سری برق

فصل ۱: سری فوریه

ژوزف فوریه (۱۸۳۰-۱۷۶۸)

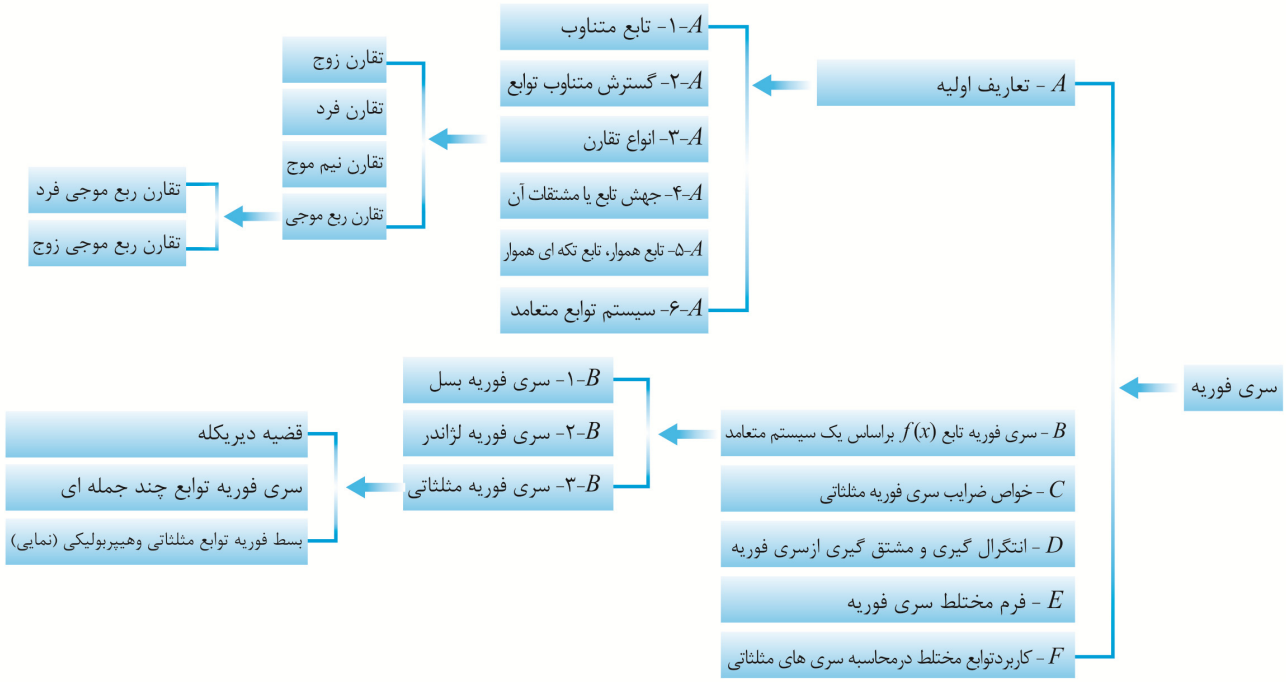
ریاضیات متنوع ترین و متفاوت ترین پدیده ها را مورد مقایسه قرار می دهد و شباهت های نهفته ای را که متحد کننده آنهاست، کشف می نماید.

«فوریه»

مقدمه

آنالیز فوریه یکی از زیباترین و پر کاربردترین دستاوردهای ریاضیات نوین می‌باشد. پیشرفت‌های عظیم در زمینه ارتباطات و مخابرات به واسطه بهره‌گیری از این شاخه ریاضیات می‌باشد. همچنین آنالیز فوریه می‌توان در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همراه با شرایط مرزی استفاده نمود.

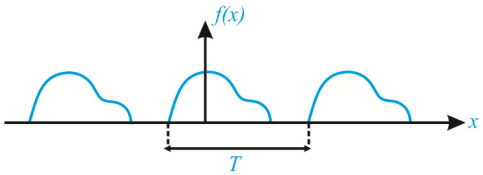
مباحث این فصل با مفاهیم پایه‌ای آنالیز فوریه و یافتن ضرایب بسط فوریه توابع مقدماتی، شروع می‌شود و به دنبال آن خواص ضرایب سری فوریه و کاربرد آن در محاسبه سری‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین با تلفیق مباحث آنالیز فوریه و اعداد مختلط، کاربردهای ویژه‌ای از ریاضیات مهندسی در محاسبه حاصل برخی از سری‌های مثلثاتی و انتگرالهای خاص بیان خواهد شد.



A- تعاریف اولیه

A-۱- تابع متناوب

تابع $f(x)$ را متناوب می‌نامیم، هرگاه عدد مثبتی مانند T_1 وجود داشته باشد، که به ازای همه مقادیر x متعلق به دامنه تعریف تابع $f(x)$، $x \pm T_1$ نیز متعلق به دامنه تعریف تابع $f(x)$ بوده و $f(x \pm T_1) = f(x)$ باشد. کوچکترین مقدار مثبت T_1 را با T نشان داده و آن را دوره تناوب (یا تناوب اساسی) تابع $f(x)$ می‌نامیم. اگر T دوره تناوب اساسی تابع $f(x)$ باشد، می‌توان چنین نوشت:



$$f(x) = f(x \pm T) = f(x \pm 2T) = f(x \pm 3T) = \dots$$

$$\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^{T} f(x)dx \qquad (n \in N)$$

$$\int_0^{T} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$$

بعضی از توابع ذاتاً متناوب هستند. مهمترین این توابع همراه با دوره تناوب اساسی آنها در جدول زیر آمده است:

تناوب اساسی	تابع متناوب $(-\infty < x < \infty)$
$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$	$\sin^{2n} ax, \cos^{2n} ax, \tan^{n} ax, \cot^{n} ax$
$\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	$\sin^{2n-1} ax, \cos^{2n-1} ax$
$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$	$\lvert\sin^{n} ax\rvert, \lvert\cos^{n} ax\rvert$
$\frac{1}{\lvert n\rvert}$	$nx-[nx]$

تمرین ۱-۱: دوره تناوب تابع $f(x)=\lvert\sin 2\pi x\rvert$ کدام است؟ (برق – آزاد ۹۱)

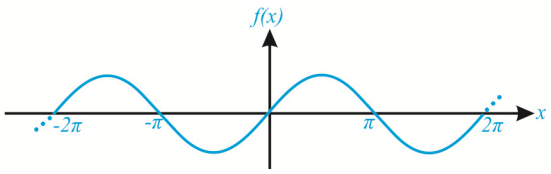
۱) π ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

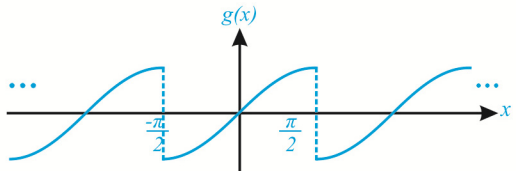
حل: با توجه به جدول فوق، می‌توان چنین نوشت: $T=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

A-۲- گسترش متناوب توابع

فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه معین (a,b) تعریف شده باشد. اگر تابع $g(x)$ را به گونه‌ای تعریف کنیم که در بازه (a,b) برابر $f(x)$ بوده و به ازای مقادیر خارج از بازه (a,b) داشته باشیم $g(x\pm T)=g(x)$ $(T\ge\lvert b-a\rvert)$، آنگاه تابع $g(x)$ متناوب با دوره تناوب اساسی T خواهد بود.

به طور مثال، تابع $f(x)=\sin x$ با دامنه تعریف $-\infty<x<\infty$، ذاتاً متناوب بوده و تناوب اساسی آن برابر $T=2\pi$ می‌باشد در حالیکه تابع $g(x)=\sin x$، تعریف شده در بازه $(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ با شرط $g(x\pm\pi)=g(x)$، متناوب با دوره تناوب اساسی $T=\pi$ خواهد بود.





تمرین ۱-۲: اگر $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{L}{3} \\ \frac{1}{2}(L-x) & \frac{L}{3}<x<L \end{cases}$ و $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{L}$ که در آن b_nها ضرایب ثابت‌اند، آنگاه این رابطه سری ایجاب می‌کند که کدامیک از روابط زیر صحیح باشند؟ (برق- سراسری ۸۴)

۱) $f(x)=\begin{cases} -x & -\frac{L}{3}\le x\le 0 \\ \frac{1}{2}(L+x) & -L<x<\frac{-L}{3} \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} x & -\frac{L}{3}\le x\le 0 \\ \frac{1}{2}(L-x) & -L<x<\frac{-L}{3} \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(L-x) & L\le x\le \frac{5L}{3} \\ x & \frac{5L}{3}<x<2L \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(L-x) & L\le x\le \frac{5L}{3} \\ x-2L & \frac{5L}{3}<x<2L \end{cases}$

حل: با بررسی رابطهٔ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{L}$ نتایج زیر حاصل می‌گردد:

۱) دوره تناوب اساسی تابع $f(x)$ برابر $T=2L$ است. $(f(x\pm 2L)=f(x))$

۲) تابع $f(x)$ نسبت به محور $x=0$ تقارن فرد دارد. $(f(-x)=-f(x))$

از طرفی تابع $f(x)$ فقط در بازه $0<x<L$ تعریف شده است. بنابراین برای بدست آوردن مقادیر این تابع در سایر بازه‌ها باید تابع $f(x)$ داده شده در بازه $0<x<L$ را نسبت به محور $x=0$ گسترش فرد داده و با دوره تناوب $T=2L$ تکرار نماییم. در این صورت خواهیم داشت:

$f(2L)=f(0)=f(-L)=0$ (گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست) $\qquad$ $f(-\frac{L}{3})=-f(\frac{L}{3})=-\frac{L}{3}$ (گزینه ۱ نادرست)

به این ترتیب، گزینه (۴) صحیح است.

A-۳- انواع تقارن

تقارن زوج: چنانچه به ازای هر x متعلق به دامنه تعریف تابع $f(x)$، $-x$ نیز متعلق به دامنه تعریف تابع $f(x)$ باشد و $f(-x)=f(x)$ گردد، می‌گوییم، تابع $f(x)$ تقارن زوج دارد. هر تابع زوج، نسبت به محور $x=0$ (محور yها) متقارن است.

تمرین ۱-۳: کدام یک از توابع متناوب زیر، تقارن زوج دارد؟

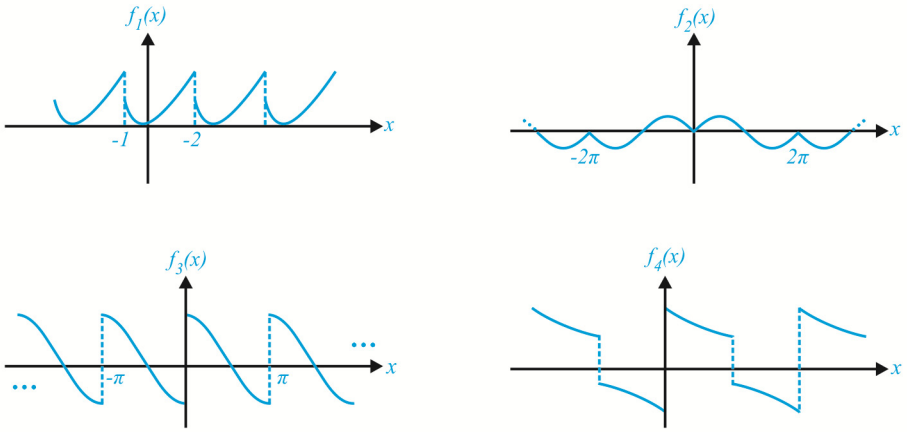
۱) $(-1<x<2)$ $\quad f_1(x)=x^2$ و $T=3$

۲) $f_2(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x<2\pi\\ -\sin x & -2\pi<x<0\end{cases}$ و $T=4\pi$

۳) $f_3(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$ و $T=2\pi$

۴) $f_4(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0<x<\pi\\ -e^{x} & -\pi<x<0\end{cases}$ و $T=2\pi$

حل: نمودار هر یک از توابع به صورت زیر خواهد بود:



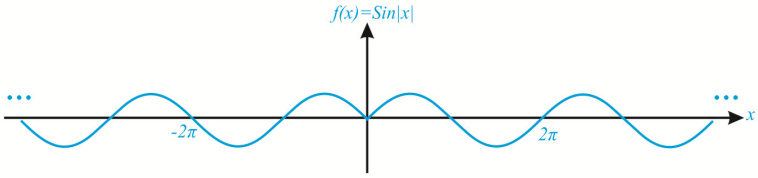
با بررسی گزینه‌ها، خواهیم دید که فقط تابع $f_2(x)$ نسبت به محور $x=0$ متقارن است.

تمرین ۱-٤: می توان گفت که تابع $f(x)=\sin|x|$ روی فاصلهٔ $-\infty<x<\infty$: (دکتری برق- آزاد ۸۹)

۱) زوج تناوبی است. $\qquad$ ۲) زوج است اما تناوبی نیست. $\qquad$ ۳) فرد و تناوبی است. $\qquad$ ۴) فرد است اما تناوبی نیست.

حل:

$$f(x)=\sin|x|=\begin{cases}\sin x & x\geq 0\\ -\sin x & x<0\end{cases}$$



چنانچه نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنیم، خواهیم دید که این تابع زوج، است اما متناوب نیست. (در $x=0$ روند تغییرات تابع عوض می‌شود.)

تمرین ۱-۵: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$ به ازای $0<x<\pi$ برابر است با: (بیومتریال – آزاد ۸۵)

۱) $x^2-\pi x$ $\qquad$ ۲) $x^2+\pi x+\frac{\pi^2}{6}$ $\qquad$ ۳) $x^2+\pi x-\frac{\pi^2}{2}$ $\qquad$ ۴) $x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{6}$

حل: فرم کسینوسی سری فوریه داده شده، ایجاب می‌کند که تابع متناظر با آن، نسبت به محور $x=0$ گسترش زوج داشته باشد. $(f(-x)=f(x))$. ممکن است، در اثر بی دقتی همه گزینه‌ها نادرست تلقی گردند. اما باید به این نکته توجه داشته باشیم که هر چهار گزینه، فقط در بازه $0<x<\pi$ تعریف شده‌اند و نمی‌توان از روی ضابطه آنها در این بازه، فرد یا زوج بودن آنها را تعیین کرد. در واقع هر کدام از این توابع در بازه $0<x<\pi$ رسم شده و سپس نسبت به محور $x=0$ گسترش زوج داده می‌شوند. همچنین دوره تناوب اساسی سری مثلثاتی داده شده، برابر $T=\pi$ است. بنابراین لازم است که $f(0)=f(\pi)$ باشد که گزینه‌های ۲ و ۳ این ویژگی را ندارند. با جایگذاری $x=0$ در سری مثلثاتی داده شده، خواهیم داشت:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}\Rightarrow S(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\neq 0$$ (گزینه (۱)نادرست است)

می‌توان ثابت کرد که سری مثلثاتی $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi nx}{T}$ متناوب (با تناوب اساسی T) بوده و تقارن زوج دارد.

تقارن فرد: چنانچه به ازای هر x متعلق به دامنه تعریف تابع $f(x)$، $-x$ نیز متعلق به دامنه تعریف تابع $f(x)$ باشد و $f(-x)=-f(x)$ گردد، می گوییم تابع $f(x)$ تقارن فرد دارد. هر تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

تمرین ۱-۶: کدام یک از توابع زیر، تقارن فرد دارد؟

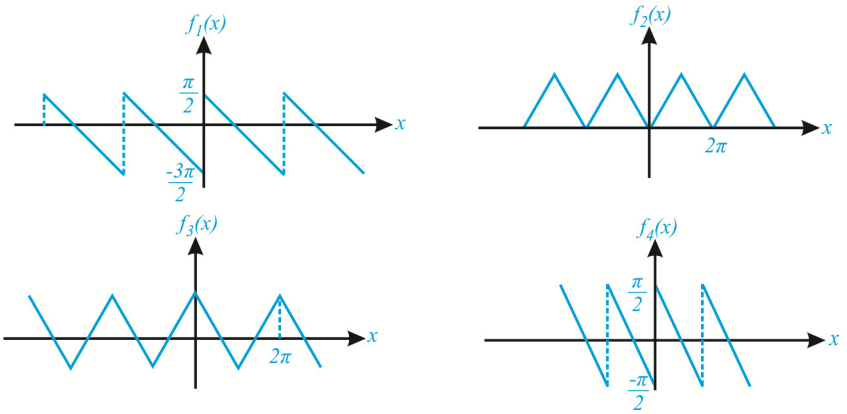
۱) $(0<x<2\pi)$ $f_1(x)=\frac{\pi}{2}-x$ و $T=2\pi$

۲) $f_2(x)=\begin{cases}x & 0<x<\pi\\ 2\pi-x & \pi<x<2\pi\end{cases}$ و $T=2\pi$

۳) $f_3(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x & 0<x<\pi\\ x-\frac{3\pi}{2} & \pi<x<2\pi\end{cases}$ و $T=2\pi$

۴) $(0<x<2\pi)$ $f_4(x)=\frac{\pi-x}{2}$ و $T=2\pi$

حل: نمودار هر یک از توابع به صورت زیر خواهد بود:



با بررسی گزینه‌ها، خواهیم دید که فقط تابع $f_4(x)$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

تمرین ۱-۷: مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$ به ازاء $-\pi<x<\pi$ برابر است با: (بیو الکتریک – آزاد ۸۵)

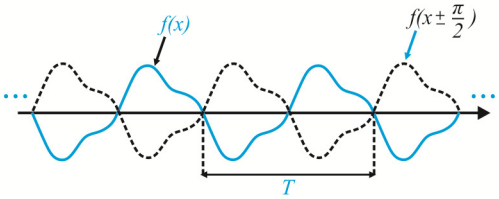
۱) x ۲) x^2 ۳) $x(1-x)$ ۴) $\frac{x}{1+x}$

حل: فرم سینوسی سری فوریه داده شده، ایجاب می‌کند که تابع جواب، فرد باشد.از بین گزینه‌های داده شده،فقط گزینه۱ این ویژگی را دارد.

می‌توان ثابت کرد که سری مثلثاتی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2\pi nx}{T}$ متناوب (با تناوب اساسی T) بوده و تقارن فرد دارد.

تقارن نیم‌موج: چنانچه تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب اساسی T باشد و با انتقال شکل تابع به اندازه $\frac{T}{2}$ به سمت چپ یا راست، شکل بدست آمده، قرینه شکل اولیه باشد $(f(x\pm\frac{T}{2})=-f(x))$ می‌گوییم، تابع $f(x)$ تقارن نیم‌موج دارد.

تمرین ۱-۸: کدام یک از توابع زیر، تقارن نیم‌موج دارد؟



۱) $f_1(x)=\sin x+\sin 2x$

۲) $f_2(x)=\sin x+\cos 3x$

۳) $f_3(x)=\cos x+\sin 2x$

۴) $f_4(x)=\cos x+\cos 2x$

حل: دوره تناوب اساسی گزینه‌های داده شده برابر $T=2\pi$ می‌باشد. با بررسی تک تک گزینه‌ها خواهیم داشت:

$$f_1(x+\frac{T}{2})=f_1(x+\pi)=\sin(x+\pi)+\sin(2x+2\pi)=-\sin x+\sin 2x\neq -f_1(x)$$

$$f_2(x+\frac{T}{2})=f_2(x+\pi)=\sin(x+\pi)+\cos(3x+3\pi)=-\sin x-\cos 3x=-f_2(x)$$

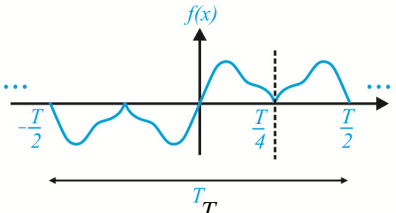
$$f_3(x+\frac{T}{2})=f_3(x+\pi)=\cos(x+\pi)+\sin(2x+2\pi)=-\cos x+\sin 2x\neq -f_3(x)$$

$$f_4(x+\frac{T}{2})=f_4(x+\pi)=\cos(x+\pi)+\cos(2x+2\pi)=-\cos x+\cos 2x\neq -f_4(x)$$

بنابراین، گزینه (۲) صحیح است.

می‌توان ثابت کرد که سری مثلثاتی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_{2n-1}\cos(2n-1)(\frac{2\pi x}{T})+b_{2n-1}\sin(2n-1)(\frac{2\pi x}{T})\right\}$ متناوب (با تناوب اساسی T) بوده و تقارن نیم‌موج دارد.

تقارن ربع‌موجی فرد: در این حالت تابع $f(x)$ تقارن فرد داشته و علاوه بر این، تقارن نیم‌موج نیز دارد. برای تابع $f(x)$ با تقارن ربع‌موجی فرد، می‌توان چنین نوشت:

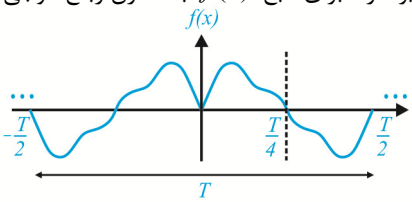


$$\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ f(x\pm\frac{T}{2})=-f(x)\end{cases}$$

در وضعیت تقارن ربع موجی فرد، تابع متناوب $f(x)$ نسبت به محور عمودی $x=0$ تقارن فرد و نسبت به محور عمودی $x=\frac{T}{4}$ تقارن زوج دارد.

می‌توان ثابت کرد که سری مثلثاتی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)(\frac{2\pi x}{T})$ متناوب (با تناوب اساسی T) بوده و تقارن ربع‌موجی فرد دارد.

تقارن ربع‌موجی زوج: در این حالت تابع $f(x)$ تقارن زوج داشته و علاوه بر این، تقارن نیم‌موج نیز دارد. برای تابع $f(x)$ با تقارن ربع‌موجی زوج می‌توان چنین نوشت:

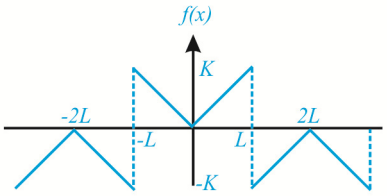


$$\begin{cases} f(-x)=f(x) \\ f(x\pm\frac{T}{2})=-f(x)\end{cases}$$

در وضعیت تقارن ربع موجی زوج، تابع متناوب $f(x)$ نسبت به محور عمودی $x=0$ تقارن زوج و نسبت به محور عمودی $x=\frac{T}{4}$ تقارن فرد دارد.

می‌توان ثابت کرد که سری مثلثاتی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)(\frac{2\pi x}{T})$ متناوب (با دوره تناوب اساسی T) بوده و تقارن ربع‌موجی زوج دارد.

تمرین ۱-۹: کدام گزینه سری مثلثاتی تابع شکل زیر را ارائه می‌کند؟ (مکاترونیک- آزاد ۸۴)



۱) $f(x)=\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi x}{2L})$

۲) $f(x)=\sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi x}{4L})$

۳) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi x}{2L})$

۴) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin(\frac{n\pi x}{2L})$

حل: چنانچه فرض کنیم، نمودار داده شده، فقط یک تناوب تابع $f(x)$ را نشان می‌دهد، دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر $T=4L$ خواهد بود. با دقت در نمودار تابع $f(x)$ در می‌یابیم که این تابع نسبت به $x=0$ تقارن زوج دارد. $(f(-x)=f(x))$ همچنین این تابع نسبت به محور عمودی $x=\frac{T}{4}$ تقارن فرد دارد. بنابراین می‌توان گفت که تابع $f(x)$ تقارن ربع‌موجی زوج دارد.

$$\begin{cases} f(-x)=f(x) \\ f(x\pm\frac{T}{2})=-f(x) \end{cases}$$

از طرفی سری مثلثاتی به شکل $\sum a_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)2\pi x}{T}$، متناوب با تناوب اساسی T بوده و تقارن ربع‌موجی زوج نیز دارد. بنابراین:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)2\pi x}{4L}=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}=\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi x}{2L})$$

A-۴- جهش تابع یا مشتقات آن

اگر x_0 یک نقطه ناپیوستگی (انفصال) تابع $f(x)$ باشد، در این صورت حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در نقطه x_0، ممکن است وجود داشته باشند و یا فقط یکی از آنها و یا هیچکدام از آنها موجود نباشند. اگر هر دوی حدود چپ و راست، در نقطه x_0 وجود داشته باشند، نقطه x_0 را نقطه انفصال از نوع اول یا نقطه ناپیوستگی جهشی می‌نامند. اگر حداقل یکی از این دو حد وجود نداشته باشد، نقطه x_0 را نقطه انفصال از نوع دوم می‌نامند. اگر x_0 یک نقطه ناپیوستگی جهشی باشد، مقدار جهش تابع $f(x)$ در نقطه x_0 از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f(x_0^+)-f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)-\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

همچنین اگر x_0 یک نقطه ناپیوستگی جهشی تابع $f'(x)$ باشد، مقدار جهش تابع $f'(x)$ در نقطه x_0 به صورت زیر خواهد بود:

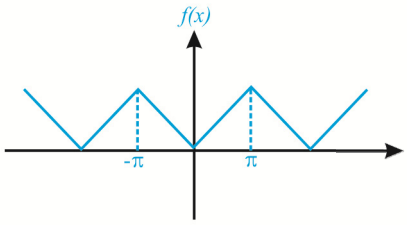
$$f'(x_0^+)-f'(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x)-\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$$

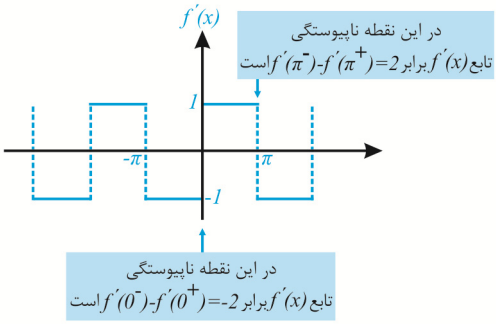
به همین ترتیب، می‌توان جهش مشتق‌های مرتبه بالاتر تابع $f(x)$ را تعریف نمود. در این کتاب، ناپیوستگی‌های تابع یا مشتقات آن به صورت قرینه روابط فوق تعریف شده است.

