{R}$

بدیهی است که طبق قانون لنز جهت نیروی مغناطیسی وارد بر حلقه در خلاف جهت حرکت حلقه خواهد بود. بنابراین:

$$\vec{F} = \frac{-\vec{v}b^2B^2}{R}$$

حل ارائه شده در روز بعد از برگزاری آزمون ۹۶/۱۲/۵