به طور مثال تابع $-\pi\le x\le\pi$ و $f(x)=|x|$ با دوره تناوب $T=2\pi$، در طول یک دوره تناوب اساسی خود، فاقد یک نقطه ناپیوستگی جهشی می‌باشد، اما مشتق این تابع یعنی $f'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ -1 & -\pi<x<0\end{cases}$ با دوره تناوب $T=2\pi$، در طول یک دوره تناوب اساسی خود در نقاط $x=0$ و $x=\pi$ دارای جهش به صورت روبرو می‌باشد:

$$x=0\Rightarrow f'(0^+)-f'(0^-)=1-(-1)=2$$

$$x=\pi\Rightarrow f'(\pi^+)-f'(\pi^-)=-1-1=-2$$





A-۵-تابع هموار، تابع تکه‌ای هموار

تابع $f(x)$ را در بازه $[a,b]$ هموار می‌نامند، هرگاه مشتق این تابع روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. از لحاظ هندسی، این تعریف بدان معنی است که جهت مماس بر منحنی $y=f(x)$ به طور پیوسته و بدون جهش، تغییر کند و لذا نمودار یک تابع هموار، فاقد نقاط گوشه‌ای می‌باشد. تابع $f(x)$ را در بازه $[a,b]$ تکه‌ای هموار می‌نامند، هر گاه تابع $f(x)$ و تابع $f'(x)$ هر دو روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشند، یا فقط دارای تعداد محدودی نقاط ناپیوستگی باشند که البته این نقاط ناپیوستگی نیز باید از نوع اول باشند. بدیهی است که نمودار تابع پیوسته تکه‌ای، یا یک منحنی پیوسته است و یا یک منحنی غیر پیوسته است، که دارای تعداد محدودی نقاط گوشه‌ای می‌باشد، که در این نقاط گوشه‌ای ، جهت مماس بر منحنی به یکباره تغییر می‌کند.

A-۶- سیستم توابع متعامد

سیستم نامحدود متشکل از توابع حقیقی $\Phi_0(x)$ و $\Phi_1(x)$ و $\Phi_2(x)$ و $\Phi_3(x)$ و ... را در بازه $[a,b]$ متعامد می‌نامند، هر گاه به ازای هر m و n غیر یکسان $(m\neq n)$ داشته باشیم:

$$\int_a^b \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx=0 \qquad (m\neq n \qquad m,n=0,1,2,3,...)$$

همچنین همواره فرض بر آن است که:

$$\int_a^b \Phi_n^2(x)dx\neq 0$$

به طور مثال، سیستم متشکل از توابع $\left\{1,\cos\frac{n\pi x}{L},\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$ $(n\in N)$ یک سیستم متعامد دربازه $[-L,L]$ می باشد. همچنین این سیستم، متعامد در بازه $[0,2L]$ یا هر بازه دلخواه دیگری به صورت $[a,2L+a]$ نیز می باشد. روابط زیر به راحتی قابل اثبات است:

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\int_0^{2L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx=\int_0^{2L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\int_0^{2L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=0$$

تمرین ۱-۱۰: هرگاه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ باشد، حاصل انتگرال $\int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x dx$ کدام است؟ (برق – سراسری ۸۵)

۱) صفر ۲) $\frac{3\pi}{8}$ ۳) $\frac{3\pi}{16}$ ۴) $\frac{13\pi}{36}$

حل: بدیهی است که تابع $f(x)$ فرد می‌باشد. بنابراین می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin^3 x dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\right)\sin^3 x dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{9}\sin 3x+...\right)\left(\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\right)dx$$

فقط دو جمله از پرانتز اول با جملاتی مشابه از پرانتز دوم تطابق دارد. بنابراین، طبق خاصیت تعامد توابع مثلثاتی، خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)(\pi)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{9}\right)(\pi)=\frac{13\pi}{36}$$

B- سری فوریه تابع $f(x)$ بر اساس یک سیستم متعامد

فرض کنید تابع $f(x)$ یک تابع تعریف شده در بازه $[a,b]$ باشد. همچنین سیستم متشکل از توابع $\{\Phi_0(x),\Phi_1(x),\Phi_2(x),...\}$ یک سیستم متعامد در بازه $[a,b]$ باشد.اگر بتوان تابع $f(x)$ را به صورت ترکیب خطی از توابع $\Phi_n(x)$ به صورت زیر بیان کرد:

$$f(x)=c_0\Phi_0(x)+c_1\Phi_1(x)+...+c_n\Phi_n(x)+...=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Phi_n(x)$$

آنگاه ضرایب c_n از رابطه زیر به دست خواهند آمد:

$$c_n=\frac{\int_a^b f(x)\Phi_n(x)dx}{\int_a^b \Phi_n^2(x)dx}$$

ضرایب به دست آمده از رابطه فوق را، ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ بر حسب پایه متعامد سیستم $\{\Phi_0(x),\Phi_1(x)...,\Phi_n(x),...\}$ می‌نامند و سری $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Phi_n(x)$ را سری فوریه این تابع می‌نامند. در جدول زیر، مهمترین سیستم‌های متعامد و بسط فوریه تابع $f(x)$ بر حسب آنها، بیان شده‌اند:

سیستم توابع متعامد	بازه	ویژگی تعامد	سری فوریه	ضرایب ضریب فوریه
$1,\cos\frac{\pi x}{L},\cos\frac{2\pi x}{L},\dots,\cos\frac{n\pi x}{L},\dots$ $\sin\frac{\pi x}{L},\sin\frac{2\pi x}{L},\dots,\sin\frac{n\pi x}{L},\dots$	$(-L,L)$	$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases}$ $\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases}$ $\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=0$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$	$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$
$1,\cos\frac{\pi x}{L},\cos\frac{2\pi x}{L},\dots,\cos\frac{n\pi x}{L},\dots$	$(0,L)$	$\int^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{L}{2} & m=n\end{cases}$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$	$a_n=\frac{2}{L}\int^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$
$\sin\frac{\pi x}{L},\sin\frac{2\pi x}{L},\dots,\sin\frac{n\pi x}{L},\dots$	$(0,L)$	$\int^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{L}{2} & m=n\end{cases}$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$	$b_n=\frac{2}{L}\int^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$
$\cos\frac{\pi x}{2L},\cos\frac{3\pi x}{2L},\dots,\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L},\dots$	$(0,L)$	$\int^{L}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2L}dx=\begin{cases}0\\ \frac{L}{2}\end{cases}$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$	$a_{2n-1}=\frac{2}{L}\int^{L}f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}dx$
$\sin\frac{\pi x}{2L},\sin\frac{3\pi x}{2L},\dots,\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L},\dots$	$(0,L)$	$\int^{L}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2L}dx=\begin{cases}0\\ \frac{L}{2}\end{cases}$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$	$b_{2n-1}=\frac{2}{L}\int^{L}f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}dx$
$P_0(x),P_1(x),P_2(x),p_3(x),\dots$ $P_n(x)$: چند جمله ای لژاندر مرتبه n	$(-1,1)$	$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$	$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$
$\sqrt{x}J_\rho(\lambda_1 x),\sqrt{x}J_\rho(\lambda_2 x),\sqrt{x}J_\rho(\lambda_3 x),\dots$ $J_\rho(x)$: تابع بسل نوع اول مرتبه ρ λ_i: صفر های تابع بسل	$(0,1)$	$\int^{1}xJ_\rho(\lambda_m x)J_\rho(\lambda_n x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{1}{2}J_{\rho+1}^{2}(\lambda_n) & m=n\end{cases}$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nJ_\rho(\lambda_n x)$	$c_n=\frac{2}{J_{\rho+1}^{2}(\lambda_n)}\int^{1}xf(x)J_\rho(\lambda_n x)dx$

B-۱- سری فوریه بسل

اگر $n \geq 0$ بوده و $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ریشه‌های مثبت معادله $J_n(x) = 0$ باشند، ($J_n(x)$ تابع بسل نوع اول است) بسط فوریه بسل تابع تعریف شده در بازه (۱ و ۰) را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r J_n(x\alpha_r)$$

با استفاده از خاصیت تعامد توابع بسل، می‌توان چنین نوشت:

$$A_r = \frac{2}{[J_{n+1}(\alpha_r)]^2} \int_0^1 x f(x) J_n(x\alpha_r) dx$$

B-۲- سری فوریه لژاندر

برای تابع $f(x)$ که در بازه (۱ , ۱-) تعریف شده باشد، بسط فوریه لژاندر به صورت مقابل تعریف می‌گردد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)$$

منظور از $P_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر می‌باشد، که از فرمول مقابل محاسبه می‌گردد:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

$P_{2k}(x)$ تابعی زوج بر حسب x و $P_{2k-1}(x)$ تابعی فرد بر حسب x می‌باشد. $P_{2k-1}(-x) = -P_{2k-1}(x)$ $\quad$ $P_{2k}(-x) = P_{2k}(x)$

با استفاده از ویژگی تعامد چند جمله‌ایهای لژاندر، می‌توان چنین نوشت:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

تمرین ۱-۱۱: در مبحث سری فوریه تعمیم یافته، کدام یک از مفاهیم زیر، بنیادی است؟ (دکتری برق – آزاد ۸۸)

۱) تناوب ۲) تعامد ۳) پیوستگی ۴) مشتق‌پذیری

حل: در مبحث سری فوریه بسل و لژاندر، لزومی بر متناوب بودن تابع نمی‌باشد. همچنین پیوستگی و مشتق‌پذیری نیز از مفاهیم بنیادی مبحث سری فوریه تعمیم یافته نیست و ممکن است، تابعی مشتق‌پذیر نباشد، ولی بتوان آنرا توسط سری فوریه تعمیم یافته بیان کرد.

تمرین ۱-۱۲: اگر $P_n(x)$ به ازای هر عدد صحیح نامنفی n، یک چند جمله‌ای لژاندر درجه n را نمایش دهد، آنگاه مقدار $I_k = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2) P_{2k-1}(x) dx$ کدام است؟ $(k \geq 1)$ (دکتری – سراسری ۹۱، مشابه برق سراسری ۷۳)

۱) $I_k = \begin{cases} 0 & , \quad k > 2 \\ \frac{1}{3} & , \quad k = 2 \\ 0 & , \quad k = 1 \end{cases}$

۲) $I_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 2 \\ \frac{1}{2k-1} & , \quad k \geq 2 \end{cases}$

۳) $I_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 1 \\ \frac{2}{3} & , \quad k = 2 \\ 0 & , \quad k > 2 \end{cases}$

۴) $I_k = 0$ به ازای هر $k \in N$

حل: تابع $P_{2k-1}(x)$ تابعی فرد برحسب x می‌باشد. بنابراین، عبارت زیر انتگرال نیز تابعی فرد بر حسب x بوده و حاصل انتگرال همواره صفر خواهد شد.

تمرین ۱-۱۳: مطلوب است مقدار C_2 در بسط لژاندر – فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$ داریم: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x)$ که در آن، $P_n(x)$، چند جمله‌ای‌های لژاندر می‌باشند. برای $n=2$، $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$. (مکانیک – سراسری ۹۱)

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: طبق فرمول محاسبه ضرایب سری فوریه لژاندر، می‌توان چنین نوشت:

$$C_2=\frac{2\times2+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_2(x)dx=\frac{5}{2}\int_0^1P_2(x)dx=\frac{5}{2}\int_0^1\frac{1}{2}(3x^2-1)dx=0$$

تمرین ۱-۱۴: در بسط فوریه لژاندر تابع $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$ به صورت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(x)$، ضریب A_6 کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{-7}{16}$

حل: تابع $f(x)$ را در بازه $(-1\ ,\ 1)$ می‌توان به صورت زیر، تعریف کرد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2} & -1<x<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0<x<1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}+g(x)\qquad(-1<x<1)\qquad g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & -1<x<0\\ \frac{1}{2} & 0<x<1\end{cases}$$

با توجه به اینکه $P_0(x)=1$ می‌باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+g(x)\qquad(-1<x<1)$$

قسمت اول تابع $f(x)$، (یعنی $\frac{1}{2}P_0(x)$) خود به صورت پایه‌ای بوده و نیازی به بسط فوریه لژاندر، ندارد.در واقع بسط فوریه لژاندر این تابع، برابر خود تابع می‌باشد. به این ترتیب، ضریب A_6 را باید در بسط فوریه لژاندر تابع $g(x)$ جستجو کنیم. از طرفی $g(x)$ تابعی فرد (برحسب x) و $P_6(x)$ تابعی زوج می‌باشد و لذا:

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}g(x)P_n(x)dx\Rightarrow A_6=\frac{13}{2}\int_{-1}^{1}g(x)P_6(x)dx=0$$

B-۳- سری فوریه مثلثاتی

در بحث سری فوریه مثلثاتی، معمولاً با دو مساله زیر مواجه هستیم:

الف) با داشتن تابع $f(x)$، سری فوریه مثلثاتی آن را (در صورت وجود) بدست آوریم.

ب) با داشتن سری فوریه مثلثاتی یک تابع، همگرایی یا واگرایی سری و در برخی موارد، تابع متناظر با آن را تعیین نماییم. همچنین می‌توان از روی بسط فوریه مثلثاتی یک تابع حاصل، برخی از سری‌های عددی و انتگرالهای پیچیده را محاسبه نمود.

هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله $(-L,L)$ تعریف شده باشد، (به جز احتمالاً در تعداد متناهی از نقاط) و متناوب با دوره تناوب $T=2L$ باشد و نیز $f(x)$ و $f'(x)$ در بازه $(-L,L)$ به طور تکه‌ای هموار باشند، آنگاه سری فوریه مثلثاتی متناظر با تابع $f(x)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

که در آن ضرایب a_n و b_n از روابط زیر به دست می آیند:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\qquad n=1,2,3,\ldots$$

در بعضی مسائل، تابع $f(x)$ فقط در بازه $0<x<L$ تعریف شده است و بنابر شرایط خاص مساله ناچاریم، چنین تابعی را به صورت متناوب گسترش دهیم. اگر بنا بر نیاز مساله، تابع $f(x)$ را در بازه $-L<x<0$، به گونه‌ای تعریف کنیم که شکل تابع ایجاد شده در بازه $-L<x<L$ با

تقارن زوج گردد، و سپس سری فوریه این تابع با دوره تناوب $T=2L$ را بنویسیم، آنگاه سری مثلثاتی حاصل را در اصطلاح، بسط نیم‌دامنه‌ای زوج تابع $f(x)$ می‌نامند.

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

به همین ترتیب، اگر بر طبق شرایط مساله، تابع $f(x)$ را در بازه، $-L<x<0$ به گونه‌ای تعریف کنیم که شکل تابع ایجاد شده در بازه $-L<x<L$ با تقارن فرد گردد، و سپس سری فوریه این تابع را با دوره تناوب $T=2L$ بنویسیم، آنگاه سری مثلثاتی حاصل را، بسط نیم‌دامنه‌ای فرد تابع $f(x)$ می‌نامند.

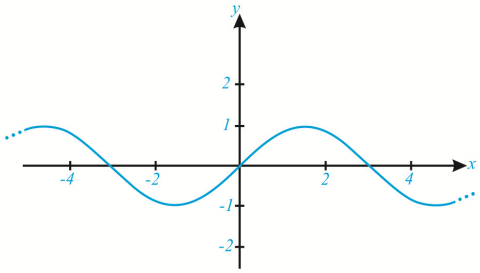
$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

به طور مثال، بسط فوریه مثلثاتی $(-\pi<x<\pi)$ $f(x)=\frac{x}{2}$ با دوره تناوب $T=2\pi$ به صورت زیر می‌باشد:

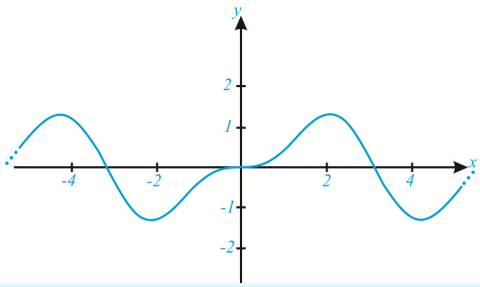
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad a_n=0$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\dots$$

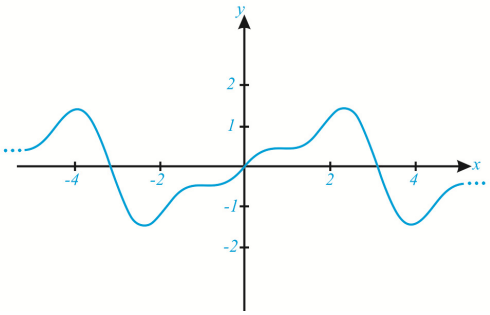
در نمودارهای شکل زیر، مراحل مختلف تشکیل تابع $f(x)=\frac{x}{2}$، $(-\pi<x<\pi)$ از روی توابع مثلثاتی، نشان داده شده است.



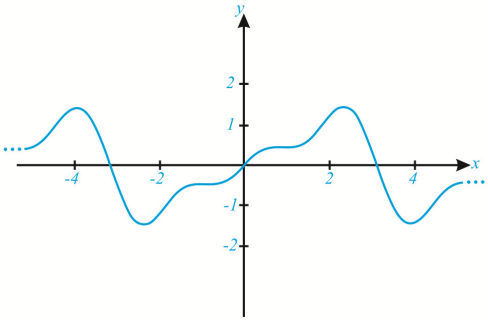
$$f(x)=\sin x$$



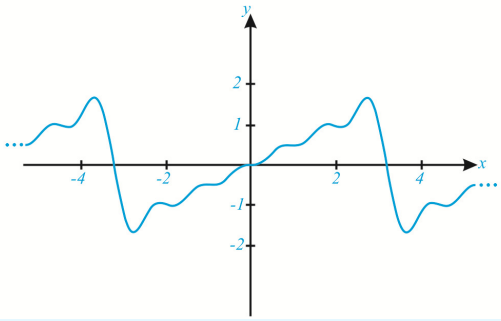
$$f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$$



$$f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$$



$$f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x$$



$$f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{7}\sin 7x-\frac{1}{8}\sin 8x$$

قضیه دیریکله

شرایط دیریکله در مورد وجود سری فوریه مثلثاتی برای تابع مفروض $f(x)$ عبارتند از:

۱- تابع $f(x)$ در یک دوره تناوب خود انتگرال پذیر باشد.

۲- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع، در یک دوره تناوب آن محدود باشد. ($f(x)$ تکه‌ای هموار باشد.)

۳- تعداد نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع $f(x)$ در یک دوره تناوب آن محدود باشد.

اگر $x=x_0$ یک نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ باشد، در آن صورت سری مثلثاتی متناظر با آن به ازای $x=x_0$ به سمت $f(x_0)$ همگرا خواهد شد. همچنین اگر $x=x_0$ نقطه ناپیوستگی تابع $f(x)$ باشد، سری مثلثاتی متناظر با آن به ازای $x=x_0$ به سمت $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ همگرا خواهد شد.

تمرین ۱-۱۵: تابع $f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$ را در محدوده $-\pi<x<\pi$ در نظر بگیرید. در این صورت می‌توان گفت این تابع:

۱) دارای بسط فوریه نمی‌باشد، چون دارای ناپیوستگی در محدوده است. (مکانیک- سراسری ۸۳)

۲) دارای بسط کسینوسی فوریه در محدوده است، چون تابع زوج می باشد.

۳) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد، چون تابع نوسانی (پریودیک) نیست.

۴) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد، چون تعداد حداکثر و حداقل آن محدود نمی‌باشد.

حل: تابع $f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$ در حالت کلی نوسانی نیست. اما اگر این تابع را در محدوده $-\pi<x<\pi$ تعریف نموده و سپس شکل بدست آمده را در سایر نقاط با دوره تناوب $T=2\pi$ تکرار نماییم، یک تابع نوسانی به دست خواهد آمد. (گزینه ۳ نادرست)

با توجه به اینکه تابع $f(x)$ پیوسته بوده و در نزدیکی $x=0$ دارای تعداد نامحدودی ریشه می‌باشد، بر طبق قضیه رول، مشتق این تابع نیز دارای تعداد نامحدودی ریشه خواهد بود. به عبارت دیگر، تابع $f(x)$ دارای تعداد نامحدودی نقاط ماکزیمم و می‌نیمم در محدوده $-\pi<x<\pi$ خواهد بود و لذا در شرایط قضیه دیریکله صدق نمی‌کند. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

تمرین ۱-۱۶: مقدار سری فوریه متناظر تابع متناوب $(T=2\pi)$ ، $f(x)=x^2+x \quad (-\pi<x<\pi)$ در نقطه $x=\pi$ کدام است؟

۱) π ۲) π^2 ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\pi^2+\pi$ (مکانیک- سراسری ۸۲)

حل: اگر تابع $f(x)$ را در بازه $(-\pi,\pi)$ رسم کرده و آن را با دوره تناوب $T=2\pi$ تکرار نماییم، خواهیم دید که نقطه $x=\pi$، نقطه انفصال تابع متناوب حاصل می‌باشد. بنابراین، طبق قضیه دیریکله، مقدار سری فوریه متناظر در نقطه $x=\pi$، میانگین حدود چپ و راست تابع $f(x)$ در این نقطه خواهد بود.

$$\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos x+b_n\sin nx)\right)_{x=\pi}=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{(\pi^2+\pi)+(\pi^2-\pi)}{2}=\pi^2$$

دقت کنید، باتوجه به اینکه دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر $T=2\pi$ می‌باشد، می‌توان چنین نوشت: $f(\pi^-)=f(-\pi^+)$

تمرین ۱-۱۷: بسط فوریه تابع $f(x)=e^x$ ، $-\pi<x<\pi$ عبارت است از: (مکاترونیک- آزاد ۸۶)

$$f(x)=\frac{\sinh\pi}{\pi}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right\}$$

حاصل عبارت $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\frac{1}{26}+\dots$ کدام است؟

۱) $1-\pi\coth(\pi)$ ۲) $\pi^2 tgh\pi-1$ ۳) $\frac{\pi\coth(\pi)-1}{2}$ ۴) $\pi^2-tgh\pi$

حل: با دقت در بسط فوریه داده شده، خواهیم دید که اگر به جای x مقدار π قرار دهیم، سری عددی مورد نظر بدست خواهد آمد. از طرفی با رسم تابع $f(x)=e^x$ در بازه $-\pi<x<\pi$ و گسترش آن با دوره تناوب $T=2\pi$، خواهیم دید که نقطه‌ای با طول $x=\pi$، نقطه انفصال تابع متناوب حاصل می‌باشد. بنابراین طبق قضیه دیریکله، حاصل سری فوریه داده شده، به ازای $x=\pi$ به سمت $\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$ همگرا خواهد شد. بنابراین: $(f(\pi^-)=f(-\pi^+))$

$$\frac{\sinh\pi}{\pi}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1+n^2}(\cos n\pi-n\sin n\pi)\right\}=\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$$

با توجه به اینکه $\sin n\pi=0$ و $\cos n\pi=(-1)^n$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{\sinh\pi}{\pi}+\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+n^2}=\cosh\pi\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi\coth(\pi)-1}{2}$$

تمرین ۱-۱۸: ضرایب سری فوریه تابع $f(-x)=-f(x), f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\frac{L}{3}\\ \frac{1}{2}(L-x) & \frac{L}{3}<x<L\end{cases}$ با دوره تناوب $T=2L$ کدام است؟

۱) $b_n=\frac{3\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$ ۲) $b_n=\frac{3L\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2\pi^2}$ ۳) $b_n=\frac{3\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2\pi^2}$ ۴) $b_n=\frac{3L\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$

حل: رابطه $f(-x)=-f(x)$ نشان دهنده آن است که باید تابع $f(x)$ داده شده در بازه $0<x<L$ را با دوره تناوب $T=2L$ به‌صورت فرد گسترش دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\left\{\int_0^{\frac{L}{3}}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\int_{\frac{L}{3}}^{L}\frac{1}{2}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}$$

با محاسبه انتگرال‌های فوق به روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$I_1=\int_0^{\frac{L}{3}}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\left[\frac{-xL}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}+(\frac{L}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{\frac{L}{3}}=\frac{-L^2}{3n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}+(\frac{L}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi}{3}$$

$$I_2=\int_{\frac{L}{3}}^{L}\frac{1}{2}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\left[\frac{-L}{2n\pi}(L-x)\cos\frac{n\pi x}{L}-\frac{1}{2}(\frac{L}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{\frac{L}{3}}^{L}=\frac{L^2}{3n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{1}{2}(\frac{L}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi}{3}$$

$$b_n=\frac{2}{L}(I_1+I_2)=\frac{3L\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2\pi^2}$$

بدیهی است که محاسبه ضرایب سری فوریه به این روش، وقت گیر بوده و حتی ممکن است با کوچکترین اشتباه به جواب نادرستی منجر گردد.

چنانچه فرمول محاسبه b_n را یکبار دیگر مورد بررسی قرار دهیم، خواهیم داشت: $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

با توجه به اینکه تابع $f(x)$ داده شده بر حسب x از درجه اول می‌باشد، بنابراین $f''(x)=0$ بوده و استفاده از روش جزء به جزء به نتیجه نهایی زیر منجر خواهد شد:

$$b_n=\frac{1}{L}\left\{-(\frac{L}{n\pi})f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}+(\frac{L}{n\pi})^2f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}_{-L}^{L}=\frac{1}{L}\left\{-(\frac{L}{n\pi})f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}_{-L}^{L}+\frac{1}{L}\left\{(\frac{L}{n\pi})^2f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}_{-L}^{L}$$

با توجه به اینکه تابع $f(x)$ در همه نقاط پیوسته می‌باشد، حاصل عبارت اول، صفر خواهد شد. بنابراین:

$$b_n=\frac{1}{L}\left\{(\frac{L}{n\pi})^2f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}_{-L}^{L}$$

از طرفی، تابع $f'(x)$ در طول یک دوره تناوب خود، (در بازه $(-L,L)$) در نقاط گوشه‌ای $x=-\frac{L}{۳}$ و $x=\frac{L}{۳}$ ناپیوسته بوده و جهش دارد.

بنابراین:
$$b_n=\frac{۱}{L}\left\{(\frac{L}{n\pi})^۲\left[f'(-\frac{L^-}{۳})-f'(-\frac{L^+}{۳})\right]\sin\frac{n\pi(-\frac{L}{۳})}{L}+(\frac{L}{n\pi})^۲\left[f'(\frac{L^-}{۳})-f'(\frac{L^+}{۳})\right]\sin\frac{n\pi(\frac{L}{۳})}{L}\right\}$$

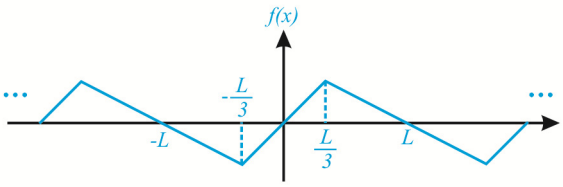
با توجه به تابع $f(x)$ و گسترش فرد آن خواهیم داشت:
$$f'(-\frac{L^-}{۳})=f'(\frac{L^+}{۳})=-\frac{۱}{۲}\quad,\quad f'(-\frac{L^+}{۳})=f'(\frac{L^-}{۳})=۱$$

بنابراین:
$$b_n=\frac{۲L}{(n\pi)^۲}\left[۱-(-\frac{۱}{۲})\right]\sin(\frac{n\pi}{۳})=\frac{۳L\sin\frac{n\pi}{۳}}{n^۲\pi^۲}$$

حال با توجه به مطالب گفته شده، اگر بخواهیم خیلی سریع، از روی تابع داده شده، ضرایب سری فوریه آن را محاسبه کنیم، به طریق زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا نمودار تقریبی تابع $f(x)$ را به همراه گسترش فرد آن با دوره تناوب $T=۲L$ رسم می‌کنیم.

- ✓ نمودار کامل تابع $f(x)$ در طول یک دوره تناوب خود، پیوسته بوده، اما به خاطر وجود نقاط گوشه‌ای در $x=-\frac{L}{۳}$ و $x=\frac{L}{۳}$ مشتق آن $(f'(x))$ دارای گسستگی (جهش) خواهد بود. بنابراین در مخرج ضرایب سری فوریه وجود $(n\pi)^۲$ ضروری است و به همین دلیل وجود عامل L در صورت ضرایب سری فوریه نیز ضروری خواهدبود. (؟)
- ✓ با توجه به فرد بودن ضرایب b_n $(b_{-n}=-b_n)$ و اینکه مختصات نقاط جهش $f'(x)$ در $x=\pm\frac{L}{۳}$ واقع است، انتظار داریم که در صورت ضرایب سری فوریه عامل $(\sin\frac{n\pi x}{L})\Big|_{x=\frac{L}{۳}}=\sin\frac{n\pi}{۳}$ وجود داشته باشد.
- ✓ جهش تابع $f'(x)$ در نقطه $x=\frac{L}{۳}$ برابر $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد. بنابراین جهش کل تابع $f'(x)$ در طول یک دوره تناوب خود برابر $۲\times(\frac{۳}{۲})=۳$ خواهد بود. (؟) به همین دلیل وجود ضریب ۳ نیز در صورت ضرایب سری فوریه ضروری خواهد بود.



$$b_n=\frac{۱}{L}\left\{(\frac{L}{n\pi})^۲\sum f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$$
$$=\frac{۱}{L}\left\{(\frac{L}{n\pi})^۲\left[(-\frac{۱}{۲}-۱)\sin\frac{n\pi(-\frac{L}{۳})}{L}+(۱-(\frac{-۱}{۲})\sin\frac{n\pi(\frac{L}{۳})}{L}\right]\right\}$$
$$=\frac{۳L\sin\frac{n\pi}{۳}}{n^۲\pi^۲}$$

تمرین ۱-۱۹: ضرایب سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}۲x & ۰\le x\le\frac{\pi}{۵}\\ \frac{۱}{۲}(\pi-x) & \frac{\pi}{۵}<x\le\pi\end{cases}$ با دوره تناوب $T=۲\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\cos\frac{n\pi}{۵}}{n^۲\pi}$ ۲) $\frac{۵\sin\frac{n\pi}{۵}}{n^۲\pi^۲}$ ۳) $\frac{۳\sin\frac{n\pi}{۵}}{n^۲\pi}$ ۴) $\frac{۵\sin\frac{n\pi}{۵}}{n^۲\pi}$

حل: با توجه به اینکه بسط فوریه سینوسی تابع $f(x)$ مورد نظر است، بنابراین لازم است تابع $f(x)$ تعریف شده در بازه $[۰,\pi]$ را گسترش فرد دهیم. (با دوره تناوب $T=۲\pi$) به این ترتیب، تابع متناوب حاصل در همه نقاط، پیوسته بوده و مشتق آن در طول یک دوره تناوب

آن (از $-\pi$ تا π) در نقاط $x=\frac{\pi}{5}$ و $x=-\frac{\pi}{5}$ ناپیوسته خواهد بود. (این مطلب را می‌توان، از روی ضابطه تابع $f(x)$ نیز نتیجه گیری کرد.) با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ مشتق سمت چپ در $x=\frac{\pi}{5}$ برابر ۲ و مشتق سمت راست در $x=\frac{\pi}{5}$ برابر $-\frac{1}{2}$ است و لذا می‌توان چنین نوشت:

$$b_n=\frac{2\pi}{(n\pi)^2}(2-(-\frac{1}{2}))\sin\frac{n\pi}{5}=\frac{5\sin\frac{n\pi}{5}}{n^2\pi}$$

سری فوریه توابع چند جمله‌ای

ضرایب سری فوریه یک تابع متناوب که در شرایط قضیه دیریکله صدق می‌کند، با جهش‌های تابع و مشتقات آن در طول یک دوره تناوب تابع متناسب است. به طور مثال، اگر تابع $f(x)$ به‌صورت یک چندجمله‌ای باشد، ضرایب سری فوریه آن با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء (مشتق گیری از یک جزء و انتگرال‌گیری از جزء دیگر) به نتیجه نهایی زیر منجر خواهد شد:

$$a_n=\frac{1}{L}\left\{\sum(\frac{L}{n\pi})f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}+\sum(\frac{L}{n\pi})^2f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}-\sum(\frac{L}{n\pi})^3f''(x)\sin\frac{n\pi x}{L}-\dots\right\}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\left\{-\sum(\frac{L}{n\pi})f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum(\frac{L}{n\pi})^2f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}+\sum(\frac{L}{n\pi})^3f''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}-\dots\right\}$$

تمرین ۱-۲۰: تابع f در بازه $0<x<L$، فقط دارای یک نقطه ناپیوستگی در $c\in(0,L)$ است به قسمی که قبل از آن خطی است و بعد از آن نیزخطی می‌باشد و $f'(0^+)=f'(L-0)$. دراین‌صورت، ضرایب سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه این تابع کدام است؟(مکانیک- سراسری ۸۶)

۱) $a_n=\frac{2L}{(n\pi)^2}[f'(c-0)-f'(c+0)]$

۲) $a_n=\frac{2}{(n\pi)}[f(c-0)-f(c+0)]$

۳) $a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{L}[f(c-0)-f(c+0)]+\frac{2L}{(n\pi)^2}(\cos n\pi-1)f'(+0)$

۴) $a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{L}[f(c-0)-f(c+0)]+\frac{2L}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi c}{L}[f'(c-0)-f'(c+0)]$

حل: طبق فرضیات مساله، می‌توان تابع $f(x)$ را در بازه $0<x<L$ به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x)=\begin{cases}k_1x+k_2 & 0<x<c\\ k_3x+k_4 & c<x<L\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}k_1 & 0<x<c\\ k_3 & c<x<L\end{cases}$$

شرط $f'(+0)=f'(L-0)$، ایجاب می‌کند که $k_1=k_3$ باشد. به این ترتیب رابطه $f'(c^-)=f'(c^+)$ نیز برقرار خواهد بود. با توجه به اینکه، سری فوریه کسینوسی تابع f مورد نظر است، بنابراین باید تابع f را گسترش زوج با دوره تناوب $T=2L$ بدهیم. لذا اگر $x=c$ نقطه انفصال تابع باشد، $x=-c$ نیز یک نقطه انفصال تابع خواهد بود. مشتق تابع f نیز در نقاط $x=0$، $x=L$ ناپیوسته (دارای جهش) خواهد شد.

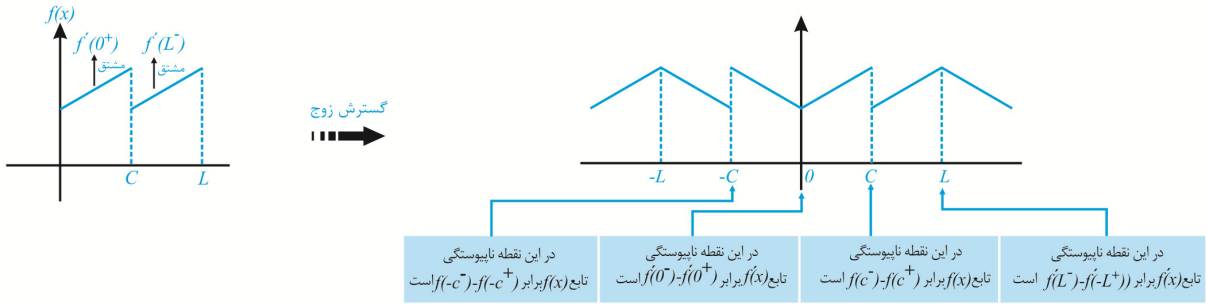
با توجه به اینکه اگر تابع $f(x)$ با گسترش زوج باشد، تابع $f'(x)$ با گسترش فرد خواهد بود،می‌توان چنین نوشت:

$$f(x^+)=f(-x^-)\quad,\quad f'(x^+)=-f'(x^-)$$

بنابراین، ناپیوستگی توابع $f(x)$ و $f'(x)$ در یک دوره تناوب به صورت زیر خواهد بود:

$$x=-c\Rightarrow\begin{cases}f(-c^-)-f(-c^+)=f(c^+)-f(c^-)\\ f'(-c^-)-f'(-c^+)=0\end{cases}\qquad x=0\Rightarrow\begin{cases}f(0^-)-f(0^+)=0\\ f'(0^-)-f'(0^+)=-2f'(0^+)=-2f'(c^+)\end{cases}$$

$$x=c\Rightarrow\begin{cases}f(c^-)-f(c^+)\\ f'(c^-)-f'(c^+)=0\end{cases}\qquad x=L\Rightarrow\begin{cases}f(L^-)-f(L^+)=0\\ f'(L^-)-f'(L^+)=2f'(L^-)=2f'(c^+)\end{cases}$$



$$a_n=\frac{1}{L}\left\{\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}+\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left\{\left(f(c^+)-f(c^-)\right)\sin\frac{n\pi(-c)}{L}+\left(f(c^-)-f(c^+)\right)\sin\frac{n\pi c}{L}\right\}+\frac{L}{(n\pi)^2}\left\{\left(-2f'(c^+)\right)\cos\frac{n\pi 0}{L}+\left(2f'(c^+)\right)\cos\frac{n\pi L}{L}\right\}$$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{L}\left[f(c^-)-f(c^+)\right]+\frac{2L}{(n\pi)^2}(\cos n\pi-1)f'(c^+) \qquad (f'(c^+)=f'(+0))$$

روش تستی: بدیهی است که مشتق تابع $f(x)$ در نقاط $x=0$ و $x=L$ ناپیوسته خواهد بود و لذا وجود عوامل $\frac{L}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi L}{L}\right]$ و $\frac{L}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi 0}{L}\right]=\frac{L}{(n\pi)^2}$ در ضریب a_n ضروری خواهد(؟) بود که فقط گزینه (۳) این ویژگی را دارد.

تمرین ۱-۲۱: سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x-[x]$ را بعد از تشخیص دوره تناوب آن بنویسید.([ ] نماد جزء صحیح است.)

(مهندسی مواد- سراسری ۸۵)

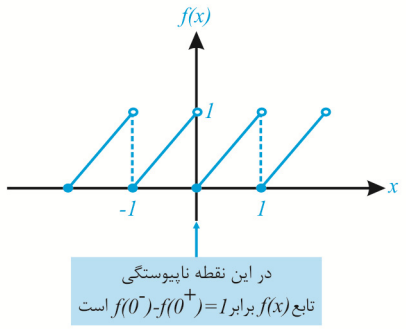
۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۲) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۳) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۴) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{(n\pi)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

حل: با رسم تابع $f(x)$ خواهیم داشت:



$$a_n=\frac{1}{L}\left\{\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\sin\frac{n\pi 0}{L}\right\}=0 \qquad (n\neq 0)$$

$$b_n=\frac{1}{L}\left\{-\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\cos\frac{n\pi 0}{L}\right\}=-\frac{1}{n\pi}(f(0^-)-f(0^+))=\frac{-1}{n\pi}$$

تمرین ۱-۲۲: سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}x(\pi+x) & -\pi\le x\le 0\\ x(\pi-x) & 0<x<\pi\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi n^3}\sin nx$

۲) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2m-1)^3}\sin(2m-1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2m-1)^3}\sin(2m-1)x$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^3}\left(\sin(nx)+\cos(nx)\right)$

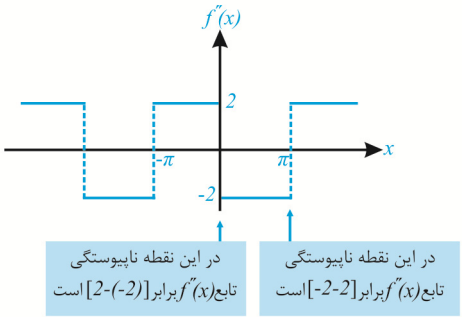
حل: با بررسی توابع $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ خواهیم داشت:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+\pi & -\pi\le x\le 0\\ \pi-2x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}2 & -\pi<x<0\\ -2 & 0<x<\pi\end{cases}$$

توابع $f(x)$ و $f'(x)$ پیوسته‌اند. اما تابع $f''(x)$ در یک دوره تناوب خود دارای دو نقطه ناپیوستگی در $x=0$ و $x=\pi$ می‌باشد.

بنابراین:



$$b_n=\frac{1}{L}\left\{\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 f''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{\pi}{n\pi}\right)^3\left[\left(2-(-2)\right)\cos\frac{n\pi 0}{\pi}+(-2-2)\cos\frac{n\pi\pi}{\pi}\right]\right\}$$

$$=\frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}=\begin{cases}0 & n=2m\\ \dfrac{8}{(2m-1)^3\pi} & n=2m-1\end{cases}$$

روش تستی: چنانچه نمودار تقریبی تابع $f(x)$ را رسم کنیم، خواهیم دید که تقارن ربع موجی فرد دارد. بنابراین در بسط فوریه مثلثاتی آن فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود خواهند داشت (گزینه‌های ۱ و ۴ نادرستاند). همچنین در مخرج ضرایب سری فوریه چنین تابعی باید عامل π با توان یک وجود داشته باشد. (؟)

نکته: اگر تابع $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد که متناوب بوده و دوره تناوب آن برابر $T=2L$ باشد و این چندجمله‌ای در بازه $(-L,L)$ تعریف شده و در این بازه پیوسته باشد، آنگاه با توجه به اینکه ناپیوستگی های تابع و مشتقات آن در $x=L$ رخ می‌دهد و $\sin\frac{n\pi L}{L}=0$ $\cos\frac{n\pi L}{L}=(-1)^n$ می‌باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n\pi}\left[\left(\frac{L}{n\pi}\right)\left(f'(L)-f'(-L)\right)-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\left(f'''(L)-f'''(-L)\right)+\dots\right]$$

$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[\left(f(L)-f(-L)\right)-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left(f''(L)-f''(-L)\right)+\dots\right]$$

در حالت خاص که تابع $f(x)$ تقارن زوج داشته باشد، تمام مشتقات مرتبه فرد آن، توابعی فرد بر حسب x بوده و لذا خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{2(-1)^n}{n\pi}\left[\left(\frac{L}{n\pi}\right)f'(L)-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 f'''(L)+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^5 f^{(5)}(L)-\dots\right]$$

همچنین در حالتی که تابع $f(x)$ تقارن فرد داشته باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[f(L)-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 f''(L)+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^4 f^{(4)}(L)-\dots\right]$$

دقت کنید که برای محاسبه a_n از مشتقات مرتبه فرد و برای محاسبه b_n از مشتقات مرتبه زوج استفاده شده است.

تمرین ۱-۲۳: در بسط تابع $f(x)=x^2$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ به سری فوریه، ضریب $\cos 8x$ کدام است؟ (مهندسی مواد- سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{-1}{16}$ ۴) $\frac{-1}{8}$

حل: در این مساله تابع $f(x)$ در بازه $(-\pi,\pi)$ زوج بوده و $L=\pi$ است. بنابراین:

$$f'(x)=2x \qquad f'''(x)=0$$

$$a_n=\frac{2(-1)^n}{n\pi}\left[\left(\frac{L}{n\pi}\right)f'(L)-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 f'''(L)+\dots\right]\Rightarrow a_8=\frac{2(-1)^8}{8\pi}\left[\left(\frac{\pi}{8\pi}\right)(2\pi)\right]=\frac{1}{16}$$

نکته: اگر تابع $f(x)$ یک چندجمله‌ای متناوب با دوره تناوب $T=2L$ باشد که در بازه $(0,2L)$ تعریف شده و در این بازه پیوسته باشد، آنگاه با توجه به اینکه ناپیوستگی‌های تابع و مشتقات آن در $x=2L$ رخ می‌دهد و $\sin\frac{n\pi(2L)}{L}=0$ و $\cos\frac{n\pi(2L)}{L}=1$ می‌باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\left[\left(\frac{L}{n\pi}\right)(f'(2L)-f'(0))-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3(f'''(2L)-f'''(0))+\dots\right]$$

$$b_n=\frac{-1}{n\pi}\left[(f(2L)-f(0))-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2(f''(2L)-f''(0))+\dots\right]$$

تذکر۶: از روش‌های قبل، فقط زمانی استفاده می‌کنیم که تابع چندجمله‌ای $f(x)$ با دوره تناوب $T=2L$، در بازه $(-L,L)$ و یا $(0,2L)$ تعریف شده باشد. در صورتی که تابع چندجمله‌ای $f(x)$ با دوره تناوب $T=2L$ در بازه $(0,L)$ تعریف شده باشد و ضرایب بسط فوریه کسینوسی و یا سینوسی نیم دامنه آن مطرح باشد، نمی‌توان از این روش استفاده کرد. البته اگر تابع مورد نظر فرد باشد و گسترش سینوسی نیم‌دامنه آن مطرح باشد و یا تابع مورد نظر زوج بوده و گسترش کسینوسی نیم‌دامنه آن مورد نظر باشد، باز هم می‌توانیم از این روش استفاده نماییم.

تمرین ۱-۲۴: سری فوریه سینوسی $f(x)=x^3$ در بازه $0<x<\pi$، برابر است با: (مهندسی هسته‌ای- سراسری ۷۷)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n\pi)^2-6}{n^3}\sin nx$

۲) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n\pi)^2-6}{n^3}\sin nx$

۳) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{(2n\pi)^2-6}{(2n)^3}\sin nx$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{(n\pi)^2-6}{(2n)^3}\sin nx$

حل: تابع چند جمله‌ای $f(x)$ در بازه $0<x<\pi$ تعریف شده است. اما با توجه به اینکه x^3 فرد بوده و سری فوریه سینوسی آن خواسته شده، باز هم می‌توان چنین نوشت:

$$L=\pi, f(x)=x^3 \quad , \quad f''(x)=6x \quad , \quad f^{(4)}(x)=0$$

$$b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[f(L)-(\frac{L}{n\pi})^2f''(L)+(\frac{L}{n\pi})^4f^{(4)}(L)-\dots\right]=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[\pi^3-(\frac{\pi}{n\pi})^2(6\pi)\right]=2(-1)^{n+1}\frac{(n\pi)^2-6}{n^3}$$

تمرین ۱-۲۵: بسط فوریه تابع $f(x)=Ax^2+Bx+C$ $(-\pi<x<\pi)$ را در آن A و B و C ضرایب ثابت‌اند، بدست آورید.

حل:

$$f(x)=Ax^2+Bx+C \quad , \quad f'(x)=2Ax+B \quad , \quad f''(x)=2A \quad , \quad f'''(x)=0$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Ax^2+Bx+C)dx=\frac{A\pi^2}{3}+C$$

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n\pi}\left[\left(\frac{L}{n\pi}\right)(f'(L)-f'(-L))\right]=\frac{(-1)^n}{n\pi}\left[(\frac{1}{n})(4A\pi)\right]=\frac{4A(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[(f(L)-f(-L))-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2(f''(L)-f''(-L))\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}[2B\pi]=\frac{2B(-1)^{n+1}}{n}$$

بنابراین:

$$Ax^2+Bx+C=\frac{A\pi^2}{3}+C+4A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+2B\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi<x<\pi)$$

تمرین ۱-۲۶: بسط فوریه تابع $f(x)=Ax^2+Bx+C$ $(0<x<2\pi)$ را که در آن A و B و C ضرایب ثابت‌اند، بدست آورید.

حل:

$$f(x)=Ax^2+Bx+C \quad , \quad f'(x)=2Ax+B \quad , \quad f''(x)=2A \quad , \quad f'''(x)=0$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(Ax^2+Bx+C)dx=\frac{4A\pi^2}{3}+B\pi+C$$

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\left[\left(f'(2L)-f'(0)\right)\left(\frac{L}{n\pi}\right)\right]=\frac{1}{n\pi}\left[(4A\pi)\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{4A}{n^2}$$

$$b_n=\frac{-1}{n\pi}\left[\left(f(2L)-f(0)\right)\right]=\frac{-1}{n\pi}\left[(4A\pi^2+2\pi B)\right]=\frac{-(4\pi A+2B)}{n}$$

بنابراین:

$$Ax^2+Bx+C=\frac{4A\pi^2}{3}+B\pi+C+4A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-(4A\pi+2B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\qquad (0<x<2\pi)$$

با توجه به مثال‌های قبل، می‌توان حاصل بعضی از سری‌های مثلثاتی را محاسبه نمود. به طور مثال برای محاسبه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ از بسط فوریه تابع چندجمله‌ای Ax^2+Bx+C در بازه $(-\pi,\pi)$ استفاده می‌کنیم. در صورتی که برای محاسبه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ از بسط فوریه تابع چندجمله‌ای Ax^2+Bx+C در بازه $-\pi<x<\pi$ استفاده می‌کنیم. در هر مورد ضرایب A و B و C به گونه‌ای انتخاب می‌شود که ضریب سری دیگر صفر گردد.

$$Ax^2+Bx+C=\frac{4A\pi^2}{3}+B\pi+C+4A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-(4A\pi+2B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\qquad (0<x<2\pi)$$

$$A=0,B=1\Rightarrow x=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$$

$$A=1,B=-2\pi\Rightarrow x^2-2\pi x=\frac{4\pi^2}{3}-2\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$$

$$Ax^2+Bx+C=\frac{A\pi^2}{3}+C+4A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+2B\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\qquad (-\pi<x<\pi)$$

$$A=0,B=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=\frac{x}{2}$$

$$A=1,B=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-\pi^2}{12}$$

به‌طور خلاصه می‌توان چنین نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}\qquad (0<x<2\pi)\qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}\qquad (0<x<2\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=\frac{x}{2}\qquad (-\pi<x<\pi)\qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-\pi^2}{12}\qquad (-\pi<x<\pi)$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{2}$ در سری اول و $x=0$ در سری‌های سوم و چهارم خواهیم داشت:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}\qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}\qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

تمرین ۱-۲۷: اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ و $0<x<2\pi$ آنگاه جواب صحیح کدام است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون – سراسری ۸۹)

۱) $f(x)=\frac{\pi+x}{2}$ ۲) $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ ۳) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ ۴) $f(x)=\frac{\pi}{2}+x$

حل: فرم سینوسی سری فوریه داده شده، ایجاب می‌کند که تابع جواب، فرد باشد. $(f(2\pi)=-f(0))$ اگر نمودار هر کدام از گزینه‌ها را در بازه $0<x<2\pi$ رسم کنیم و با دوره تناوب $T=2\pi$ گسترش دهیم، خواهیم دید که فقط گزینه ۳ تقارن فرد خواهد داشت.

روش دوم: با جایگذاری $x=\frac{\pi}{2}$ در طرفین سری فوریه داده شده، خواهیم داشت:

$$f(\frac{\pi}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

(فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.)

تمرین ۱-۲۸: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$، را با توجه به کدام گزینه می‌توان محاسبه نمود؟

۱) بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x^2$ در بازه $(-\pi,\pi)$ ۲) بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x^2$ در بازه $(0,2\pi)$

۳) بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\frac{x^2}{2}-\pi x$ در بازه $(0,2\pi)$ ۴) بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\frac{x^2}{2}-\pi x$ در بازه $(-\pi,\pi)$

حل: با توجه به مطلب گفته شده، گزینه ۳ صحیح است. (؟)

بسط فوریه توابع مثلثاتی و هیپربولیکی (نمایی)

چنانچه تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب اساسی T باشدو در شرایط دیریکله صدق کند، می‌توان آنرا برحسب یک سری فوریه مثلثاتی به شکل مقابل بیان کرد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

توابع مثلثاتی $f_1(x)=\sin\frac{2\pi nx}{T}$ و $f_2(x)=\cos\frac{2\pi nx}{T}$ با دوره تناوب اساسی T را توابع مثلثاتی پایه‌ای می‌نامند. بدیهی است که اینگونه توابع نیاز به بسط فوریه مثلثاتی ندارد. در واقع بسط فوریه مثلثاتی اینگونه توابع منطبق بر خودشان است. به طور مثال چنانچه $T=2\pi$ باشد، توابع مثلثاتی به شکل $\sin nx$ و $\cos nx$ (با دوره تناوب اساسی $T=2\pi$) پایه‌ای خواهند بود و نمودار کامل آنها به صورت یک شکل موج سینوسی یا کسینوسی خواهد بود.

توابع مثلثاتی $\sin nx$ و $\cos nx$ با دوره تناوب اساسی T را که منطبق با هیچکدام از پایه‌های $\sin\frac{2\pi nx}{T}$ و $\cos\frac{2\pi nx}{T}$ نباشند، توابع مثلثاتی غیر پایه‌ای می‌نامند. به طور مثال تابع $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ با دوره تناوب پایه‌ای $T=2\pi$ غیر پایه‌ای است، زیرا وقتی $T=2\pi$ باشد، پایه‌های مثلثاتی به صورت $\sin\frac{2\pi nx}{2\pi}=\sin nx$ و $\cos\frac{2\pi nx}{2\pi}=\cos nx$ خواهند بود که هیچکدام برابر $\sin\frac{x}{2}$ نمی‌باشند. (n عدد طبیعی است) نمودار کامل یک تابع مثلثاتی غیر پایه‌ای از فرم نوسانات کامل یک شکل موج سینوسی خارج می‌شود.

فرض کنید، می‌خواهیم ضرایب سری فوریه تابع مثلثاتی غیرپایه‌ای $f(x)=\sin mx$ $(-L<x<L)$ با دوره تناوب $T=2L$ را به‌دست آوریم.

برای محاسبه ضریب a_n خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

اگر $I=\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ باشد، برای محاسبه I از فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء به روش بازگشتی، استفاده می‌کنیم.

$$I=\int_{-L}^{L}\sin mx\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\left\{\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}_{-L}^{L}+m^2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$I=\left\{\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}_{-L}^{L}+m^2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2I$$

$$I\left(1-m^2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\right)=\left\{\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}_{-L}^{L} \Rightarrow I=\frac{\left\{\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}_{-L}^{L}}{1-m^2(\frac{L}{n\pi})^2}$$

بنابراین با توجه به جهش‌های تابع و مشتق آن، در نهایت می‌توان چنین نوشت:

$$a_n=\frac{\frac{1}{L}\left\{\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}+\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}}{1-m^2(\frac{L}{n\pi})^2}$$

$$b_n=\frac{\frac{1}{L}\left\{-\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}}{1-m^2(\frac{L}{n\pi})^2}$$

صورت کسر ضرایب a_n و b_n همان رابطه جزء به جزء می‌باشد، (از یک جزء مشتق و از جزء دیگر انتگرال می‌گیریم.)

در مخرج کسر این ضرایب نیز، به دلیل بازگشتی بودن انتگرال آنها، عبارت $1-m^2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2$ ایجاد می‌شود.

همچنین در محاسبه ضرایب سری فوریه توابع نمایی $e^{\pm mx}$ و $\sinh mx$ و $\cosh mx$ با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء به‌جزء عبارتی مشابه روابط قبل به‌دست می‌آید، بااین تفاوت که در این حالت، درمخرج ضرایب a_n و b_n عبارت $1+m^2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2$ ایجاد می‌شود. (؟)

تمرین ۱-۲۹: دوره تناوب و ضریب a_n در بسط فوریه $f(x)=|\sin \pi x|$ کدامند؟ (برق- سراسری ۷۸)

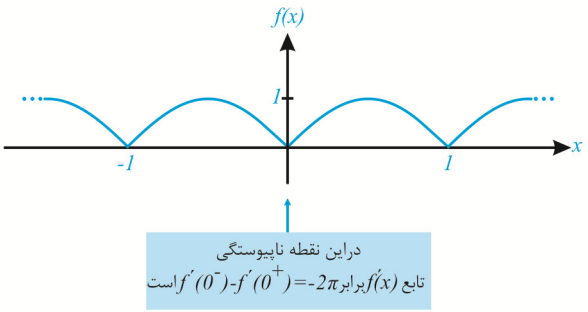
۱) تناوب ۱ و $a_n=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$

۲) تناوب π و $a_n=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$

۳) تناوب π و $a_n=\frac{\pi}{4n^2-1}$

۴) تناوب ۱ و $a_n=\frac{\pi}{4n^2-1}$

حل: با رسم تابع $f(x)$ خواهیم داشت: $(m=\pi \quad , \quad L=\frac{1}{2})$



$$a_n=\frac{\frac{1}{L}\left\{\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}}{1-m^2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2}$$

$$=\frac{2(\frac{1}{2n\pi})^2(-2\pi)\cos 2\pi n(0)}{1-\frac{1}{4n^2}}=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

با توجه به شکل، دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر $T=1$ می باشد. همچنین تابع $f(x)$ پیوسته بوده و در نقطه $x=0$ مشتق آن دارای ناپیوستگی خواهد بود. (نقطه بازگشت) مقدار ناپیوستگی مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(0^-)-f'(0^+)=-2f'(0^+)=-2[\pi\cos\pi 0]=-2\pi$$

روش تستی: دوره تناوب $f(x)=|\sin \pi x|$ برابر $T=\frac{\pi}{\pi}=1$ می‌باشد. (گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست‌اند) همچنین در $x=0$ کمترین مقدار تابع متناوب $f(x)$ اتفاق می‌افتد، و لذا لازم است که ضریب اولین هارمونیک کسینوسی منفی باشد. (به ازای $n=1$) که فقط گزینه (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

تمرین ۱-۳۰: سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases} e^{x} & 0<x<L \\ 0 & x=0 \\ e^{-x} & -L<x<0 \end{cases}$ کدام است؟ (مکانیک- سراسری ۸۶)

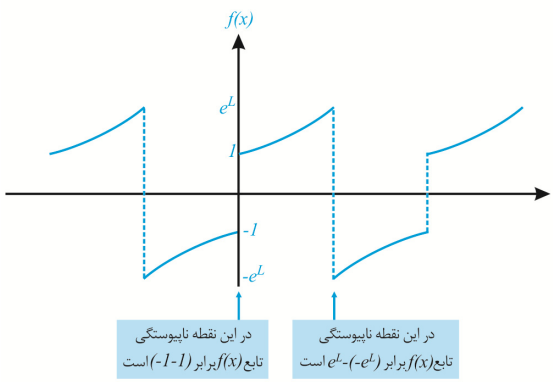
۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{(1-e^{L}\cos n\pi)}{1+(\frac{L}{n\pi})^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{(1+e^{L}\cos n\pi)}{1+(\frac{L}{n\pi})^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۳) $\frac{1}{L}(e^{L}-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{(1-e^{L}\cos n\pi)}{1+(\frac{L}{n\pi})^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{(n\pi)^{2}}\frac{1}{1+(\frac{L}{n\pi})^{2}}\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1-e^{L}\cos n\pi}{1+(\frac{L}{n\pi})^{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

حل: با رسم نمودار تابع $f(x)$ خواهیم داشت:



$$b_n=\frac{\frac{1}{L}\left\{-\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}}{1+m^{2}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}\qquad (m=1)$$

$$b_n=\frac{\frac{1}{L}\left\{-\left(\frac{L}{n\pi}\right)\left[(-1-(1))\cos\frac{n\pi 0}{L}+\left(e^{L}-(-e^{L})\right)\cos\frac{n\pi L}{L}\right\}}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\frac{(1-e^{L}\cos n\pi)}{1+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2}}$$

روش تستی: بدیهی است که تابع $f(x)$ تقارن فرد دارد. بنابراین فاقد مقدار ثابت و جملات کسینوسی خواهد بود. (گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست‌اند.) همچنین جهش‌های تابع $f(x)$ در نقاط $x=0$ و $x=L$ دارای علامت‌های مختلف می‌باشند،(؟) و لذا فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

تمرین ۱-۳۱: سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $0\le x\le\pi$ $f(x)=1+\cos\frac{x}{2}$ کدام است؟ (مهندسی مواد – سراسری ۸۵)

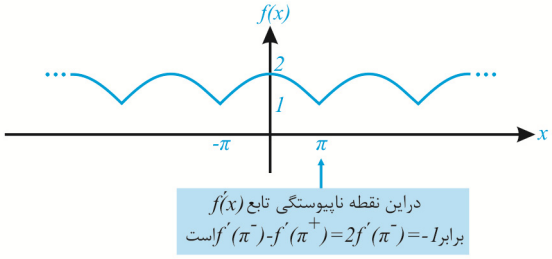
۱) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{2}-\frac{1}{4}}\cos nx$

۲) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}-\frac{1}{4}}\cos nx$

۳) $2+\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{2}-\frac{1}{4}}\cos nx$

۴) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m(2m-1)}\cos(\frac{2m-1}{2}x)$

حل: با رسم تابع $f(x)$ در بازه $0\le x\le\pi$ و گسترش زوج آن با دوره تناوب $T=2\pi$ نمودار زیر حاصل می‌گردد: $(m=\frac{1}{2},L=\pi)$



$$a_n=\frac{\frac{1}{L}\left\{\sum(\frac{L}{n\pi})^{2}f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}}{1-m^{2}(\frac{L}{n\pi})^{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n^{2}\pi}(-1)\cos n\pi}{1-\frac{1}{4}(\frac{1}{n})^{2}}=\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{2}-\frac{1}{4}}$$

مقدار متوسط تابع نمی‌تواند از ماکزیمم تابع در یک دوره تناوب بیشتر باشد. (گزینه ۳ نادرست است.)

روش تستی: گزینه ۴ نمی‌تواند بیانگر سری فوریه تابع مثلثاتی غیر پایه‌ای باشد. (؟) همچنین مقدار متوسط بسط فوریه مثلثاتی هر تابع، نمی‌تواند بیشتر از مقدار ماکزیمم تابع باشد. (گزینه ۳ نادرست) با توجه به اینکه در $x=0$ بیشترین مقدار تابع $f(x)$ اتفاق می‌افتد، لازم است، ضریب اولین هارمونیک کسینوسی مثبت باشد. (به ازای $n=1$) که فقط گزینه (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

تمرین ۱-۳۲: بسط کسینوسی تابع $\sin nx$ در محدوده $0<x<\frac{\pi}{2}$ به کدام صورت زیر است؟ (مکانیک – سراسری ۸۵)

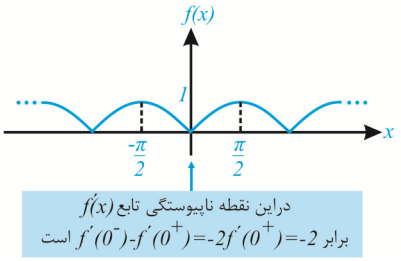
۱) $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}\cos(nx)$

۲) $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{4}{\pi}n}{4n^2-1}\cos(2nx)$

۳) $\sin x=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}\cos(2nx)$

۴) تابع، دارای بسط مذکور نمی‌باشد، چون تابع فرد و بسط زوج است.

حل: با رسم تابع $f(x)$ دربازه $0<x<\frac{\pi}{2}$ و گسترش زوج آن (زیرا بسط کسینوسی آن مورد نظر است) با دوره تناوب $T=\pi$ نمودار زیر حاصل می‌گردد:



$$a_n=\frac{\frac{1}{L}\left\{\sum(\frac{L}{n\pi})^2 f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}}{1-m^2(\frac{L}{n\pi})^2}\xrightarrow{m=1,L=\frac{\pi}{2}}a_n=\frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}$$

روش تستی: بدیهی است که مقدار متوسط تابع متناوب حاصل غیر صفر است، که فقط گزینه (۳) این ویژگی را دارد.

بیشتر بدانیم:

تمرین ۱-۳۳: با توجه به رابطه $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\begin{cases}k & 0<x<L\\ -k & -L<x<0\end{cases}$ مقدار b_n برابر کدام گزینه می‌باشد؟

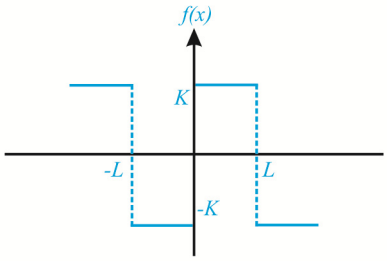
۱) $\frac{2k\cos n\pi}{n\pi}$

۲) $\frac{2k(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2}$

۳) $\frac{2k\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$

۴) $\frac{2k(1-\sin\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi^2}$

حل: رابطه داده شده، بیانگر بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}k & 0<x<L\\ -k & -L<x<0\end{cases}$ با دوره تناوب $T=2L$ می‌باشد. با رسم شکل تابع $f(x)$ خواهیم داشت:



$$b_n=\frac{1}{L}\left\{-\sum(\frac{L}{n\pi})f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$$
$$=\frac{1}{L}\left\{-(\frac{L}{n\pi})\left[(-k-k)\cos\frac{n\pi 0}{L}+(k-(-k))\cos\frac{n\pi L}{L}\right]\right\}$$
$$=\frac{2k(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

تابع پله‌ای شکل متناوبی را که بازه تعریف دامنه‌های مختلف آن، یکسان باشد، تابع پله‌ای شکل متقارن می‌نامیم. در بسط فوریه تابع پله‌ای شکل متقارن فرد (با دوره تناوب $2L$) فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی به صورت $(m=0,1,2,3,...)$ $\sin\frac{(2m+1)\pi x}{L}$ وجود دارد. درجه همگرایی ضرایب سری فوریه چنین تابعی برابر یک بوده و همگی هارمونیک‌ها هم علامت می‌باشند.

تمرین ۱-۳٤: ضرایب سری فوریه تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}-۲ & -\pi<x<۰\\ ۲ & ۰<x<\pi\end{cases}$ و $f(x+۲\pi)=f(x)$ کدامند؟(هوا و فضا – سراسری ۸۷)

۱) $a_n=b_n=\frac{۸}{n\pi}$ به ازای هر n

۲) $a_n=۰, b_n=\frac{۸}{n\pi}$ به ازای هر n

۳) $a_n=\frac{۲n}{\pi}, b_n=۰$ به ازای هر n

۴) $a_n=۰$ به ازای هر $n\geq ۰$ و $b_n=\begin{cases}\frac{۸}{n\pi} & n \text{ فرد}\\ ۰ & n \text{ زوج}\end{cases}$

حل: تابع پله‌ای متقارن فرد، فقط شامل هارمونیک‌های فرد سینوسی می‌باشد. بنابراین، گزینه (۴) صحیح است.

تمرین ۱-۳۵: با توجه به رابطه $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}=\begin{cases}k & ۰\leq x<\frac{L}{۲}\\ ۰ & \frac{L}{۲}<x<L\end{cases}$ **مقدار** a_n $(n\geq ۱)$ **برابر کدام گزینه می‌باشد؟**

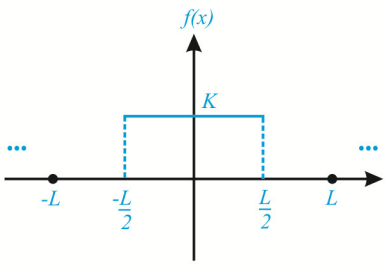
۱) $\frac{۲k\sin\frac{n\pi}{۲}}{n\pi}$

۲) $\frac{۲k\cos n\pi}{n\pi}$

۳) $\frac{۲k\sin\frac{n\pi}{۲}}{n^۲\pi^۲}$

۴) $\frac{۲k\cos n\pi}{n^۲\pi^۲}$

حل: رابطه داده شده، بیانگر بسط فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}k & ۰\leq x<\frac{L}{۲}\\ ۰ & \frac{L}{۲}<x<L\end{cases}$ با دوره تناوب $T=۲L$ می‌باشد. بنابراین لازم است تابع $f(x)$ را گسترش زوج دهیم و آنرا با دوره تناوب $T=۲L$ تکرار نماییم. در این صورت خواهیم داشت:



$$a_n=\frac{۱}{L}\left\{\left(\frac{L}{n\pi}\right)\left[(۰-k)\sin\frac{n\pi(-\frac{L}{۲})}{L}+(k-۰)\sin\frac{n\pi(\frac{L}{۲})}{L}\right]\right\}$$

$$=\frac{۲k\sin\frac{n\pi}{۲}}{n\pi}=\begin{cases}۰ & n=۲m\\ \frac{۲k(-۱)^m}{(۲m+۱)\pi} & n=۲m+۱\end{cases}$$

در بسط فوریه تابع پله‌ای شکل متقارن زوج، (با دوره تناوب $T=۲L$) فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی به صورت $\cos\frac{(۲m+۱)\pi x}{L}$ $(m=۰,۱,۲,۳,...)$ وجود دارند. درجه همگرایی ضرایب سری فوریه چنین تابعی برابر یک بوده و هارمونیک‌ها یک در میان تغییر علامت می‌دهند. اگر در $x=۰$ ماکزیمم تابع متناوب رخ دهد، لازم است ضریب اولین هارمونیک کسینوسی مثبت باشد. چنانچه در $x=۰$ مینیمم تابع متناوب رخ دهد، ضریب اولین هارمونیک کسینوسی منفی خواهد بود.

تمرین ۱-۳٦: سری فوریه تابع دوره‌ای $f(t)$ **با دوره** $T=۴$ **و** $f(t)=\begin{cases}۲ & -۱<t<۱\\ ۰ & ۱<t<۳\end{cases}$ **کدام است؟** (برق – سراسری ۸۱)

۱) $۱+\frac{۴}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{۲}t+\frac{۱}{۳}\sin\frac{۳\pi}{۲}t+...\right]$

۲) $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}\left[\cos\pi t-\frac{۱}{۳}\cos ۳\pi t+...\right]$

۳) $۱+\frac{۴}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{۲}t+\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi}{۲}t+...\right]$

۴) $۱+\frac{۴}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۳}\sin\frac{۳\pi}{۲}t+...\right]$

حل: در بسط فوریه مثلثاتی تابع پله‌ای شکل متقارن زوج، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارند که یک در میان تغییر علامت می‌دهند.

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تمرین ۱-۳۷: سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ -1 & 1<x<2\end{cases}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای – سراسری ۸۵)

۱) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m-1}}{m\pi}\cos(m\pi x)$

۲) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{m-1}}{m\pi}\cos(m\pi x)$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

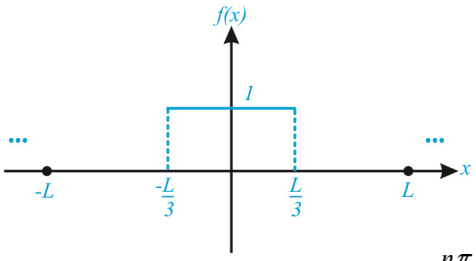
۴) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

حل: باتوجه به اینکه بسط فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)$ مورد نظر است، بنابراین لازم است که تابع $f(x)$ را با گسترش زوج (با دوره تناوب $T=4$) در نظر بگیریم. از طرفی در بسط فوریه یک تابع پله‌ای متقارن زوج، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی، وجود دارند. (گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست‌اند). با توجه به اینکه در $x=0$ ماکزیمم تابع متناوب رخ می‌دهد، بنابراین لازم است که ضریب اولین هارمونیک کسینوسی (به ازای $m=1$) مثبت باشد. (گزینه ۳ نادرست است)

تمرین ۱-۳۸: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n}$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

حل: عبارت $\frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n\pi}$ را می‌توان، ضریب بسط فوریه کسینوسی (؟) تابع پله‌ای شکل نامتقارن $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{L}{3}\\ 0 & \frac{L}{3}<x<L\end{cases}$، با دوره تناوب $T=2L$ در نظر گرفت.



$$a_0=\frac{2(\frac{L}{3})}{2L}=\frac{1}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\{(\frac{L}{n\pi})[(0-1)\sin\frac{n\pi(-\frac{L}{3})}{L}+(1-0)\sin\frac{n\pi(\frac{L}{3})}{L}]\}=\frac{2\sin(\frac{n\pi}{3})}{n\pi}$$

بنابراین:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(\frac{n\pi}{3})}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

با توجه به اینکه، $x=0$ نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ می‌باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$f(0)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(\frac{n\pi}{3})}{n\pi}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n}=\frac{\pi}{3}$$

در حالت کلی، می‌توان چنین نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}\qquad(0<\alpha<\pi)$$

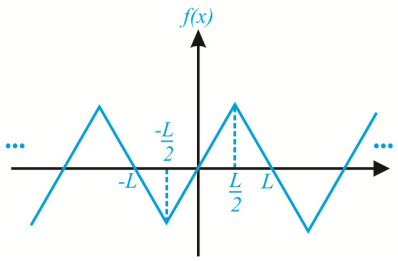
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}=\frac{\pi-\alpha}{2}\qquad(0<\alpha<\pi)$$

تمرین ۱-۳۹: با توجه به رابطه $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\begin{cases}x & 0<x<\frac{L}{2}\\ L-x & \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$ مقدار b_n برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\frac{4\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$ ۲) $\frac{4L\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}$ ۳) $\frac{4\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}$ ۴) $\frac{4L\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$

حل: رابطه داده شده، بیانگر بسط فوریه سینوسی نیم دامنه‌ای تابع $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{L}{2} \\ L-x & \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$ با دوره تناوب $T=2L$ می‌باشد.

بنابراین تابع $f(x)$ را گسترش متناوب فرد (با دوره تناوب $T=2L$) می‌دهیم.



$$b_n=\frac{1}{L}\left\{\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

$$=\frac{L}{(n\pi)^2}\left\{(-1-1)\sin\frac{n\pi(-\frac{L}{2})}{L}+(1-(-1))\sin\frac{n\pi(\frac{L}{2})}{L}\right\}$$

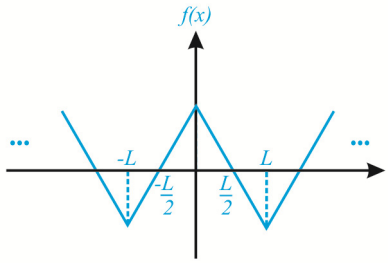
$$=\frac{4L\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}=\begin{cases} 0 & n=2m \\ \frac{4L(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2} & n=2m+1 \end{cases}$$

در بسط فوریه تابع شیب متقارن فرد (با دوره تناوب $T=2L$) (یعنی تابع متناوب درجه اولی که نمودار آن در یک دوره تناوب آن، شبیه مثلث متساوی‌الساقین گردد) فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی به شکل $(m=0,1,2,3,...)$ $\sin\frac{(2m+1)\pi x}{L}$ وجود دارند که درجه همگرایی ضرایب سری فوریه آن برابر ۲ بوده و هارمونیک‌ها یک در میان تغییر علامت می‌دهند.

تمرین ۱-۴۰: با توجه به رابطه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}=\begin{cases} \frac{L}{2}-x & 0<x<L \\ \frac{L}{2}+x & -L<x<0 \end{cases}$ مقدار a_n برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\frac{4L\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$ ۲) $\frac{2L(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2}$ ۳) $\frac{4L\cos n\pi}{n^2\pi^2}$ ۴) $\frac{4L\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$

حل: با رسم تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{L}{2}-x & 0<x<L \\ \frac{L}{2}+x & -L<x<0 \end{cases}$ و گسترش آن با دوره تناوب $T=2L$ خواهیم داشت:



$$a_n=\frac{1}{L}\left\{\sum\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

$$=\frac{L}{n^2\pi^2}\left\{(1-(-1))\cos\frac{n\pi 0}{L}+(-1-1)\cos\frac{n\pi L}{L}\right\}$$

$$=\frac{2L}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)=\begin{cases} 0 & n=2m \\ \frac{4L}{(2m+1)^2\pi^2} & n=2m+1 \end{cases}$$

در بسط فوریه تابع شیب متقارن زوج، (با دوره تناوب $T=2L$) فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی به شکل $(m=0,1,2,...)$ $\cos\frac{(2m+1)\pi x}{L}$ وجود دارند که درجه همگرائی ضرایب سری فوریه آن برابر ۲ بوده و همگی هارمونیک‌ها، هم علامت می‌باشند. اگر در $x=0$ ماکزیمم تابع متناوب رخ دهد، ضریب اولین هارمونیک کسینوسی مثبت خواهد بود. در غیر این صورت اگر در $x=0$ مینیمم تابع متناوب رخ دهد ضریب اولین هارمونیک کسینوسی منفی خواهد بود.

تمرین ۱-۴۱: سری فوریه تابع متناوب $f(x)=|x|$ و $-\pi<x<\pi$ با دوره تناوب 2π کدام است؟ (هوا و فضا – سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

۲) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

۳) $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{2m+1}$

۴) $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

حل: تابع $f(x)$، شیب متقارن زوج می‌باشد. بنابراین فقط شامل هارمونیک‌های فرد کسینوسی خواهد بود که همه هارمونیک‌ها هم علامت بوده و درجه همگرائی ضرایب سری فوریه آن برابر ۲ است. بنابراین، گزینه ۲ صحیح می باشد.

تمرین ۱-۴۲: در سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le L\\ 2L-x & L\le x\le 2L\end{cases}$ با دوره تناوب $2L$، یعنی:

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$ داریم: (برق – سراسری ۸۳ ، مواد – سراسری ۸۴)

۱) $a_k=0$ که در آن $k=0,1,2,3,4,\ldots$

۲) $a_{2k}=0$ و $b_n=0$ به ازای $k,n\in N$

۳) $a_{2k-1}=0$ و $b_n=0$ به ازای $k,n\in N$

۴) $b_n=0$ و $a_k\neq 0$ به ازای هر $n\in N$ و هر $k=0,1,2,\ldots$

حل: در تابع شیب متقارن زوج، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارند. به عبارت دیگر $b_n=0$ و $a_{2k}=0$.

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تمرین ۱-۴۳: سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x & -\pi\le x\le 0\\ \frac{\pi}{2}-x & 0\le x<\pi\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (مکانیک – سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{n+1}\cos nx$

۲) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^{n+1}+1\right]\cos nx$

۳) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx$

۴) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\sin nx+(-1)^n\cos nx\right]$

حل: با رسم تابع $f(x)$ خواهیم دید که این تابع زوج بوده و به شکل مثلث متساوی‌الساقین (شیب متقارن) است. بنابراین در بسط فوریه آن فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارد. بنابراین، گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تمرین ۱-۴۴: با توجه به رابطه $(0<x<L)$ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\sinh mx$ مقدار b_n کدام است؟

۱) $\frac{(2n\pi\sinh mL)\cos n\pi}{n^2\pi^2-m^2L^2}$

۲) $\frac{(2n\pi\sinh mL)\cos n\pi}{m^2L^2-n^2\pi^2}$

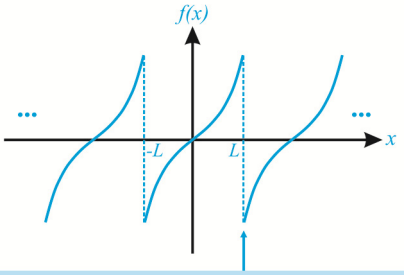
۳) $\frac{(2n\pi\sinh mL)\cos n\pi}{n^2\pi^2+m^2L^2}$

۴) $\frac{(-2n\pi\sinh mL)\cos n\pi}{n^2\pi^2+m^2L^2}$

حل: رابطه داده شده بیانگر بسط نیم دامنه‌ای سینوسی تابع $(0<x<L)$ $f(x)=\sinh mx$ می‌باشد. بنابراین با گسترش متناوب فرد تابع $f(x)$ با دوره تناوب $T=2L$ خواهیم داشت:

$$b_n=\frac{\frac{1}{L}\left\{-\sum(\frac{L}{n\pi})f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}}{1+m^2(\frac{L}{n\pi})^2}$$

$$=\frac{-(\frac{1}{n\pi})\left[(\sinh mL-(-\sinh mL))\cos\frac{n\pi x}{L}\right]}{1+m^2(\frac{L}{n\pi})^2}=\frac{(-2n\pi\sinh mL)\cos n\pi}{n^2\pi^2+m^2L^2}$$



در این نقطه ناپیوستگی تابع $f(x)$ برابر است با: $f(L^-)-f(L^+)=SinhmL-(-SinhmL)=2SinhmL$

تمرین ۱-۴۵: حاصل سری عددی $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)(-1)^k}{(2k+1)^2+m^2}$ (m عدد ثابتی است) برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\frac{\pi}{2\sinh(\frac{m\pi}{2})}$ ۲) $\frac{\pi}{4\cosh(m\pi)}$ ۳) $\frac{\pi}{4\cosh(\frac{m\pi}{2})}$ ۴) $\frac{\pi}{2\sinh(m\pi)}$

حل: عبارت $\frac{n}{n^2+m^2}$، تابعی فرد برحسب n بوده و در مخرج آن عامل n^2+m^2 وجود دارد. بنابراین، می‌توان آن را به عنوان ضریب سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=\sinh mx$ $(-\pi<x<\pi)$ با دوره تناوب $T=2\pi$ در نظر گرفت. (؟)

با توجه به راه حل تست قبل، می‌توان چنین نوشت:

$$b_n=\frac{(-2n\pi)(\sinh m\pi)\cos n\pi}{\pi^2(n^2+m^2)}=\frac{2n(\sinh m\pi)(-1)^{n-1}}{\pi(n^2+m^2)}$$

بنابراین:

$$f(x)=\sinh mx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(\sinh m\pi)(-1)^{n-1}}{\pi(n^2+m^2)}\sin nx \qquad (-\pi<x<\pi)$$

نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{2}$، نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ می‌باشد. بنابراین می‌توان چنین نوشت:

$$f(\frac{\pi}{2})=\sinh(\frac{m\pi}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(\sinh m\pi)(-1)^{n-1}}{\pi(n^2+m^2)}\sin\frac{n\pi}{2}$$

با توجه به رابطه $\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & n=2k\\ (-1)^k & n=2k+1\end{cases}$ خواهیم داشت:

$$\sinh(\frac{m\pi}{2})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(2k+1)(\sinh m\pi)(-1)^k}{\pi[(2k+1)^2+m^2]}$$

با ساده کردن رابطه فوق، می‌توان چنین نوشت:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)(-1)^k}{(2k+1)^2+m^2}=\frac{\pi\sinh(\frac{m\pi}{2})}{2\sinh(m\pi)}=\frac{\pi}{4\cosh(\frac{m\pi}{2})}$$

تمرین ۱-۴۶: با توجه به رابطه $(0<x<L)$ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}=e^{mx}$ مقدار a_n $(n\geq 1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2mL(1-e^{mL}\cos n\pi)}{n^2\pi^2+m^2L^2}$ ۲) $\frac{2mL(1-e^{mL}\cos n\pi)}{n^2\pi^2-m^2L^2}$

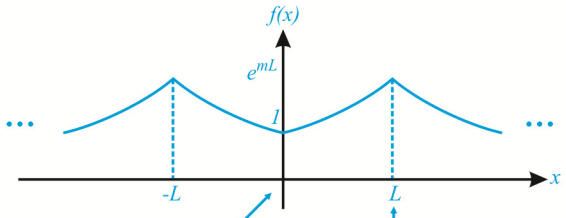
۳) $\frac{2mL(1+e^{mL}\cos n\pi)}{n^2\pi^2+m^2L^2}$ ۴) $\frac{2mL(e^{mL}\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2+m^2L^2}$

حل: رابطه داده شده بیانگر بسط نیم دامنه‌ای کسینوسی تابع $f(x)=e^{mx}$ $(0<x<L)$ با دوره تناوب $T=2L$ می‌باشد. بنابراین با گسترش متناوب زوج تابع $f(x)$ با دوره تناوب $T=2L$ خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{\frac{1}{L}\left\{\sum(\frac{L}{n\pi})^2 f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}}{1+m^2(\frac{L}{n\pi})^2}$$

$$=\frac{(\frac{L}{n^2\pi^2})\left[(-m-m)\cos\frac{n\pi 0}{L}+(me^{mL}-(-me^{mL}))\cos\frac{n\pi L}{L}\right]}{1+m^2(\frac{L}{n\pi})^2}$$

$$=\frac{2mL(e^{mL}\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2+m^2L^2}$$



دراین نقطه ناپیوستگی تابع $f'(x)$ برابر $f'(L^-)-f'(L^+)=me^{mL}-(-me^{mL})=2me^{mL}$ می باشد.

دراین نقطه ناپیوستگی تابع $f'(x)$ برابر $f'(0^-)-f'(0^+)=-m-m=-2m$ می باشد.

هرگاه توابع نمایی به شکل e^{mx} و e^{-mx} و $\sinh mx$ و $\cosh mx$ در بازه $0<x<L$ تعریف شده باشند و این توابع را گسترش فرد یا زوج داده باشیم، به طوریکه دوره تناوب نمودار حاصل برابر $T=2L$ گردد، در مخرج ضرایب سری فوریه آنها عامل $(n^2\pi^2+m^2L^2)$ وجود خواهد داشت.

با توجه به اینکه ضریب a_n تابعی زوج بر حسب n و ضریب b_n تابعی فرد بر حسب n می‌باشد، بنابراین انتظار داریم که در صورت کسر ضریب a_n، تابعی زوج از n و در صورت کسر ضریب b_n، تابعی فرد از n وجود داشته باشد.

$$a_n=\frac{(n\ \text{تابعی زوج برحسب})}{n^2\pi^2+m^2L^2} \quad \text{و} \quad b_n=\frac{(n\ \text{تابعی فرد برحسب})}{n^2\pi^2+m^2L^2}$$

هرگاه توابع مثلثاتی به شکل $\sin mx$ و $\cos mx$ در بازه $0<x<L$ تعریف شده باشند و این توابع را گسترش زوج یا فرد داده باشیم، به طوریکه دوره تناوب نمودار حاصل برابر $T=2L$ گردد و تابع مثلثاتی حاصل غیر پایه‌ای باشد، آنگاه در مخرج ضرایب سری فوریه آنها، عامل $(n^2\pi^2-m^2L^2)$ وجود خواهد داشت.

$$a_n=\frac{(n\ \text{تابعی زوج برحسب})}{n^2\pi^2-m^2L^2} \quad \text{و} \quad b_n=\frac{(n\ \text{تابعی فرد برحسب})}{n^2\pi^2-m^2L^2}$$

هرگاه تابع $e^{\pm ax}\sin bx$ و یا $e^{\pm ax}\cos bx$ در بازه $(0,\pi)$ تعریف شده باشد و این تابع را گسترش زوج یا فرد داده باشیم، به‌طوریکه دوره تناوب حاصل برابر $T=2\pi$ گردد. آنگاه، در مخرج ضرایب سری فوریه چنین توابعی عامل (n^4+c^4) وجود خواهد داشت که در آن $c=\sqrt{a^2+b^2}$ می‌باشد.

$$a_n=\frac{(n\ \text{تابعی زوج برحسب})}{n^4+c^4} \quad \text{و} \quad b_n=\frac{(n\ \text{تابعی فرد برحسب})}{n^4+c^4}$$

C- خواص ضرایب سری فوریه مثلثاتی

در حالتی که سری فوریه یک تابع را داده باشند و خود تابع، نامشخص باشد، می‌توان از روی ضرایب سری فوریه داده شده، اطلاعاتی در موردتابع متناظر با آن (در صورت وجود) بدست آورد.

اگر تابع $f(x)$، یک تابع مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد و a_n و b_n ضرایب سری فوریه آن باشند، در آن صورت سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ همگرا خواهند بود.

تمرین ۱-۴۷: سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{Lnn}$، سری فوریه کدام تابع است؟ (مهندسی هوا و فضا – سراسری ۷۶)

۱) $\frac{x}{Lnx}$ ۲) e^x ۳) Lnx ۴) هیچ تابعی

حل: می‌دانیم که اگر ضرایب b_n مثبت بوده و به طور غیر افزایشی به سمت صفر میل کند $(\lim_{n\to\infty} b_n=0)$، آنگاه $\sum_{n=2}^{\infty}b_n\sin nx$ همگرا خواهدبود. بنابراین $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{Lnn}$ به ازای کلیه مقادیر x، همگرا می‌باشد. از طرف دیگر، اگر سری $\sum_{n=2}^{\infty}b_n\sin nx$، مربوط به سری فوریه یک تابع مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، لازم است که $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ همگرا باشد. از آن جا که سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn}$ واگرا است در نتیجه، $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{Lnn}$ نمی‌تواند، سری فوریه هیچ تابعی باشد. (یادآوری: در بررسی همگرائی سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}$ از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم: $\int_2^{\infty}\frac{1}{xLnx}dx=Ln(Lnx)\Big|_2^{\infty}=\infty$)

در سری مثلثاتی $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ اگر ضرایب a_n، b_n در رابطه زیر صدق کنند:

$$\lim_{n\to\infty}\left|n^m a_n\right|\le M \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left|n^m b_n\right|\le M \qquad (m\ge 2)$$

آنگاه، مجموع سری فوق، معرف یک تابع پیوسته متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشد که $m-2$ مشتق اول آن پیوسته بوده و با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوق بدست می‌آید.

همچنین اگر a_n و b_n ضرایب سری فوریه یک تابع متناوب و انتگرال‌پذیر باشند آنگاه:

$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}|b_n|=0\\ \lim_{n\to\infty}|na_n|\le M \quad , \quad \lim_{n\to\infty}|nb_n|\le M\end{cases}$$

(دنباله‌های $\{na_n\},\{nb_n\}$ کراندارند.)

تمرین ۱-۴۸: کدام سری، سری فوریه تابعی انتگرال‌پذیر و متناوب با دوره تناوب 2π است؟ (مهندسی هوا و فضا – سراسری ۸۴)

۱) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(Lnn)\cos nx$ ۴) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n-1)x}{\sqrt{n}}$

حل: شرط کراندار بودن حدود $\lim_{n\to\infty}na_n$ و $\lim_{n\to\infty}nb_n$ ایجاب می‌کند، که گزینه (۲) صحیح باشد، زیرا:

$\lim_{n\to\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}=(-1)^{n-1}$ (کراندار) $\lim_{n\to\infty}n(Lnn)=\infty$ (غیر کراندار) $\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{\sqrt{n}}=\infty$ (غیر کراندار)

اگر تابع $f(x)$ در یک دوره تناوب خود، دارای تعداد نامحدودی نقاط ناپیوستگی باشد، درجه همگرایی ضرایب سری فوریه مثلثاتی آن، حداقل ۱ خواهد بود. همچنین اگر تابع $f(x)$ و مشتقات تا مرتبه $(m-1)$ام آن پیوسته بوده و اولین ناپیوستگی (جهش) در مشتق مرتبه mام تابع $f(x)$ رخ دهد، آنگاه درجه همگرائی ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$، حداقل از درجه $m+1$ خواهد بود.

تمرین ۱-۴۹: در بسط تابع پریودیک $f(x)$ به سری فوریه، ضرایب a_n و b_n با روابط زیر بدست آمده است. (برق- سراسری ۷۵)

$$a_n=\frac{2(1-e^{-1})}{1+4n^2\pi^2} \qquad (n\ne 0) \qquad b_n=\frac{4\pi n(1-e^{-1})}{1+4\pi^2n^2}$$

۱) تابع $f(x)$ و مشتقات مرتبه اول و دوم آن پیوسته بوده ولی مشتقات مرتبه‌های بالاتر ناپیوسته می‌باشند.

۲) عبارات داده شده برای a_n و b_n نمی‌توانند بیانگر ضرایب فوریه برای تابع پریودیک باشند.

۳) تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در پریودیک اصلی خود می‌باشد.

۴) ضرایب فوریه به تنهایی نمی‌توانند پیوسته یا ناپیوسته بودن تابع پریودیک را مشخص نمایند.

حل: درجه همگرایی ضریب a_n برابر ۲ (درجه مخرج ۲ واحد بیشتر از درجه صورت است) و درجه همگرایی ضریب b_n برابر ۱ (درجه مخرج ۱ واحد بیشتر از درجه صورت است) می‌باشد. بنابراین حداقل درجه همگرایی ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ برابر ۱ بوده و می‌توان نتیجه گرفت که تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در پریودیک اصلی خود می‌باشد. بنابراین، گزینه (۳) صحیح است.

ضریب a_n تابع زوج بر حسب n و ضریب b_n تابعی فرد بر حسب n می‌باشد.

$$\begin{cases}a_{-n}=a_n\\ b_{-n}=-b_n\end{cases}$$

تمرین ۱-۵۰: سری فوریه تابع پیوسته تکه‌ای $f(x)$ در بازه $[-3,3]$ به‌صورت $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos(\frac{n\pi x}{3})+b_n\sin(\frac{n\pi x}{3})\right\}$ تعریف می‌شود. اگر تابع $f(x)$ برابر با: $f(x)=\begin{cases}0 & -3\le x\le 0\\ x & 0\le x\le 3\end{cases}$ باشد، ضرایب سری فوریه به ترتیب a_0 و a_n و b_n برابرند با:

۱) $\frac{3}{2},\frac{3[\sin(\frac{n\pi}{2})-1]}{n^2\pi^2},\frac{-3\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}$

۲) $\frac{3}{4},\frac{3[\cos(n\pi)-1]}{n^2\pi^2},\frac{-3\cos(n\pi)}{n\pi}$ (کامپیوتر – سراسری ۸۴)

۳) $\frac{3}{4},\frac{3[\sin(\frac{n\pi}{2})-1]}{n^2\pi^2},\frac{-3\cos(n\pi)}{n\pi}$

۴) $\frac{3}{2},\frac{3[\cos(n\pi)-1]}{n^2\pi^2},\frac{-3\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}$

حل: ضریب a_n تابعی زوج بر حسب n و ضریب b_n تابعی فرد برحسب n می‌باشد. گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ این ویژگی را ندارند.

بنابراین، گزینه (۲) صحیح است.

اگر ضرایب سری فوریه مثلثاتی توابع $f(x)$ و $g(x)$ (با دوره تناوب اساسی یکسان) به ترتیب $\{a_n,b_n\}$ و $\{a'_n,b'_n\}$ باشند، در آن صورت، ضرایب سری فوریه تابع $c_1f(x)+c_2g(x)$ به صورت $\{c_1a_n+c_2a'_n,c_1b_n+c_2b'_n\}$ خواهند بود.

تمرین ۱-۵۱: اگر سری فوریه کسینوسی تابع $g(x)=x$ و $0\le x\le L$ به صورت $x=\frac{L}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$ باشد، آنگاه سری فوریه کسینوسی نیم دامنه $f(x)=Px+q$ ، $0\le x\le L$، کدام است؟ (P و q ثابت حقیقی) (مهندسی مواد – سراسری ۸۷)

۱) $(\frac{PL}{2}+q)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4PL}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۲) $(\frac{PL}{2}+q)-\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{4PL}{\pi^2(2m-1)^2}+q)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۳) $(\frac{PL}{2}+\frac{q}{2})-\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{4PL}{\pi^2(2m-1)^2}+q)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۴) $(\frac{PL}{2}+q)-\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{4PL}{\pi^2(2m-1)^2}-q)\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

حل:

$$f(x)=Px+q=P(\frac{L}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L})+q=(\frac{PL}{2}+q)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4PL}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

با فرض اینکه دوره تناوب اساسی تابع متناوب $f(x)$ برابر $T=2L$ باشد:

الف) اگر تابع $f(x)$ زوج باشد $(f(-x)=f(x))$ آنگاه: $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ و $b_n=0$

ب) اگر تابع $f(x)$ فرد باشد $(f(-x)=-f(x))$ $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$ و $b_n=0$

ج) اگر تابع $f(x)$ نسبت به محور $x=0$ تقارن زوج داشته $(f(-x)=f(x))$ و همچنین نسبت به محور $x=\frac{T}{4}$، نیز تقارن زوج داشته باشد، $(f(\frac{T}{4}+x)=f(\frac{T}{4}-x))$ آنگاه در بسط فوریه مثلثاتی آن، فقط هارمونیک‌های زوج کسینوسی وجود دارند. به عبارت دیگر: $a_{2n}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}dx$ و $a_{2n+1}=0$ و $b_n=0$

در چنین حالتی تابع $f(x)$ بر اساس دوره تناوب L نیز متناوب خواهد بود.

د) اگر تابع $f(x)$ نسبت به محور $x=0$ تقارن زوج داشته، اما نسبت به محور عمودی $x=\frac{T}{4}$، تقارن فرد داشته باشد، $(f(\frac{T}{4}+x)=-f(\frac{T}{4}-x))$ آنگاه در بسط فوریه مثلثاتی آن، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارند. به عبارت دیگر:

$$a_{2n+1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}f(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{L}dx \text{ و } a_{2n}=0 \text{ و } b_n=0$$

و) اگر تابع $f(x)$ نسبت به محور $x=0$ تقارن فرد داشته $(f(-x)=-f(x))$ و نسبت به محور $x=\frac{T}{4}$، نیز تقارن فرد داشته باشد، $(f(\frac{T}{4}+x)=-f(\frac{T}{4}-x))$ آنگاه در بسط فوریه مثلثاتی آن، فقط هارمونیک‌های زوج کسینوسی وجود دارند. به عبارت دیگر:

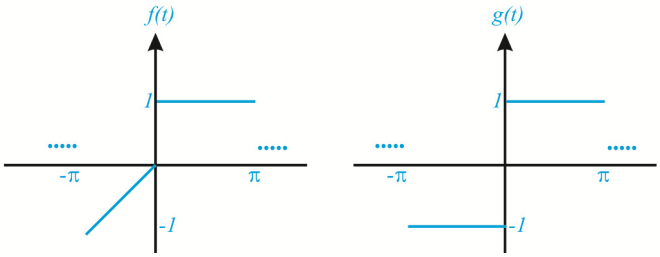
$$a_n=0 \text{ و } b_{2n+1}=0 \text{ و } b_{2n}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{L}dx$$

در چنین حالتی تابع $f(x)$ بر اساس دوره تناوب L نیز متناوب خواهد بود.

هـ) اگر تابع $f(x)$ نسبت به محور $x=0$ تقارن فرد داشته باشد، اما نسبت به محور عمودی $x=\frac{T}{4}$، تقارن زوج داشته باشد، آنگاه در بسط فوریه مثلثاتی آن، فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارند، به عبارت دیگر:

$$a_n=0 \text{ و } b_{2n}=0 \text{ و } b_{2n+1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L}dx$$

تمرین ۱-۵۲: فرق تابع $g(t)$ و $f(t)$، اگر هر دو بوسیله سری فوریه نشان داده شوند، چیست؟ (کامپیوتر – آزاد ۸۱)



۱) تابع $f(t)$ به وسیله سری فوریه غیر قابل نمایش است ولی تابع $g(t)$ به وسیله سری فوریه قابل نمایش است.

۲) هم تابع $f(t)$ و هم تابع $g(t)$ به تمامی هارمونیک‌های زوج و فرد نیازمندند.

۳) تابع $g(t)$ به تمامی هارمونیک‌های زوج و فرد نیاز دارد ولی $f(t)$ چنین نیست.

۴) تابع $f(t)$ به تمامی هارمونیک‌های زوج و فرد نیاز دارد ولی $g(t)$ چنین نیست.

حل: تابع پله‌ای متقارن فرد $g(t)$، تقارن نیم موج فرد داشته و فقط به هارمونیک‌های فرد سینوسی نیاز دارد. اما تابع $f(x)$ که ترکیبی از تابع پله‌ای و تابع شیب می‌باشد، فاقد تقارن نیم موج بوده و لذا به همه هارمونیک‌های زوج و فرد نیاز دارد.

تمرین ۱-۵۳: برای تابع تناوبی و فرد f که دوره تناوبش برابر با ۴۰ است، در فاصله $0\le x\le 20$ داریم $f(x)=x(x-10)(x-20)$. می‌توان گفت که سری فوریه مثلثاتی تابع f چنین صورتی دارد: (دکتری برق – آزاد ۸۵)

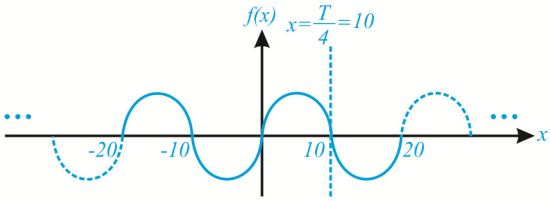
۱) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{20}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{20}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{10}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\frac{n\pi x}{10}$

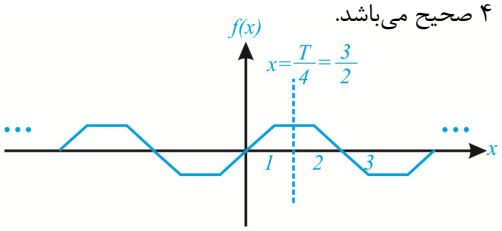
حل: با رسم تابع $f(x)$ در بازه $0\le x\le 20$ و گسترش فرد آن با دوره تناوب $T=40$، خواهیم دید که نمودار حاصل نسبت به $x=0$ و $x=\frac{T}{4}=10$ تقارن فرد دارد.بنابراین در بسط فوریه مثلثاتی آن هارمونیک‌های زوج سینوسی به شکل $\sin\frac{2n\pi x}{20}$ وجود دارند. بنابراین، گزینه (۳) صحیح است.



تمرین ۱-۵۴: در بسط فوریه تابع $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{3}+b_n\sin\frac{n\pi t}{3}\right)$ اگر در یک پریود (دوره تناوب) $f(t)=\begin{cases}-t-3 & -3\le t\le -2\\ -1 & -2\le t\le -1\\ t & -1\le t\le 1\\ 1 & 1\le t\le 2\\ -t+3 & 2\le t\le 3\end{cases}$ باشد، آنگاه ضرایب غیر صفر، فقط عبارتند از: (برق – سراسری ۷۷)

۱) a_n و n فرد
۲) a_n و n زوج
۳) b_n و n زوج
۴) b_n و n فرد

حل: اگر نمودار تابع متناوب $f(t)$ را رسم کنیم، خواهیم دید که این تابع نسبت به محور $x=0$، دارای تقارن فرد می‌باشد $(a_n=0)$ در حالیکه نسبت به محور $x=\frac{T}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ دارای تقارن زوج می‌باشد. بنابراین در بسط سری فوریه آن فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارند. $(b_{2n}=0, b_{2n+1}\neq 0)$ بنابراین، گزینه ۴ صحیح می‌باشد.



با فرض آنکه تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T بوده و ضرایب سری فوریه آن برابر $\{a_0,a_n,b_n\}$ باشد، در آن صورت اگر ضرایب سری فوریه تابع $f(x)\cos(\frac{m2\pi x}{T})$ را با $\{a'_0,a'_n,b'_n\}$ و ضرایب سری فوریه تابع $f(x)\sin(\frac{m2\pi x}{T})$ را با $\{a''_0,a''_n,b''_n\}$ نشان دهیم، خواهیم داشت: $(a_{m-n}=a_{n-m} \quad , \quad b_{m-n}=-b_{n-m})$

$$a'_0=\frac{a_m}{2} \text{ و } a'_n=\frac{a_{n-m}+a_{n+m}}{2} \text{ و } b'_n=\frac{b_{n-m}+b_{n+m}}{2}$$

$$a''_0=\frac{b_m}{2} \text{ و } a''_n=\frac{b_{m-n}+b_{m+n}}{2} \text{ و } b''_n=\frac{a_{m-n}-a_{m+n}}{2}$$

تمرین ۱-۵۵: ضرایب بسط فوریه تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π، $\{a_0,a_n,b_n\}$ می‌باشد. اگر ضرایب بسط فوریه تابع $f(x)\cos x$ برابر با $\{a'_0,a'_n,b'_n\}$ باشد، آنگاه کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟ (برق – سراسری ۸۶)

۱) $a'_0=\frac{a_1}{2} \quad , \quad a'_n=\frac{a_{n+1}-a_{n-1}}{2} \quad , \quad b'_n=\frac{b_{n+1}-b_{n-1}}{2}$

۲) $a'_0=\frac{a_1}{2} \quad , \quad a'_n=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2} \quad , \quad b'_n=\frac{b_{n+1}+b_{n-1}}{2}$

۳) $a'_0=\frac{a_0}{2} \quad , \quad a'_n=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2} \quad , \quad b'_n=\frac{b_{n+1}+b_{n-1}}{2}$

۴) $a'_0=\frac{a_0}{2} \quad , \quad a'_n=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \quad , \quad b'_n=\frac{a_{n+1}+b_{n-1}}{2}$

حل: با استفاده از نکته قبل و جایگذاری $T=2\pi$ و $m=1$ داریم:

$$a'_0=\frac{a_1}{2} \text{ و } a'_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \text{ و } b'_n=\frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}$$

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ هر دو متناوب با دوره تناوب یکسان T باشند و ضرایب سری فوریه آنها به ترتیب $\{a_0,a_n,b_n\}$ و $\{A_0,A_n,B_n\}$ باشند، در این صورت، اگر ضرایب سری فوریه تابع حاصلضرب آنها یعنی $f(x)g(x)$ را با $\{\alpha_0,\alpha_n,\beta_n\}$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{2\pi nx}{T})+b_n\sin(\frac{2\pi nx}{T}) \\ g(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(\frac{2\pi nx}{T})+B_n\sin(\frac{2\pi nx}{T}) \\ f(x)g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(\frac{2\pi nx}{T})+\beta_n\sin(\frac{2\pi nx}{T}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0=\frac{a_0A_0}{2}+(\sum_{n=1}^{\infty}a_nA_n+b_nB_n) \\ \alpha_n=\frac{a_0A_n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[a_m(A_{m+n}+A_{m-n})+b_m(B_{m+n}+B_{m-n})] \\ \beta_n=\frac{a_0B_n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[a_m(B_{m+n}-B_{m-n})-b_m(A_{m+n}-A_{m-n})] \end{cases}$$

در حالت خاصی که $f(x)$ و $g(x)$ با هم برابر باشند، می‌توان چنین نوشت:

$$\alpha_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(x)|^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$ (رابطه پارسوال)

تمرین ۱-۵۶: اگر سری فوریه تابع متناوب $(T=2)$ $0<t<2$ و $f(t)=t^2$ به صورت $\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{4}{n^2\pi^2})\cos n\pi t+(\frac{-4}{n\pi})\sin n\pi t\right]$ تعریف شود، آنگاه حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی – سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi^6}{6}$ ۲) $\frac{\pi^2}{9}$ ۳) $\frac{\pi^4}{90}$ ۴) $\frac{\pi^4}{96}$

حل:

$$f(t)=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{4}{n^2\pi^2})\cos n\pi t+(\frac{-4}{n\pi})\sin n\pi t\right]$$

بر طبق قضیه دیریکله، حاصل سری فوق به ازای $t=0$، میانگین حد چپ و حد راست در این نقطه خواهد بود.

$$\frac{4+0}{2}=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2\pi^2})\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

اگر از رابطه پارسوال استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\int_0^2|f(x)|^2dt=(\frac{4}{3})^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2\pi^2})^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-4}{n\pi})^2\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^2t^4dt=\frac{16}{9}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^2\pi^2}$$

$$\frac{32}{10}=\frac{16}{9}+\frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\xrightarrow{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

روش تستی: درجه همگرایی سری عددی موردنظر برابر ۴ است. بنابراین در صورت کسر حاصل باید، عامل π^4 داشته باشیم. (گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست‌اند) همچنین با توجه به چند جمله اول سری عددی $(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+...)$ گزینه ۳ تقریب مناسب‌تری برای آن می‌باشد. $(\pi^4\simeq 98\Rightarrow\frac{\pi^4}{90}\simeq 1/10\ ,\ \frac{\pi^4}{96}\simeq 1/01)$

اگر تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب T بوده و ضرایب سری فوریه آن $\{a_0,a_n,b_n\}$ باشد، در این صورت اگر ضرایب سری فوریه تابع $g(x)=f(x-h)$ را $\{\alpha_0,\alpha_n,\beta_n\}$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$\alpha_0=a_0 \qquad \alpha_n=a_n\cos(\frac{2\pi nh}{T})-b_n\sin(\frac{2\pi nh}{T}) \qquad \beta_n=a_n\sin(\frac{2\pi nh}{T})+b_n\cos(\frac{2\pi nh}{T})$$

تمرین ۱-۵۷: دورهٔ تناوب تابع حقیقی تناوبی $f(t)$ برابر با T است و $g(t)=f(t+\frac{T}{4})$، سری‌های فوریهٔ این دو تابع عبارتند از:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{T}) \quad \text{و} \quad g(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+d_n\sin\frac{2n\pi t}{T})$$

برای مقادیر $n=1,5,9,13,...$ کدام یک از این چهار گزاره درست است؟ (دکتری برق - آزاد ۸۴)

۱) $d_n=a_n$ ۲) $d_n=b_n$ ۳) $d_n=-a_n$ ۴) $d_n=-b_n$

حل:

$$\begin{cases} c_n=a_n\cos\frac{2\pi n}{T}(\frac{T}{4})-b_n\sin\frac{2\pi n}{T}(\frac{T}{4}) \\ d_n=a_n\sin\frac{2\pi n}{T}(\frac{T}{4})+b_n\cos\frac{2\pi n}{T}(\frac{T}{4}) \end{cases} \Rightarrow d_n=a_n\sin\frac{\pi n}{2}+b_n\cos\frac{\pi n}{2}\xrightarrow{n=1,5,9,...}d_n=a_n$$

چنانچه تابع $f(x)$ را قسمتی از یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=2L$ فرض نموده و آنرا به کمک سری مثلثاتی $S_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\beta\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ تقریب بزنیم، در این صورت، برای اینکه حداقل مجموع مربعات خطا، بدست آید، لازم است که ضرایب α_0 و α_n و β_n منطبق با ضرایب سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ باشند. به عبارت دیگر:

$$\alpha_n=a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad \beta_n=b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

تمرین ۱-۵۸: از میان کلیه توابع مجموع $\{\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x,\forall\alpha,\beta,\gamma\in R\}$ کدامیک به تابع زیر (به معنی کمترین مربعات خطا) نزدیکتر هستند. (α یک ثابت حقیقی است) (برق - سراسری ۷۹)

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2} \\ -a(x+\frac{\pi}{2}) & -\frac{\pi}{2}\le x<0 \\ a(x-\frac{\pi}{2}) & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2}\le x<\pi \end{cases}$$

۱) $-\frac{a\pi}{4}-\frac{2a}{\pi}\cos x$

۲) $-\frac{a\pi}{8}-\frac{2a}{\pi}\cos x$

۳) $-\frac{a\pi}{8}+\frac{2a}{\pi}\cos x$

۴) $-\frac{a\pi}{8}-\frac{2a}{\pi}\cos x+\frac{2a}{\pi}\sin x$

حل: تابع $f(x)$، زوج می‌باشد، بنابراین: $\gamma=0$

$$\alpha=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}a(x-\frac{2}{\pi})dx=\frac{-a\pi}{8}$$

$$\beta=a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}a(x-\frac{\pi}{2})\cos xdx=\frac{-2a}{\pi}$$

(به روش تستی مساله، فکر کنید.) بنابراین، گزینه ۲ صحیح است.

D- انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از سری فوریه

مباحث مربوط به انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از سری فوریه مثلثاتی را می‌توان در قالب قضایای زیر بیان نمود. لازم به ذکر است که در این قضایا، دوره تناوب تابع برابر 2π فرض گردیده است. بدیهی است که می‌توان نتایج بدست آمده را برای هر تابع متناوب با دوره تناوب دلخواه T تعمیم داد.

اگر تابع مطلقاً انتگرال‌پذیر $f(x)$ با دوره تناوب $T=2\pi$، توسط ضرایب سری فوریه آن، مشخص شده باشد، در آن صورت $\int_a^b f(x)dx$ را می‌توان با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوریه آن محاسبه کرد. (بدون توجه به اینکه سری مورد نظر همگراست یا خیر) به عبارت دیگر، می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\frac{a_0}{2}(b-a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(\sin nb-\sin na)-b_n(\cos nb-\cos na)}{n}$$

اگر تابع مطلقاً انتگرال‌پذیر $f(x)$، در بازه $(0,2\pi)$ بوسیله سری فوریه آن مشخص شده باشد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

آنگاه، تابع $F(x)=\int_0^x f(x)dx$ دارای بسط فوریه مثلثاتی به شکل زیر خواهد بود:

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos nx+[a_n-a_0]\sin nx}{n}$$

اگر تابع مطلقاً انتگرال‌پذیر $f(x)$، در بازه $(-\pi,\pi)$ بوسیله سری فوریه آن مشخص شده باشد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

آنگاه، تابع $F(x)=\int_0^x f(x)dx$ دارای بسط فوریه مثلثاتی به شکل زیر خواهد بود:

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos nx+[a_n+(-1)^{n+1}a_0]\sin nx}{n}$$

اگر در بسط فوریه مثلثاتی تابع مطلقاً انتگرال‌پذیر $f(x)$ مقدار متوسط تابع برابر صفر باشد $(a_0=0)$، در آن صورت سری فوریه تابع $F(x)=\int_0^x f(x)dx$ را می‌توان با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوریه تابع $f(x)$ بدست آورد.

تمرین ۱-۵۹: سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $(0,2\pi)$ به صورت $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ است، اگر سری فوریه $\int_0^x f(y)dy$ در همان بازه به صورت $\frac{A_0}{2}+\sum(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$ باشد،در این صورت B_n برابر است با: (مواد – سراسری ۸۹)

۱) $\frac{a_n}{n}$ ۲) $\frac{b_n}{n}$ ۳) $\frac{1}{n}(a_n-a_0)$ ۴) $\frac{1}{n}(b_n-a_n)$

حل: بدیهی است که با انتگرال‌گیری از سری فوریه داده شده، تابع $\frac{a_0x}{2}$ ظاهر خواهد شد، که خود دارای بسط فوریه سینوسی است و لذا در B_n تاثیرگذار خواهد بود. بنابراین فقط گزینه ۳ می‌تواند صحیح باشد. با انتگرال گیری از سری فوریه تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$\int_0^x f(y)dy=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx)$$

از طرفی بسط فوریه مثلثاتی تابع $h(x)=x$ در بازه (2π و ۰) با دوره تناوب $T=2\pi$ به شکل زیر می‌باشد:

$$x=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(2\pi-0)\cos 2\pi n}{n\pi}\sin nx=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$$

بنابراین:

$$\int_0^x f(y)dy=\frac{\pi a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_0}{n}\sin nx+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx)=\frac{\pi a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(a_n-a_0)}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx)\right]\Rightarrow\begin{cases}B_n=\frac{a_n-a_0}{n}\\ A_n=\frac{-b_n}{n}\end{cases}$$

تمرین ۱-۶۰: اگر برای $0<x<2$ داشته باشیم: $x=\frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-...)$

در این صورت، ضریب جمله $\cos\pi x$ در بسط عبارت $x(x-1)$ عبارت است از: (برق – سراسری ۸۴)

۱) $\frac{2}{\pi^2}$ ۲) $\frac{4}{\pi^2}$ ۳) $\frac{8}{\pi^2}$ ۴) $\frac{16}{\pi^2}$

حل: با توجه به اینکه در بسط فوریه تابع x، ضریب a_0 برابر صفر می‌باشد، بنابراین می‌توان از آن جمله به جمله انتگرال گرفت و بسط فوریه تابع $\frac{x^2}{2}$ بدست خواهد آمد.

$$\frac{x^2}{2}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{2\pi}\cos\pi x-\dots\right)\Rightarrow x^2=\frac{8}{\pi}\left(\frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{\cos\pi x}{2\pi}-\dots\right)$$

بنابراین:

$$x^2-x=\frac{8}{\pi}\left(\frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{2\pi}\cos\pi x-\dots\right)-\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\dots\right)$$

ملاحظه می‌گردد که ضریب $\cos\pi x$ برابر $\frac{4}{\pi^2}$ می‌باشد.

تمرین ۱-۶۱: اگر سری فوریه تابع $f(x)=2x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ برابر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$ باشد، سری فوریه تابع $g(x)=x^2-\pi^2$ کدام است؟ (مکانیک – سراسری ۸۷)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\left[\cos(nx)-(-1)^n\right]$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\left[\sin nx-(-1)^n\right]$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n}\left[\cos(nx)+(-1)^n\right]$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n}\left[\sin(nx)+(-1)^n\right]$

حل: اگر از طرفین سری فوریه تابع $f(x)=2x$ از $-\pi$ تا x انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$\int_{-\pi}^{x}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{x}\sin nx\,dx\right]\Rightarrow x^2-\pi^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\left[-\cos nx\right]_{-\pi}^{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\left[\cos nx-(-1)^n\right]$$

اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته با دوره تناوب 2π باشد که در بازه $(0,2\pi)$ تعریف شده و مشتق آن نیز مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد(البته مشتق آن، می‌تواند در بعضی نقاط وجود نداشته باشد) در آن صورت، سری فوریه تابع $f'(x)$ را می‌توان از روی سری فوریه تابع $f(x)$ و به کمک مشتق‌گیری جمله به جمله از آن بدست آورد.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad(0<x<2\pi)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos nx-a_n\sin nx)\qquad(0<x<2\pi)$$

اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته با دوره تناوب 2π باشد که در بازه $[-\pi,\pi]$ تعریف شده و بسط فوریه آن به شکل زیر باشد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad(-\pi<x<\pi)$$

در این‌صورت سری فوریه $f'(x)$ چنین خواهد بود:

$$f'(x)=\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(nb_n+(-1)^n c)\cos nx-na_n\sin nx)]$$

که در آن: $c=\lim_{n\to\infty}[(-1)^{n+1}nb_n]$

اگر بسط فوریه تابع $f(x)$، تعریف شده در بازه $(-L,L)$ را داشته باشیم،در آن صورت بسط فوریه تابع $f'(x)$ را فقط زمانی می‌توان با استفاده از مشتق‌گیری جمله به جمله از بسط فوریه تابع $f(x)$ بدست آورد که $f(L)=f(-L)$ باشد.

اگر تابع $f(x)$ یک تابع پیوسته در بازه $[0,\pi]$ باشد که مشتق آن مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد و تابع $f(x)$ را گسترش زوج داده باشیم، در آن صورت از سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$، می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت و سری بدست آمده به سمت $f'(x)$ همگرا خواهد شد.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\qquad(0<x<\pi)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}na_n\sin nx$$

فرض کنید $f(x)$ پیوسته بوده و دارای مشتق مطلقاً انتگرال‌پذیر در بازه $[0,\pi]$ باشد. اگر تابع $f(x)$ را بسط نیم‌دامنه‌ای فرد (گسترش سینوسی) داده باشیم، یعنی:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (0<x<\pi)$$

در آن صورت می‌توان چنین نوشت:

$$f'(x)=\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[nb_n-d+(c+d)(-1)^n]\cos nx$$

که در آن: $d=\frac{1}{2}(\lim\limits_{n\to\infty} nb_n-c)$ $\qquad c=-\lim\limits_{n\to\infty} nb_n$

اگر تابع $f(x)$ با بسط نیم دامنه‌ای فرد را داده باشند، در آن صورت، بسط فوریه تابع $f'(x)$ را فقط زمانی می‌توان با مشتق‌گیری جمله به جمله از بسط فوریه تابع $f(x)$ بدست آورد که $f(0)=f(L)=0$ باشد.

تمرین ۱-۶۲: اگر $-\pi<x<\pi$ و $f(x)=2x+1$، دارای سری فوریه زیر باشد، کدام گزینه صحیح است. (مکانیک – سراسری ۷۱)

۱) با انتگرال گیری جمله به جمله از سری فوق، می‌توان سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$ و $g(x)=x^2+x$ را بدست آورد.

۲) با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوق، می‌توان سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$ $g(x)=2$ را بدست آورد.

۳) حد سری متناوب $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ برابر $\frac{\pi}{4}$ بدست می‌آید.

$$f(x)=1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$$

۴) مقدار تابع در نقطه ناپیوستگی $x=\pi$ برحسب سری فوریه فوق برابر ۲ خواهد بود.

حل: با توجه به اینکه، در بسط فوریه تابع $f(x)$ مقدار a_0 مخالف صفر می‌باشد، بنابراین، با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوریه تابع $f(x)$، سری فوریه تابع $\int_0^x f(x)dx$ بدست نمی‌آید.

همچنین، با توجه به اینکه $f(\pi)\neq f(-\pi)$ می‌باشد، بنابراین با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری $f(x)$، سری فوریه تابع $f'(x)$، بدست نمی‌آید. در نقطه ناپیوستگی $x=\pi$، می‌توان چنین نوشت:

$$\text{حاصل سری فوریه تابع } f(x) \text{ در نقطه‌ی } (x=\pi) = \frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{(+2\pi+1)+(-2\pi+1)}{2}=1$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{2}$ در طرفین بسط سری فوریه تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$f(\frac{\pi}{2})=2(\frac{\pi}{2})+1=1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\Rightarrow(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots)=\frac{\pi}{4}$$

بنابراین، گزینه (۳) صحیح است.

بیشتر بدانیم:

با استفاده از سری فوریه مثلثاتی توابع، می‌توان حاصل برخی از سری‌های عددی را محاسبه نمود. همچنین می‌توان بسط بعضی از توابع را برحسب کسرهای جزئی نوشت. به‌طور مثال در بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\cos ax$ $(-\pi<x<\pi)$ که در آن a عددی غیر صحیح می‌باشد.

می‌توان چنین نوشت:

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 2a}{a^2-n^2}\frac{\sin a\pi}{\pi}\right)\cos nx$$

به ازای $x=0$، رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$1=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2a\sin(a\pi)}}$$

همچنین، با جایگذاری $x=\pi$، در بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\cos ax$ $(-\pi<x<\pi)$ خواهیم داشت:

$$\cos(a\pi)=\frac{\sin(a\pi)}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2a}\cot(a\pi)}$$

چنانچه در رابطه سری فوریه مثلثاتی تابع $\cos ax$ $(-\pi<x<\pi)$ به جای x عدد ۰ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin a\pi}=\frac{1}{a\pi}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

با تغییر متغیر $z = a\pi$، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right]$$

چنانچه در رابطه سری فوریه مثلثاتی تابع $\cos ax$ $(-\pi < x < \pi)$ به جای x عدد π قرار می‌دادیم، به بسط زیر می‌رسیدیم:

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z\left(\frac{1}{z^2-\pi^2} + \frac{1}{z^2-4\pi^2} + \frac{1}{z^2-9\pi^2} + \dots\right)$$

تمرین ۱-۶۳: اگر f تابع متناوبی با دورهٔ تناوب 2π و به ازای $|x| < \pi$ داشته باشیم $f(x) = \cos\frac{x}{2}$، آنگاه با استفاده از سری فوریه مثلثاتی تابع f، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$ برابر است با: (شیمی - بیوتکنولوژی -داروسازی و نانو مواد - سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) ۲

حل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-m^2} = \frac{1}{2m^2} - \frac{\pi\cos m\pi}{2m\sin m\pi} \xrightarrow{m=\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} = 2$$

تمرین ۱-۶۴: اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π و $|x| < \pi$; $f(x) = \cos\frac{x}{2}$، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}}$ چقدر است؟ (هوا و فضا - سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{2}-2$ ۲) $\frac{\pi}{2}-1$ ۳) $\pi-2$ ۴) $\pi-1$

حل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-m^2} = \frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2m\sin m\pi} \xrightarrow{m=\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-\frac{1}{4}} = 2-\pi \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}} = \pi-2$$

E- فرم مختلط سری فوریه

بسط فوریه مثلثاتی تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب T را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right\}$$

با استفاده از روابط اویلر $\left(\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}\right)$ می‌توان چنین نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)} \qquad \left(c_0 = \frac{a_0}{2} \ , \ c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \ , \ c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}\right)$$

ضرایب c_n از رابطه زیر محاسبه می‌گردند:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-j\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)}$$

بین ضرایب سری فوریه مثلثاتی $(a_n \ , \ b_n)$ و ضرایب سری فوریه مختلط (c_n) روابط زیر برقرار است:

$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = j(c_n - c_{-n})$$

تمرین ۱-۶۵: هرگاه $P = 2\pi$ و $-\pi < x < \pi$; $y = f(x)$ یک تابع حقیقی و C_nها ضرایب سری فوریه مختلط $f(x)$ باشند، آنگاه $C_n - C_{-n}$: (مهندسی مواد - آزاد ۸۶)

۱) عددی مختلط است. ۲) عددی حقیقی است. ۳) موجود نیست. ۴) برابر a_n است.

حل:

$$c_n - c_{-n} = \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right) - \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right) = -jb_n$$

ملاحظه می‌گردد که عبارت حاصل، موهومی خالص است. بنابراین، گزینه (۱) صحیح است.

اگر ضرایب سری فوریه مختلط تابع $f(x)$ با دوره تناوب T به صورت c_n باشد، آنگاه روابط زیر برقرارند:

$$f(x-x_0)\xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه مختلط}}e^{-jn(\frac{2\pi}{T})x_0}c_n \qquad f^*(x)\xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه مختلط}}c^*_{-n}$$

$$f(-x)\xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه مختلط}}c_{-n} \qquad \frac{df(x)}{dx}\xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه مختلط}}jn(\frac{2\pi}{T})c_n$$

$$f(ax)\xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه مختلط}}c_n \qquad \frac{1}{T}\int_0^T|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

تمرین ۱-۶۶: اگر در نمایش مختلط سری فوریه تابع متناوب $x(t)$ ضرایب سری برابر C_n باشند، آنگاه ضرایب سری فوریه $x(2t+1)$ برابر است با: (p نصف دورهٔ تناوب است) (مهندسی کامپیوتر – آزاد ۸۷)

۱) $e^{i\frac{n\pi}{p}}C_{\frac{n}{2}}$ ۲) $e^{i\frac{n\pi}{p}}C_n$ ۳) $e^{i\frac{n\pi}{p}}C_{2n}$ ۴) $e^{-i\frac{n\pi}{p}}C_n$

حل: طبق خواص سری فوریه مختلط، می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{array}{ccccc} x(t) & \xrightarrow{t\to t+1} & x(t+1) & \xrightarrow{t\to 2t} & x(2t+1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_n & & e^{in(\frac{2\pi}{2p})}C_n & & e^{i\frac{n\pi}{p}}C_n \end{array}$$

F- کاربرد توابع مختلط در محاسبه سری‌های مثلثاتی

حاصل برخی از سری‌های مثلثاتی را می‌توان به کمک بسط مک لورن توابع مختلط مقدماتی محاسبه کرد. به کمک بسط مک لورن روابط زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad (|z|<1)$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad (|z|<1)$$

$$Ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} \qquad (|z|<1)$$

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad (|z|<1)$$

$$Arc\tan z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1} \qquad (|z|<1)$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

همچنین با استفاده از مبحث توابع مختلط می‌توان چنین نوشت:

$$\sinh z=\sinh(x+iy)=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y$$
$$\cosh z=\cosh(x+iy)=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$$
$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-x)-iy}=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}+i\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$$

$$e^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y$$
$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$
$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

با جایگذاری $z=\cos\theta+i\sin\theta$ در روابط قبل $(x=\cos\theta, y=\sin\theta)$ و استفاده از رابطه دموآور $((\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta)$ و مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی به روابط مفید زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} e^{\cos\theta+i\sin\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{n!} \\ e^{\cos\theta+i\sin\theta}=e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)+ie^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n!}=e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n!}=e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\cos\theta+i\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \sin(\cos\theta+i\sin\theta)=\sin(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)+i\cos(\cos\theta)\sinh(\sin\theta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)!}=\sin(\cos\theta)\cosh(\sin\theta) \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(2n+1)\theta}{(2n+1)!}=\cos(\cos\theta)\sinh(\sin\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\cos\theta+i\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}}{(2n)!} \\ \cos(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)-i\sin(\cos\theta)\sinh(\sin\theta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n\theta}{(2n)!}=\cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 2n\theta}{(2n)!}=-\sin(\cos\theta)\sinh(\sin\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cosh(\cos\theta+i\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}}{(2n)!} \\ \cosh(\cos\theta+i\sin\theta)=\cosh(\cos\theta)\cos(\sin\theta)+i\sinh(\cos\theta)\sin(\sin\theta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{(2n)!}=\cosh(\cos\theta)\cos(\sin\theta) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\theta}{(2n)!}=\sinh(\cos\theta)\sin(\sin\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sinh(\cos\theta+i\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \sinh(\cos\theta+i\sin\theta)=\sinh(\cos\theta)\cos(\sin\theta)+i\cosh(\cos\theta)\sin(\sin\theta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)!}=\sinh(\cos\theta)\cos(\sin\theta) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\theta}{(2n+1)!}=\cosh(\cos\theta)\sin(\sin\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{a}{a-(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{a^n} \\ \frac{a}{a-(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{a(a-\cos\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}+i\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{a^n}=\frac{a(a-\cos\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{a^n}=\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}Ln(1+\cos\theta+i\sin\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{n} \\ Ln(1+\cos\theta+i\sin\theta)=Ln(2\cos^2\frac{\theta}{2}+i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})=Ln(2\cos\frac{\theta}{2})+i\frac{\theta}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos n\theta}{n}=Ln(2\cos\frac{\theta}{2}) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin n\theta}{n}=\frac{\theta}{2}\end{cases}$$

تمرین ۱-۶۷: تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π بر بازه $(0,2\pi)$ دارای سری فوریه‌ای به صورت $1+\cos x+\frac{\cos 2x}{2!}+\frac{\cos 3x}{3!}+\dots$ می‌باشد. $f(x)$ برابر است با: (مکانیک – سراسری ۸۹)

۱) $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ ۲) $e^{\sin x}\cos(\sin x)$ ۳) $e^{\cos x}\sin(\cos x)$ ۴) $e^{\sin x}\sin(\cos x)$

حل: بسط مک لورن تابع e^z به صورت مقابل می‌باشد:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots$$

به ازای $z=e^{ix}$ می‌توان چنین نوشت:

$$e^{e^{ix}}=1+\frac{e^{ix}}{1!}+\frac{e^{i2x}}{2!}+\frac{e^{i3x}}{3!}+\ldots\Rightarrow e^{\cos x+i\sin x}=1+\frac{\cos x+i\sin x}{1!}+\frac{\cos 2x+i\sin 2x}{2!}+\frac{\cos 3x+i\sin 3x}{3!}+\ldots$$

$$e^{\cos x}\left[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)\right]=1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos 2x}{2!}+\frac{\cos 3x}{3!}+\ldots+i\left[\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin 2x}{2!}+\ldots\right]$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی از طرفین رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos 2x}{2!}+\ldots=e^{\cos x}\cos(\sin x)\qquad \frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin 2x}{2!}+\ldots=e^{\cos x}\sin(\sin x)$$

روش تستی: با توجه به بسط کسینوسی داده شده، انتظار داریم که تابع $f(x)$ زوج باشد (گزینه‌های ۲ و ۴ نادرست‌اند) و به ازای $x=0$ برابر e گردد که فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد. $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$

تمرین ۱-۶۸: حاصل سری فوریه مثلثاتی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\cos nx}{n!}$ که در آن a عددی حقیقی و ثابت است،برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $e^{a\sin x}\sin(a\cos x)$ ۲) $e^{a\cos x}\sin(a\sin x)$ ۳) $e^{a\sin x}\cos(a\cos x)$ ۴) $e^{a\cos x}\cos(a\sin x)$

حل: با توجه به اینکه در مخرج ضرایب سری فوریه داده شده عامل $n!$ $(n=0,1,2,\ldots)$ وجود دارد، به نظر می‌رسد باید از بسط مک لورن e^{az} استفاده شود. همچنین بدلیل کسینوسی بودن سری مثلثاتی داده شده، باید قسمت حقیقی بسط مک لورن e^{az} را محاسبه کنیم. بنابراین:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\cos nx}{n!}=\mathrm{Re}\left\{e^{az}\right\}_{z=\cos x+i\sin x}=\mathrm{Re}\left\{e^{a\cos x+ia\sin x}\right\}=e^{a\cos x}\cos(a\sin x)$$

بدیهی است که حاصل سری فوریه مثلثاتی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\sin nx}{n!}$ برابر $e^{a\cos x}\sin(a\sin x)$ خواهد بود.

تمرین ۱-۶۹: حاصل انتگرال $\int_0^{\pi}e^{a\cos x}\cos(a\sin x)dx$ کدام گزینه است؟

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 0

حل: با استفاده از بسط فوریه مثلثاتی تابع زیر انتگرال به کمک توابع مختلط می‌توان چنین نوشت:

$$e^{a\cos x}\cos(a\sin x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\cos nx}{n!}$$

بنابراین:

$$I=\int_0^{\pi}e^{a\cos x}\cos(a\sin x)dx=\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\cos nx}{n!}\right)dx=\int_0^{\pi}(1+a\cos x+\frac{a^2}{2!}\cos 2x+\ldots)dx$$

باتوجه به اینکه $\int_0^{\pi}\cos kx\ dx=0$ $(k\neq 0)$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$I=\int_0^{\pi}1dx=\pi$$

تمرین ۱-۷۰: حاصل انتگرال $I=\int_0^{\pi}e^{a\cos x}\cos(a\sin x)\cos mxdx$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\frac{\pi a^m}{2(m!)}$ ۲) $\frac{\pi a^m}{(2m)!}$ ۳) $\frac{2\pi a^m}{m!}$ ۴) $\frac{2\pi a^m}{(2m)!}$

حل: با استفاده از توضیحات تست قبل می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\cos nx}{n!}\right]\cos mxdx$$

از طرفی، طبق خاصیت تعامد توابع مثلثاتی، خواهیم داشت:

$$\int_0^{\pi}\cos nx\cos mx\ dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{\pi}{2} & m=n\end{cases}\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}(\frac{a^m}{m!})$$

تمرین ۱-۷۱: حاصل انتگرال $I=\int_{0}^{\pi} e^{a\cos x}\cos(mx-a\sin x)dx$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟ ($n\in N$)

۱) $\frac{\pi a^m}{2(m!)}$ ۲) $\frac{\pi a^m}{(2m)!}$ ۳) $\frac{2\pi a^m}{m!}$ ۴) $\frac{2\pi a^m}{(2m)!}$

حل: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int_{0}^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x)\cos mx\ dx+\int_{0}^{2\pi} e^{a\cos x}\sin(a\sin x)\sin mx\ dx$$

$$=\int_{0}^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\cos nx}{n!}\right]\cos mx\ dx+\int_{0}^{2\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\sin nx}{n!}\right]\sin mx\ dx$$

طبق خاصیت تعامد توابع مثلثاتی خواهیم داشت:

$$I=\pi\left[\frac{a^m}{m!}\right]+\pi\left[\frac{a^m}{m!}\right]=\frac{2\pi a^m}{m!}$$

تمرین ۱-۷۲: حاصل سری فوریه مثلثاتی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}\cos(2n+1)x}{(2n+1)!}$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\cos(a\cos x)sh(a\sin x)$ ۲) $ch(a\cos x)\sin(a\sin x)$

۳) $\sin(a\cos x)ch(a\sin x)$ ۴) $sh(a\cos x)\cos(a\sin x)$

حل: باتوجه به اینکه در مخرج ضرایب سری فوریه داده شده، عامل $(2n+1)!$ وجود داشته و جملات یکی در میان تغییر علامت می‌دهند، به نظر می‌رسد باید از بسط مک لورن $\sin az$ استفاده شود. همچنین بدلیل کسینوسی بودن سری مثلثاتی داده شده، باید قسمت حقیقی بسط مک لورن تابع $\sin az$ را محاسبه کنیم. بنابراین:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}\cos(2n+1)x}{(2n+1)!}=\mathrm{Re}\{\sin(az)\}_{z=\cos x+i\sin x}=\mathrm{Re}\{\sin(a\cos x+ia\sin x)\}=\sin(a\cos x)ch(a\sin x)$$

بدیهی است که حاصل سری فوریه مثلثاتی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}\sin(2n+1)x}{(2n+1)!}$ برابر $\cos(a\cos x)sh(a\sin x)$ خواهد بود.

تمرین ۱-۷۳: حاصل انتگرال $I=\int_{0}^{2\pi}\sin(a\cos x)ch(a\sin x)\cos mx dx$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) 0 ۲) $\frac{\pi a^m}{m!}$ ۳) $\frac{\pi(-1)^{\frac{m-1}{2}}a^m}{m!}$ ۴) $\begin{cases}0 & m=2n\\ \frac{\pi(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} & m=2n+1\end{cases}$

حل: به کمک بسط فوریه مثلثاتی تابع $\sin(a\cos x)ch(a\sin x)$ می‌توان چنین نوشت:

$$\sin(a\cos x)ch(a\sin x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}\cos(2n+1)x}{(2n+1)!}\Rightarrow I=\int_{0}^{2\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}\cos(2n+1)x}{(2n+1)!}\right]\cos mx\ dx$$

از طرفی، طبق خاصیت تعامد توابع مثلثاتی خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{2\pi}\cos(2n+1)x\cos mx dx=\begin{cases}0 & m\neq 2n+1\\ \pi & m=2n+1\end{cases}\Rightarrow I=\begin{cases}0 & m=2n\\ \frac{\pi(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} & m=2n+1\end{cases}$$

تمرین ۱-۷۴: حاصل سری فوریه مثلثاتی $S=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a})^n\cos n\omega_0 t$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟ ($|b|<|a|$)

۱) $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-2ab\cos\omega_0 t}$ ۲) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2-2ab\cos\omega_0 t}$

۳) $\frac{a(\cos\omega_0 t-a)}{a^2+b^2-2ab\cos\omega_0 t}$ ۴) $\frac{a(a-b\cos\omega_0 t)}{a^2+b^2-2ab\cos\omega_0 t}$

حل: تابع $\cos n\omega_0 t$ را می‌توان، به صورت قسمت حقیقی تابع نمایی مختلط $e^{jn\omega_0 t}$ در نظر گرفت. بنابراین می‌توان چنین نوشت:

$$S=\mathrm{Re}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a})^n e^{jn\omega_0 t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a}e^{j\omega_0 t})^n\right\}$$

با استفاده از رابطه حد مجموع در سری‌های توانی، می‌توان چنین نوشت:

$$q+q^2+q^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q}\qquad |q|<1$$

بنابراین:

$$S=\mathrm{Re}\left\{1+2\frac{\frac{b}{a}e^{j\omega_0 t}}{1-\frac{b}{a}e^{j\omega_0 t}}\right\}=\mathrm{Re}\left\{1+2\frac{b\cos\omega_0 t+jb\sin\omega_0 t}{a-b\cos\omega_0 t-jb\sin\omega_0 t}\right\}=1+2\left(\frac{ab\cos\omega_0 t-b^2}{a^2+b^2-2ab\cos\omega_0 t}\right)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2-2ab\cos\omega_0 t}$$

تمرین ۱-۷۵: حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$ با شرط $-1<p<1$ برابر است با:

۱) $\frac{2\pi}{1-p^2}$ ۲) $\frac{2\pi}{1+p^2}$ ۳) $\frac{2\pi p^2}{1-p^2}$ ۴) $\frac{2\pi p}{1-p^2}$

حل: چنانچه از بسط فوریه مثلثاتی تابع $\frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{1}{1-p^2}\left\{\frac{1-p^2}{1-2p\cos\theta+p^2}\right\}=\frac{1}{1-p^2}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}p^n\cos n\theta\right\}$$

بنابراین:

$$I=\frac{1}{1-p^2}\int_0^{2\pi}(1+2\sum_{n=1}^{\infty}p^n\cos n\theta)d\theta$$

با توجه به رابطه $\int_0^{2\pi}\cos n\theta d\theta=0$ $(n\geq 1)$ می‌توان چنین نوشت:

$$I=\frac{2\pi}{1-p^2}$$

تمرین ۱-۷۶: $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ برابر است با: (بیوالکتریک – آزاد ۸۲، مکاترونیک آزاد ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{24}$

حل: در این مساله، می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases}1+a^2=5\\2a=4\end{cases}\Rightarrow a=2$$

با توجه به راه حل مساله قبل، خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^2}\int_0^{2\pi}[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\cos n\theta]\cos 3\theta\, d\theta$$

با توجه به خاصیت تعامد توابع مثلثاتی، خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^2}\int_0^{2\pi}2(\frac{1}{2})^3(\cos 3\theta)(\cos 3\theta)d\theta=\frac{2(\frac{1}{2})^3\pi}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\pi}{12}$$

تمرین ۱-۷۷: حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta\, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$ $(|a|>1)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2+1)}$ ۲) $\frac{\pi(a^6+2)}{a^6(a^2-1)}$ ۳) $\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$ ۴) $\frac{\pi(a^6+2)}{a^6(a^2+1)}$

حل: با استفاده از سری فوریه مثلثاتی تابع $\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}$ $(|a|>1)$ می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{1}{a^2-1}\left\{\frac{a^2-1}{1-2a\cos\theta+a^2}\right\}=\frac{1}{a^2-1}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a})^n\cos n\theta\right\}$$

بنابراین:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 6\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta=\frac{1}{2(a^2-1)}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a})^n\cos n\theta\right][1+\cos 6\theta]d\theta$$

طبق خاصیت تعامد توابع مثلثاتی خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{2(a^2-1)}\left[2\pi+2\pi(\frac{1}{a})^6\right]=\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$$

تمرین ۱-۷۸: حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta}d\theta$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{10}$ ۲) $\frac{\pi}{5}$ ۳) $\frac{\pi}{20}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

حل: با در نظر گرفتن $1+a^2=26$ و $2a=10$ داریم:

$$a=5\Rightarrow\frac{1}{26-10\cos 2\theta}=\frac{1}{25-1}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5})^n\cos 2n\theta\right\}$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{26-10\cos 2\theta}d\theta=\frac{1}{48}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5})^n\cos 2n\theta\right][1+\cos 2\theta]d\theta$$

با توجه به خاصیت تعامد توابع مثلثاتی، خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{48}\left\{2\pi+2\pi(\frac{1}{5})^1\right\}=\frac{1}{48}(\frac{12\pi}{5})=\frac{\pi}{20}$$

تابعی به شکل $f(\theta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$ را می‌توان به فرم سری فوریه مثلثاتی با ضرایب $a_0=1$ و $a_n=2(\frac{b}{a})^n$ در نظر گرفت.

با توجه به اینکه دوره تناوب این تابع برابر $T=2\pi$ است، می‌توان چنین نوشت:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\theta)\cos\frac{2\pi n\theta}{T}d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a^2-b^2)\cos n\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}=\frac{\pi}{a^2-b^2}a_n=\frac{2\pi}{a^2-b^2}(\frac{b}{a})^n$$

به همین ترتیب، رابطه روبرو نیز در حالت کلی برقرار است:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}d\theta=0$$

همچنین، تابعی به شکل $f(\theta)=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b\cos\theta}$ ، $(|a|>|b|)$ را می‌توان به فرم سری فوریه مثلثاتی با ضرایب $a_0=1$ و $a_n=2(\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}})$ در نظر گرفت. با استفاده از رابطه ضرایب سری فوریه این تابع، روابط انتگرالی زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a-b\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{a-b\cos\theta}d\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}(\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}})^n$$

تمرین ۱-۷۹: حاصل انتگرال $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\pi\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

حل: بااستفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin^2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta$ می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2d\theta}{3-\cos 2\theta}$$

اگر از تغییر متغیر $2\theta=\varphi$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$I=\int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{d\varphi}{3-\cos\varphi}=2\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{3-\cos\varphi}=\frac{4\pi}{\sqrt{9-1}}=\pi\sqrt{2}$$

تمرین ۱-۸۰: مقدار انتگرال $\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$ کدام گزینه است؟ (بیومتریال – آزاد ۸۷)

۱) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{2\pi}{2\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

حل: ظاهر انتگرال، نشان می‌دهد، باید از رابطه $\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ استفاده کنیم. با توجه به اینکه، در انتگرال خواسته شده، عبارت واقع در مخرج به توان ۲ رسیده است، می‌توان نتیجه گرفت، باید از طرفین رابطه قبل، نسبت به پارامتر a واقع در مخرج، مشتق بگیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{\pi}\frac{-d\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\frac{-\pi a}{\sqrt{(a^2-1)^3}}\xrightarrow{a=2}\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

تمرین ۱-۸۱: حاصل انتگرال $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(1+P^2-2P\cos\theta)^2}d\theta$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟ $(-1<P<1)$

۱) $\frac{2\pi P^2}{(1-P^2)^2}$ ۲) $\frac{2\pi(1+P^2)}{(1-P^2)^3}$ ۳) $\frac{2\pi(1+P^2)}{(1-P^2)^2}$ ۴) $\frac{2\pi P^2}{(1-P^2)^3}$

حل: می‌دانیم که بسط فوریه مثلثاتی تابع $(-1<P<1)$ $f(\theta)=\frac{1}{1+P^2-2P\cos\theta}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f(\theta)=\frac{1}{1-P^2}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(P)^n\cos n\theta\right\}$$

بنابراین، با استفاده از رابطه پارسوال، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(1+P^2-2P\cos\theta)^2}d\theta=\frac{1}{(1-P^2)^2}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}P^{2n}\right\}$$

بنابراین:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(1+P^2-2P\cos\theta)^2}d\theta=\frac{2\pi}{(1-P^2)^2}\left\{1+2P^2+2P^4+2P^6+\dots\right\}$$

از طرفی، با استفاده از روش محاسبه حد مجموع، خواهیم داشت:

$$2P^2+2P^4+2P^6+\dots=\frac{2P^2}{1-P^2}\qquad |P|<1$$

بنابراین:

$$I=\frac{2\pi}{(1-P^2)^2}\left\{1+\frac{2P^2}{1-P^2}\right\}=\frac{2\pi(1+P^2)}{(1-P^2)^3}$$

تمرین ۱-۸۲: ثابت بسط به سری فوریه تابع $|a|<1$، $f(\theta)=\frac{1}{1-a\cos\theta}$ را بدست آورید: (نانو مواد- سراسری ۹۱)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{2^n}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(2n)!}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n)!}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{a}{2})^n$

حل: با توجه به اینکه $|a|<1$ می باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{1}{1-a\cos\theta}=1+a\cos\theta+a^2\cos^2\theta+a^3\cos^3\theta+\dots$$

با توجه به اینکه مقدار ثابت $\cos^{2n+1}\theta$ برابر صفر و مقدار ثابت $\cos^{2n}\theta$ برابر $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ می باشد، خواهیم داشت:

$$f(\theta)\ \text{مقدار ثابت}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!a^{2n}}{4^n(n!)^2}$$

بنابراین، هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد. اگر منظور طراح سوال، مقدار تقریبی ثابت بسط فوریه $f(\theta)$ باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1-a\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\qquad |a|<1$$

با استفاده از تقریب $\sqrt{1-x}\simeq 1-\frac{x}{2}$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{1}{1-\frac{a^2}{2}}=1+\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{4}+\frac{a^6}{8}+\dots\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{2^n}$$

ایستگاه نکته و تست فصل اول

بخش اول) انواع تقارن

در بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ با دوره تناوب پایه‌ای T به‌صورت: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2\pi nx}{T}+b_n\frac{2\pi nx}{T})$

ضرایب a_n و b_n مطابق جدول زیر محاسبه می‌گردد:

فرمول محاسبه ضرایب سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$	ویژگی تابع $f(x)$	نوع تقارن
$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx$ $b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx$	-	نه فرد و نه زوج
$a_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx$ $b_n=0$	$f(-x)=f(x)$	تقارن زوج
$a_n=0$ $b_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx$	$f(-x)=-f(x)$	تقارن فرد
$a_{2n}=b_{2n}=0 \quad (n\geq 1)$ $a_{2n-1}=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{(2n-1)2\pi x}{T}dx$ $b_{2n-1}=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{(2n-1)2\pi x}{T}dx$	$f(x+\frac{T}{2})=-f(x)$	تقارن نیم موج
$b_n=0 \quad a_{2n}=0$ $a_{2n-1}=\frac{8}{T}\int_{0}^{\frac{T}{4}}f(x)\cos\frac{(2n-1)2\pi x}{T}dx$	$\begin{cases}f(-x)=f(x)\\ f(x+\frac{T}{2})=-f(x)\end{cases}$	ربع موجی زوج
$a_n=0 \quad b_{2n}=0$ $b_{2n-1}=\frac{8}{T}\int_{0}^{\frac{T}{4}}f(x)\sin\frac{(2n-1)2\pi x}{T}dx$	$\begin{cases}f(-x)=-f(x)\\ f(x+\frac{T}{2})=-f(x)\end{cases}$	ربع موجی فرد
$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx \quad a_n=0 \quad (n\geq 1)$ $b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx$	-	تقارن مخفی فرد

بدیهی است که اگر $\begin{cases}f(-x)=f(x)\\ f(x+\frac{T}{2})=f(x)\end{cases}$ یا $\begin{cases}f(-x)=-f(x)\\ f(x+\frac{T}{2})=f(x)\end{cases}$ باشد، آنگاه دوره تناوب تابع $f(x)$ را می‌توان به جای T مقدار $\frac{T}{2}$ نیز در نظر گرفت.در این صورت اگر بخواهیم ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ را بر اساس دوره تناوب T بنویسیم، فقط ضرایب a_{2n} و b_{2n} می‌توانند غیر صفر باشند. $(a_{2n-1}=b_{2n-1}=0)$

در برخی از تست‌ها، می‌توان با بررسی وضعیت تقارن تابع متناوب $f(x)$ (با دوره تناوب پایه‌ای T) نسبت به محورهای عمودی $x=0$ و $x=\frac{T}{4}$، ضرایب غیر صفر بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ را مطابق جدول زیر تعیین کرد:

ضرایب غیر صفر	وضعیت تقارن تابع $f(x)$ نسبت به محور $x=\frac{T}{4}$	وضعیت تقارن تابع $f(x)$ نسبت به محور $x=0$
a_{2n}	زوج	زوج
a_{2n-1}	فرد	زوج
b_{2n-1}	زوج	فرد
b_{2n}	فرد	فرد

تقارن مخفی: چنانچه نمودار یک تابع متناوب با تقارن فرد را در راستای عمودی جابجا کنیم (مقدار ثابتی را به آن تابع اضافه یا از آن کم کنیم) از وضعیت تقارن فرد خارج خواهدشد. در این حالت می‌گوییم تابع حاصل تقارن مخفی دارد.

در تست‌ها برای تشخیص تقارن مخفی یک تابع متناوب داده شده، کافی است نمودار آن تابع را در راستای عمودی جابجا کنیم. (مقدار متوسط آنرا حذف کنیم) چنانچه در اثر این جابجایی، تقارن فردی آشکار گردد، می‌گوییم آن تابع تقارن مخفی دارد و می‌توانیم سری فوریه مثلثاتی آنرا به شکل مقابل بنویسیم: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi nx}{T}$

تابع متناوب $f(x)$ را که نه تقارن فرد و نه تقارن زوج دارد، می‌توان به صورت مجموع دو تابع متناوب با تقارن‌های فرد و زوج به صورت مقابل نوشت: $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

۱- اگر تابع $0<x<L$ و $f(x)$ دارای دو سری فوریه $(b)\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$, $(a)\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ آنگاه کدام گزینه صحیح است: (مهندسی هوا و فضا – سراسری ۸۱)

۱) (a) بر (b) ارجحیت دارد.
۲) (b) بر (a) ارجحیت دارد.
۳) (b) و (a) ارجحیتی بر یکدیگر ندارند.
۴) در بعضی از مسائل (a) بر (b) ارجحیت داردو برعکس.

۲- در بسط فوریه تابع $-\pi<x<\pi$ ، $f(x)=x$ که $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ است. مقدار a_n برابر است با:

۱) صفر
۲) $\frac{-1}{n}$
۳) $\frac{(-1)^n}{n}$
۴) $\frac{1}{n^2}$ (برق – آزاد ۸۲، هوا فضا سراسری ۸۳)

۳- سری فوریه تابع $f(x)=\cos 2x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ با دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ چگونه است؟

۱) سینوسی
۲) کسینوسی
۳) سینوسی – کسینوسی
۴) سری فوریه ندارد

۴- در سری فوریه مثلثاتی تابع زیر $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<-\frac{\pi}{2} \\ -a(x+\frac{\pi}{2}) & -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ a(x-\frac{\pi}{2}) & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ ، ضریب $\sin nx$ کدام است؟ (مهندسی مواد – سراسری ۸۴)

۱) صفر
۲) $\frac{a}{\pi n^2}$
۳) $\frac{2a}{\pi n^2}$
۴) $\frac{2a(-1)^n}{\pi n^2}$

۵- تابع متناوب $p=2\pi, \delta(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<\pi, x\neq 0 \\ \infty & x=0 \end{cases}$ دارای یک سری فوریه به‌صورت $\delta(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ است. کدام گزینه صحیح می‌باشد؟ (مهندسی مواد - آزاد ۸۴)

۱) $b_n=0, a_n=\frac{1}{\pi}, n\neq 0$

۲) a_n و b_n موجود نیستند.

۳) $a_n=0, b_n=\frac{1}{\pi}$

۴) $b_n=\frac{2}{\pi}, a_n=\frac{1}{\pi}$

۶- مقدار b_5 در بسط فوریه سینوسی تابع $0<x<\pi$ و $f(x)=\cos x$ با دوره تناوب 2π کدام است؟ (برق- آزاد ۸۱)

۱) صفر

۲) $\frac{40}{99\pi^2}$

۳) $\frac{40}{99\pi}$

۴) $\frac{5}{99\pi}$

۷- هرگاه $f(x)=\begin{cases} \sin x & ; \quad 0\leq x<2\pi \\ -\sin x & ; \quad -2\pi\leq x<0 \end{cases}$ و $f(x+4\pi)=f(x)$ آنگاه در سری فوریه $f(x)$ فقط ضرایب جملات زیر ممکن است غیر صفر باشند. (برق- سراسری ۷۰)

۱) زوج کسینوسی

۲) فرد کسینوسی

۳) زوج سینوسی

۴) فرد سینوسی

۸- اگر بسط به سری کسینوسی فوریه $0<x<\pi, f(x)=x$ به‌صورت مقابل باشد $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+...)$ بسط به سری سینوسی $0<x<\pi, g(x)=x(\pi-x)\frac{\pi}{8}$ برابر است با: (برق - سراسری ۷۸)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{(2n)^3}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n^3}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$

۹- اگر تابع f در یک دوره تناوب به‌صورت $f(x)=\frac{L}{2}-x$ ، $0<x<L$ ، تعریف شده باشد، آنگاه: (مهندسی شیمی - بیوتکنولوژی و نانومواد - سراسری ۸۸)

۱) $\frac{L}{2}-x=\frac{L}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x$

۲) $\frac{L}{2}-x=\frac{L}{\pi}\sum\frac{1}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x$

۳) $\frac{L}{2}-x=\frac{L}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

۴) $\frac{L}{2}-x=\frac{L}{\pi}\sum(\frac{1}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x+\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x)$

بخش دوم) سیستم توابع متعامد

سیستم نامحدود متشکل از توابع حقیقی $\Phi_0(x)$ و $\Phi_1(x)$ و $\Phi_2(x)$ و $\Phi_3(x)$ و ... را در بازه $[a,b]$ متعامد می‌نامند، هر گاه به ازای هر m و n غیر یکسان $(m \neq n)$ داشته باشیم:

$$\int_a^b \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx = 0 \qquad (m \neq n \qquad m,n = 0,1,2,3,...)$$

$$\int_a^b \Phi_n^2(x)dx \neq 0$$

سیستم متعامد فوق را کامل می‌نامند، هرگاه بتوان هر تابع تعریف شده در بازه $[a,b]$ را به صورت ترکیب خطی از توابع $\Phi_0(x)$ و $\Phi_1(x)$ و $\Phi_2(x)$ و $\Phi_3(x)$ ... نوشت.

سیستم توابع متعامد $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$ $(n \geq 1)$ یک دستگاه متعامد کامل در بازه $[-L,L]$ است.

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = 0$$

- ✓ سیستم توابع متعامد $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$ $(n \geq 1)$ یک دستگاه متعامد کامل در بازه $[0,L]$ است.

$$\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{L}{2} & m = n \end{cases}$$

- ✓ سیستم توابع متعامد $\left\{\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$ $(n \geq 1)$ یک دستگاه متعامد کامل در بازه $[0,L]$ است.

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{L}{2} & m = n \end{cases}$$

- ✓ سیستم توابع متعامد $\left\{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right\}$ $(n \geq 1)$ یک دستگاه متعامد کامل در بازه $[0,L]$ است.

$$\int_0^L \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{L}{2} & m = n \end{cases}$$

- ✓ سیستم توابع متعامد $\left\{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right\}$ $(n \geq 1)$ یک دستگاه متعامد کامل در بازه $[0,L]$ است.

$$\int_0^L \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{L}{2} & m = n \end{cases}$$

- ✓ سیستم توابع متعامد $\left\{\sin\frac{\xi_n x}{L}\right\}$ $(n \geq 1)$ که ξ_i جواب معادله غیر جبری $tg\xi = c\xi$ می‌باشد، (c عدد ثابت) نیز در بازه $[0,L]$ متعامد است، زیرا:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\xi_n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\xi_m x}{L}\right)dx = 0 \qquad n \neq m$$

- ✓ دستگاه توابع $\left\{\cos\frac{\xi_n x}{L}\right\}$ $(n \geq 1)$ که در آن ξ_iها ریشه‌های معادله $\cot\xi = c\xi$ می‌باشند، نیز متعامد است.
- ✓ نمونه مهمی از دستگاه متعامد در بازه $[-1,1]$ عبارتست از چند جمله‌ای‌های لژاندر

$$n = 1,2,3,... \qquad P_n(x) = \left(\frac{1}{2^n n!}\right)\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad \text{و} \quad P_0(x) = 1 \quad \text{زیرا:}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n dx = 0 \qquad m \neq n$$

✓ نمونه مهم دیگری از دستگاه متعامد در بازه $[0,1]$ عبارتست از توابع بسل، که برای سادگی تنها تابع $J_0(x)$ را در نظر می‌گیریم، ولی همه آنچه را که بیان می‌کنیم برای $J_n(x)$ $(n>0)$ هم درست است.

در نظریه توابع بسل، ثابت می‌شود که $J_0(x)$ مجموعه‌ای نامتناهی از ریشه‌های مثبت دارد که اگر این ریشه‌ها را $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n,\dots$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\int_0^1 \sqrt{x}J_0(\xi_n x)J_0(\xi_m x)dx=0 \qquad (m\neq n)$$

در نتیجه می‌توان گفت سیستم توابع $\{\sqrt{x}J_0(\xi_n x)\}$ در بازه $[0,1]$ متعامدند.

با استفاده از خاصیت تعامد توابع مثلثاتی، می‌توان حاصل برخی از انتگرال‌ها را محاسبه نمود که مهمترین آنها به شرح زیر می‌باشد:

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\,dx=\frac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2} \quad , \quad \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a\pm b\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=0 \quad , \quad \int_0^{2\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=2\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}=\frac{2\pi}{a^2-b^2} \quad |a|>|b| \quad , \quad \int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}d\theta=\frac{2\pi(\frac{b}{a})^n}{a^2-b^2} \quad |a|>|b|$$

برخی از این انتگرالها را می‌توان، با استفاده از قضیه مانده‌ها (مبحث اعداد مختلط) نیز محاسبه کرد.

۱۰- تحت چه شرایطی رابطه $\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0$ برقرار است؟ (مهندسی معدن – سراسری ۸۲)

۱) اگر m و n فقط اعداد صحیح باشند.
۲) اگر m و n اعداد صحیح و نامساوی باشند.
۳) برای کلیه مقادیر m و n برقرار است.
۴) به ازای هیچ مقدار m و n تساوی برقرار نیست.

۱۱- مجموعه توابعی که درفاصلهٔ $[a,b]$ تکه‌یی پیوسته هستند با $C_p[a,b]$ نمایش داده می‌شود.به‌علاوه مجموعه‌های S و C چنین تعریف می‌شوند:
$S\triangleq\{\sin x,\sin 2x,\sin 3x,\dots\}$ و $C\triangleq\{1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\dots\}$ می‌توان گفت که: (دکتری برق- آزاد ۸۷)

۱) مجموعهٔ S برای $C_p[-\pi,\pi]$ یک مجموعهٔ متعامد کامل است.
۲) مجموعهٔ $C\cup S$ برای $C_p[-\pi,\pi]$ یک مجموعهٔ متعامد کامل است.
۳) مجموعهٔ C برای $C_p[-\pi,\pi]$ یک مجموعهٔ متعامد کامل است.
۴) مجموعهٔ $C\cup S$ برای $C_p[0,\pi]$ یک مجموعهٔ متعامد کامل است.

۱۲-می‌توان گفت که مجموعهٔ $\{\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cos 3x,\sin 3x,\dots\}$ برای مجموعهٔ توابع تکه‌ای پیوسته روی فاصلهٔ $-\pi\le x\le\pi$. (دکتری برق- آزاد ۸۹)

۱) نسبت به تابع وزن $w(x)=1$ یک مجموعهٔ متعامد و کامل است.
۲) نسبت به تابع وزن $w(x)=1$ یک مجموعهٔ متعامد است اما کامل نیست.
۳) نسبت به تابع وزن $w(x)=e^x$ یک مجموعهٔ متعامد و کامل است.
۴) نسبت به تابع وزن $w(x)=e^x$ یک مجموعهٔ متعامد است اما کامل نیست.

۱۳- اگر $P_m(x)$ و $P_n(x)$، چند جمله‌ای‌های لژاندر باشند، آنگاه مطلوب است مقدار انتگرال مقابل: $\int_0^{\pi}[P_m(\cos t)]^2\sin t\,dt$ (بیوالکتریک – آزاد ۸۱)

۱) $\frac{3}{3m+4}$
۲) $\frac{2}{2m+1}$
۳) $\frac{5}{2m-3}$
۴) $\frac{7}{3m-5}$

۱۴- اگر $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$ و $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ به ترتیب دارای جواب‌هایی به صورت $y_1(x)$ و $y_2(x)$ باشند داریم: (برق – ۷۶)

۱) $\int_{-1}^{1}xy_1y_2dx=0$
۲) $\int_{-1}^{1}y_1y_2dx=0$
۳) $\int_{-1}^{1}y_1y_2dx=\frac{2}{5}$
۴) $\int_{-1}^{1}y_1y_2dx=\frac{2}{3}$

۱۵- اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$، آنگاه $\int_0^{\pi}f(x)\sin^2 x\,dx$ کدام است؟ (مهندسی نانو مواد – سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{\pi}{16}$
۲) $-\frac{\pi}{8}$
۳) صفر
۴) $+\frac{\pi}{4}$

۱۶- انتگرال $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}}$ برابر است با: (مکاترونیک – آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2π ۴) ۱

۱۷- حاصل $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ کدام است؟ (بیوالکتریک – آزاد ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{3\pi}{8}$

۱۸- مقدار I در انتگرال معین مقابل کدام است؟ $a>b>0$ $I=\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^2\theta\, d\theta}{a+b\cos\theta}$ (مکاترونیک – آزاد ۸۴)

۱) $\frac{2\pi a}{b^2}$ ۲) $\frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$ ۳) $2\pi\left(\frac{a}{b^2}-\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$ ۴) $\frac{-2\pi}{b^2}\sqrt{a^2-b^2}$

۱۹- حاصل انتگرال $I=\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ وقتی که $-1<a<1$ باشد برابر است با: (مهندسی مواد – آزاد ۹۰)

۱) $I=\frac{2\pi a^2}{1-a^2}$ ۲) $I=\frac{\pi a^2}{1-a^2}$ ۳) $I=\frac{\pi a}{1-a^2}$ ۴) $I=\frac{n(a^2+1)}{1-a^2}$

۲۰- مقدار انتگرال $\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{5-4\cos\theta}d\theta$ برابر است با: (فیزیک – سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

بخش سوم) محاسبه مقدار متوسط سری فوریه

در بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ با دوره تناوب پایه‌ای T بصورت $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2\pi nx}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{T})$ ضریب a_0 بیانگر مقدار متوسط (مقدار dc) تابع $f(x)$ می‌باشد.

در بعضی از کتاب‌ها برای اینکه برای a_n و a_0 فرمول جداگانه‌ای ننویسند، عدد ثابت بسط فوریه مثلثاتی را به جای a_0 با $\frac{a_0}{2}$ نشان می‌دهند که در این حالت مقدار $\frac{a_0}{2}$ بیانگر مقدار متوسط تابع $f(x)$ خواهد بود.

$$(\frac{a_0}{2}\ \text{یا})\ a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\frac{\text{مساحت زیر نمودار تابع } f(x) \text{ در یک دوره تناوب}}{\text{طول دوره تناوب}}$$

✓ مقدار متوسط یک تابع متناوب با تقارن فرد برابر صفر است.

✓ مقدار متوسط یک تابع نمی‌تواند بزرگتر از مقدار ماکزیمم تابع یا کوچکتر از مقدار مینیمم آن تابع باشد.

در برخی از تست‌ها، با دانستن حاصل برخی از سری‌های عددی معروف، می‌توان مقدار متوسط تابع و فرم صحیح سری فوریه آن را، با توجه به گزینه‌های داده شده، تعیین کرد. مهمترین این سری‌های عددی که در مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرند، عبارتند از:

$$\beta(1)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots=\frac{\pi}{4} \qquad \eta(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\xi(1)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6} \qquad \lambda(2)=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$

مقدار ثابت بسط فوریه توابع $(\cos x)^{2n}$ و $(\sin x)^{2n}$ با دوره تناوب $T=2\pi$ برابر $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ می‌باشد.

مقدار ثابت بسط فوریه توابع $(\cos x)^{2n+1}$ و $(\sin x)^{2n+1}$ با دوره تناوب $T=2\pi$ برابر صفر می‌باشد.

۲۱- در بسط فوریه، a_0 چه چیز را مشخص می‌کند؟ (کامپیوتر- آزاد ۸۰)

۱) مقدار موثر یک سیگنال
۲) نصف مقدار موثر یک سیگنال
۳) مقدار dc یک سیگنال
۴) میانگین بین مقدار dc یک سیگنال و مقدار موثر آن

۲۲- در بسط فوریه تابع $f(x)=4x$ ، $0<x<10$ و دوره تناوب ۱۰ مقدار جمله اول برابر است با: (برق – آزاد ۸۳)

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

۲۳- جمله اول بسط فوریه تابع $f(x)=1-x$ $-1\le x\le 1$ کدام است؟ (برق – آزاد ۸۵)

۱) -1 ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -2

۲۴- در صورتی که در تابع $f(x)=x$ ، مقدار x بین π و $-\pi$ تغییر کند، مطلوب است مقدار ثابت بسط مثلثاتی فوریه این تابع:

(مهندسی شیمی – بیوتکنولوژی داروسازی – سراسری ۸۷)

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۵- مقدار میانگین تابع $f(t)=\sin\frac{\pi}{L}t$ و $0<t<L$ برابر است با: (معماری کشتی- سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۲۶- اگر برای $-\pi<x<\pi$ داشته باشیم: $x=2(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...)$ ؛ در این صورت عبارت $(\pi-x)(\pi+x)$ دربارهٔ $-\pi\le x\le\pi$ با کدام گزینه برابر است؟ (کامپیوتر- سراسری ۸۱)

۱) $\pi^2-4(\sin^2 x-\frac{\sin^2 2x}{4}+\frac{\sin^2 3x}{9}-...)$

۲) $\frac{\pi^2}{3}-4(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-...)$

۳) $\frac{2\pi^2}{3}+4(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-...)$

۴) $\frac{\pi^2}{3}+4(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-...)$

۲۷- سری فوریه تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب $T=2$ ، کدامیک از عبارات زیر می‌باشد؟ $(-1<t<1)$ $f(t)=t^2$ (بیوالکتریک – ۸۱)

۱) $\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi t-\frac{1}{2}\sin 2\pi t+-...\right)$

۲) $\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi t-\frac{1}{4}\cos 2\pi t+-...\right)$

۳) $\frac{1}{\pi}\left(\cos\pi t-\frac{1}{2}\cos 3\pi t+-...\right)$

۴) $\frac{1}{6}-\frac{5}{\pi}(\sin\pi t+\sin 3\pi t+...)$

۲۸- اگر سری فوریه کسینوسی تابع $P=2L=4, f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 2 & 1<x<2\end{cases}$ ، برابر با $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2}+...)$ باشد، آنگاه جمله a_0 در سری فوریه کسینوسی تابع $P=2L=4, g(x)=\begin{cases}2 & 0<x<1\\ 3 & 1<x<2\end{cases}$ عبارتست از: (ابزار دقیق و اتوماسیون – سراسری ۸۸)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۹- جمله a_0 در بسط فوریه تابع تناوبی $(0<x<2)$ $f(x)=2-x$ بادوره تناوب $p=2$ عبارتست از: (ابزار دقیق و اتوماسیون – سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $-\frac{1}{2}$

۳۰- بسط فوریه تابع دلتای دیراک $\delta(t)$ کدام است؟ (برق – سراسری ۶۷)

۱) $\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sin nt)$ ۲) $\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt)$ ۳) $\frac{1}{\pi}(2+\sum_{n=1}^{\infty}\sin nt)$ ۴) $\frac{1}{\pi}(2+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt)$

۳۱- سری فوریه کسینوسی نیم دامنه‌ی تابع $f(x)=x(L-x), 0\le x\le L$ ، کدام است؟ (مکانیک – سراسری ۹۲)

۱) $\frac{L^2}{4}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{L}$

۲) $\frac{L^2}{3}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L^2}{(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{L}$

۳) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{L}$

۴) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

بخش چهارم) سری فوریه توابع پله‌ای شکل

تابع پله‌ای شکل متناوبی را که بازه تعریف دامنه‌های مختلف آن یکسان باشد، تابع پله‌ای شکل متقارن می‌نامیم.

در بسط فوریه مثلثاتی تابع پله‌ای شکل متقارن، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی یا سینوسی وجود دارد.

در بسط فوریه مثلثاتی تابع پله‌ای شکل متقارن زوج، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارند که یک در میان تغییر علامت می‌دهند. چنانچه در $x=0$ ماکزیمم تابع رخ دهد، علامت اولین هارمونیک مثبت است و اگر در $x=0$ مینیمم تابع رخ دهد، علامت اولین هارمونیک منفی خواهد بود.

$$\text{مقدار متوسط} = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases} A_1 & -\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2} \quad |x|<\frac{L}{2} \\ A_2 & \frac{L}{2}<x<L \quad , \quad -L<x<\frac{-L}{2} \end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases} 0 & n=2m \\ -\frac{2(A_1-A_2)(-1)^m}{(2m-1)\pi} & n=2m-1 \end{cases}$$

در بسط فوریه مثلثاتی تابع پله‌ای شکل متقارن فرد، فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارند که همگی آنها هم علامت‌اند. چنانچه نمودار تابع متناوب حاصل تداعی کننده شکل موج $\sin x$ باشد، علامت همه هارمونیک‌ها مثبت است و اگر نمودار حاصل تداعی کننده شکل موج $-\sin x$ باشد، علامت همه هارمونیک‌ها منفی خواهد بود.

$$f(x)=\begin{cases} A_1 & 0<x<L \\ -A_1 & -L<x<0 \end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases} 0 & n=2m \\ \frac{4A_1}{(2m-1)\pi} & n=2m-1 \end{cases}$$

در بسط فوریه تابع پله‌ای شکل با تقارن مخفی فرد نیز، فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارد.

$$f(x)=\begin{cases} A_1 & 0<x<L \\ A_2 & -L<x<0 \end{cases} \xrightarrow[A_1\neq A_2]{} \begin{cases} a_n=0 & n\geq 1 \\ a_0=\frac{A_1+A_2}{2} \\ b_{2n}=0 \end{cases}$$

۳۲- مطلوب است بسط $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi<x<0 \\ 1 & 0<x<\pi \end{cases}$ بر حسب یک سری سینوسی فوریه. (مکانیک «تبدیل انرژی و طراحی جامدات» آزاد ۸۰)

۱) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

۲) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$

۳) $f(x)=\frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$

۴) $f(x)=\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$

۳۳- سری فوریهٔ $f(x)=\begin{cases} -1 & -4\leq x<0 \\ 1 & 0<x<4 \end{cases}$ کدام است؟ (کامپیوتر – سراسری ۸۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{4}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{4}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}$

۳۴- سری فوریهٔ تابع متناوب $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi\leq x<0 \\ 1 & 0\leq x\leq\pi \end{cases}$ کدام است؟ (هوا و فضا – سراسری ۸۵)

۱) $\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+...)$

۲) $\frac{4}{\pi}(\sin 2x+\frac{\sin 3x}{2!}+\frac{\sin 4x}{3!}+...)$

۳) $\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{\sin 2x}{2!}+\frac{\sin 3x}{3!}+...)$

۴) $\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+...)$

۳۵- سری فوریه تابع تناوبی $0<|x|<\pi$ و $f(x)=\frac{x}{|x|}$ با دوره تناوب $P=2\pi$ عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون – سراسری ۸۷)

۱) $\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...)$

۲) $\frac{\pi}{4}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...)$

۳) $\frac{4}{\pi}(\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x-+...)$

۴) $\frac{\pi}{4}(\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x-...)$

۳۶- سری فوریه تابع زیر کدام است؟ (بیو الکتریک – آزاد ۸۲)

$$f(x)=\begin{cases}-2 & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}\qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

۱) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

۲) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

۳) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$

۴) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(2n-1)x}{2n-1}$

۳۷- سری فوریه تابع زیر کدام است؟ (مکاترونیک – آزاد ۸۷)

$$f(x)=\begin{cases}-\sin 1^\circ & -\pi<x<0\\ \sin 1^\circ & 0<x<\pi\end{cases}$$

۱) $\frac{4\sin 1^\circ}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)}{2n-1}$

۲) $\frac{4\sin 1^\circ}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(2n-1)x}{2n-1}$

۳) $\frac{4\sin 1^\circ}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$

۴) $\frac{4\sin 1^\circ}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

۳۸- سری فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}0 & -2<t<-1\\ k & -1<t<1\\ 0 & 1<t<2\end{cases}$ با دوره تناوب $T=4$، $f(t+4)=f(t)$ عبارت است از: (مهندسی هوا و فضا- سراسری ۸۰)

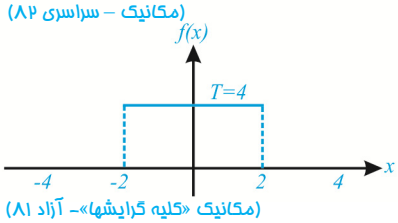
۱) $f(t)=\frac{k}{2}+\frac{k}{\pi}(\cos\pi t-\frac{1}{3}\cos 3\pi t+\frac{1}{5}\cos 5\pi t-...)$

۲) $f(t)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}(\sin\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}t+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2}t-...)$

۳) $f(t)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}t-...)$

۴) $f(t)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}(\sin\pi t-\frac{1}{3}\sin 3\pi t+\frac{1}{5}\sin 5\pi t-...)$

۳۹- در بسط فوریه تابع متناوب شکل روبرو ضریب $\cos 4x$ کدام است؟ (مکانیک – سراسری ۸۲)



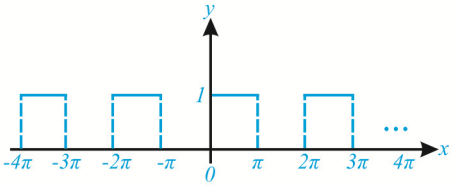
۱) $-\frac{1}{2\pi}$

۲) 0

۳) $\frac{1}{2\pi}$

۴) $\frac{1}{4\pi}$

۴۰- بسط سری فوریه تابع پله‌ای شکل زیر عبارت است از: (مکانیک «کلیه گرایشها»- آزاد ۸۱)



۱) $f(x)=1-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}\cos 2nx$

۲) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

۳) $f(x)=1+\frac{2}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$

۴) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 2nx}{2n}$

۴۱- ضرایب a_2 و a_3 در سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 2 & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$ کدامند؟ (مکانیک – سراسری ۸۲)

۱) $a_2=0, a_3=\frac{2}{3\pi}$

۲) $a_2=\frac{2}{3\pi}, a_3=\frac{-2}{5\pi}$

۳) $a_2=\frac{2}{3\pi}, a_3=0$

۴) $a_2=0, a_3=-\frac{2}{5\pi}$

۴۲- سری فوریه‌ی تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x\le\pi\end{cases}$ کدام است؟ (مهندسی هوا و فضا – سراسری ۸۴)

۱) $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{2k}$

۲) $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}$

۳) $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}\sin kx$

۴) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x+\frac{1}{k}\cos kx\right)$

۴۳- سری فوریه نیم دامنه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ کدام است؟ (بیومتریال – آزاد ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi}\cos(2m-1)x$

۲) $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi}\cos(mx)$

۳) $\frac{1}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi}\cos(2m-1)x$

۴) $\frac{1}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi}\cos mx$

۴۴- سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع f را بنویسید هرگاه در ناحیه‌ای که f غیر صفر است، تعریف آن به صورت $f(x)=H(-x)-2H(1-x)+H(2-x)$ باشد که در آن $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$. (برق – سراسری ۸۵)

۱) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۲) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۳) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۴) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^{m}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

بخش پنجم) سری فوریه توابع مثلثی شکل

تابع متناوب $f(x)$ را که نمودار آن در هر دوره تناوب به شکل یک مثلث متساوی الساقین (شیب‌های مثبت و منفی یکسان) باشد، شیب متقارن می‌نامیم.

در بسط فوریه مثلثاتی شیب متقارن، فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی و کسینوسی وجود دارند. $(a_{2n}=b_{2n}=0 \quad , \quad n\geq 1)$

در بسط فوریه مثلثاتی شیب متقارن زوج، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارند $(b_n=0, a_{2n}=0, n\geq 1)$ که همگی آنها هم علامت‌اند. چنانچه در $x=0$ ماکزیمم تابع رخ دهد علامت همه هارمونیک‌ها مثبت است و اگر در $x=0$ مینیمم تابع رخ دهد، علامت همه هارمونیک‌ها منفی است.

$$f(x)=\begin{cases} mx & 0\leq x\leq L \\ m(2L-x) & L\leq x\leq 2L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n=0 \\ a_n=\begin{cases} 0 & n=2k \quad (k\geq 1) \\ \pm\dfrac{4mL}{(2k+1)^2\pi^2} & n=2k+1 \end{cases} \end{cases}$$

در بسط فوریه مثلثاتی شیب متقارن فرد، فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارند $(a_n=0, b_{2n}=0, n\geq 0)$ که یک در میان تغییر علامت می‌دهند. چنانچه نمودار تابع متناوب حاصل تداعی کننده شکل موج $\sin x$ باشد، علامت اولین هارمونیک سینوسی مثبت است و اگر نمودار تابع متناوب حاصل تداعی کننده شکل موج $-\sin x$ باشد، علامت اولین هارمونیک سینوسی منفی خواهد بود.

$$f(x)=\begin{cases} mx & -\dfrac{L}{2}\leq x\leq \dfrac{L}{2} \\ m(2L-x) & \dfrac{L}{2}\leq x\leq \dfrac{3L}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n=0 \\ a_n=\begin{cases} 0 & n=2k \\ \pm\dfrac{4mL(-1)^n}{n^2\pi^2} & n=2k-1 \end{cases} \end{cases}$$

تابع متناوب $f(x)$ را که نمودار آن در هر دوره تناوب به شکل یک مثلث قائم الزاویه باشد (فقط شامل شیب مثبت یا فقط شامل شیب منفی باشد) موج دندان اره‌ای می‌نامند.

در بسط فوریه مثلثاتی تابع موج دندانه اره‌ای متناوب با تقارن فرد، یا تقارن مخفی فرد، فقط هارمونیک‌های زوج و فرد سینوسی وجود دارند. $(a_n=0 \quad , \quad n\geq 1)$

اگر دوره تناوب تابع موج دندانه اره‌ای برابر $T=2L$ باشد و ناپیوستگی تابع در $x=L$ (نصف دوره تناوب) رخ دهد، هارمونیک‌ها یک در میان تغییر علامت می‌دهند و در حالتی که ناپیوستگی تابع $x=2L$ رخ دهد، همه هارمونیک‌ها هم علامت‌اند.

$$\begin{matrix} f(x)=mx \\ 0<x<2L \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_n=0 & n\geq 1 \\ a_0\neq 0 \\ b_n=-\dfrac{2mL}{n\pi} \end{cases} \qquad \begin{matrix} f(x)=mx \\ -L<x<L \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_n=0 & n\geq 1 \\ a_0=0 \\ b_n=-\dfrac{2mL(-1)^n}{n\pi} \end{cases}$$

۴۵- هر گاه $f(x)$ تابعی زوج باشد و $f(x)=x+\cos 2x$ به ازای $0\leq x\leq \pi$، آنگاه در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ ضریب $\cos 2x$ کدام است؟ (برق - سراسری ۸۸)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $1-\dfrac{1}{2\pi}$ ۴) $1+\dfrac{1}{2\pi}$

۴۶- سری فوریه مثلثاتی $f(x)=\begin{cases} x & 0\leq x\leq L \\ 2L-x & L\leq x\leq 2L \end{cases}$ به صورت $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\dfrac{k\pi x}{L}+b_k\sin\dfrac{k\pi x}{L}\right]$ است، کدام گزاره صحیح است؟ (هوا و فضا - سراسری ۸۵)

۱) $b_k=0, a_0=L$ ۲) $b_k=\dfrac{2L}{k\pi}, a_0=\dfrac{L}{2}$ ۳) $b_k=0, a_0=2L$ ۴) $b_k=\dfrac{2L}{k\pi}, a_0=L$

۴۷- ضریب جمله $\cos 5\pi x$ در بسط نیم‌دامنه کسینوسی تابع $f(x)=x \;;\; 0<x<1$ برابر کدام گزینه است؟ (معماری کشتی- سراسری ۷۸)

۱) $-\frac{4}{25\pi^2}$ ۲) $\frac{4}{25\pi^2}$ ۳) $\frac{4}{5\pi^2}$ ۴) $-\frac{4}{5\pi^2}$

۴۸- در بسط تابع $f(x)=|x| \;;\; |x|\le\pi$ به سری فوریه، ضریب $\cos 5x$ کدام است؟ (MBA – سراسری ۸۵)

۱) $\frac{-4}{25\pi}$ ۲) $\frac{-2}{25\pi}$ ۳) $\frac{2}{25\pi}$ ۴) $\frac{4}{25\pi}$

۴۹- ضریب $\cos\frac{3\pi x}{L}$ در بسط فوریه کسینوسی تابع $(0<x<L) \;;\; f(x)=x$ عبارتست از: (ابزار دقیق واتوماسیون – سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{9L}{4\pi^2}$ ۲) $-\frac{4L}{9\pi^2}$ ۳) $\frac{4L}{9\pi^2}$ ۴) $\frac{9L}{4\pi^2}$

۵۰- ضریب جمله $\cos\frac{3\pi x}{2}$ در بسط فوریه کسینوسی تابع متناوب $0<x<2 \;;\; f(x)=(2-x)$ عبارتست از:

۱) $\frac{1}{9\pi^2}$ ۲) $\frac{2}{9\pi^2}$ ۳) $\frac{7}{9\pi^2}$ ۴) $\frac{8}{9\pi^2}$ (ابزار دقیق واتوماسیون – سراسری ۹۰)

۵۱- در بسط فوریه تابع $f(t)$ با دورهٔ تناوب $T=2$ که به شکل $f(t)=\begin{cases}1+t & -1\le t\le 0\\ 1-t & 0\le t\le 1\end{cases}$ معرفی شده است، ضریب a_3 در $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi t+\sin n\pi t)$ کدام است؟ (برق - سراسری ۸۲)

۱) $\frac{-2}{9\pi}$ ۲) $\frac{2}{9\pi^2}$ ۳) $\frac{-4}{9\pi^2}$ ۴) $\frac{4}{9\pi^2}$

۵۲- موج مثلثی f با دوره تناوب 2π چنین تعریف می‌شود: $f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\pi\\ -x & -\pi<x<0\end{cases}$ کدام یک از چهار سری زیر سری فوریهٔ f است؟ (دکتری برق- آزاد ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)$ ۲) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\times 3}+\frac{\cos 4x}{3\times 5}+\frac{\cos 6x}{5\times 7}+\dots\right)$

۳) $\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots\right)$ ۴) $\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\dots\right)$

۵۳- سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2} & 0<x<2\\ 1+\frac{x}{2} & -2<x<0\end{cases}$ و $f(x+4)=f(x)$ کدام است؟ (بیومتریال – آزاد ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 m^2}\cos\frac{m\pi x}{2}$

۳) $\frac{1}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 m^2}\cos\frac{m\pi x}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۵۴- اگر $f(t)=\begin{cases}t & 0\le t<1\\ 2-t & 1\le t<2\end{cases}$ و $f(t+2)=f(t)$ آنگاه سری فوریه تابع $f(t)$ عبارت است از: (برق- سراسری ۷۰)

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}t$ ۲) $\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi t$

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi t$ ۴) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}t$

۵۵- سری فوریه تابع $f(x+2)=f(x), f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x\le 0 \\ -x+1 & 0\le x\le 1\end{cases}$ کدام است؟ (نانو مواد و شیمی- سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+...)$

۲) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}(\frac{1}{2^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 4\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 6\pi x+...)$

۳) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+...)$

۴) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}(\frac{1}{2^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 4\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 6\pi x+...)$

۵۶- سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $f(x)=x$ و $0\le x<L$ کدام است؟ (مکانیک – سراسری ۸۸)

۱) $\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

۲) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۳) $\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

۴) $L+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۵۷- بسط تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi+x & -\pi\le x\le 0\\ \frac{1}{2}\pi-x & 0\le x\le\pi\end{cases}$ به سری فوریه مثلثاتی برابر است با: (مواد – آزاد ۹۰)

۱) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(((-1)^n+1)\cos\frac{n}{2}x\right)$

۲) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left((-1)^{n+1}+1\right)\cos nx$

۳) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left((-1)^n+1\right)\cos\frac{n}{2}x$

۴) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left((-1)^{n+1}+1\right)\cos nx$

۵۸- سری فوریه کسینوسی نیم دامنه متناظر با تابع $f(x)=\frac{1}{\pi}x+1$ که در فاصله $[0,\pi)$ تعریف شده است، کدام است؟ (بیوالکتریک – آزاد ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(nx)$

۲) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi^2(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{\pi^2 n^2}\cos(2n-1)x$

۴) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi^2(2n-1)^2}\cos nx$

۵۹- با توجه به سری فوریه تابع $(-\pi<x<\pi)$; $f(x)=|x|$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ حاصل سری $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{3}}{(2n-1)^2}$ کدام است؟ (بیومتریال – آزاد ۹۰)

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{24}$ ۳) $\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۶۰- بسط تابع $f(x)=|x|$ به سری فوریه در بازه $x\in[-\pi,\pi]$ برابر است با: (مواد– آزاد ۹۱)

۱) $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)}{(p+1)^2}$

۲) $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)}{p^2}$

۳) $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)}{(p+1)^2}$

۴) $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)}{(p+1)^2}$

۶۱- سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$ و $f(x)=\pi-2|x|$ کدام است؟ (بیومتریال – آزاد ۸۶)

۱) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

۲) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

۳) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

۴) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

۶۲- مقدار b_3 در بسط فوریه سینوسی تابع $0 < x < 2$ و $f(x) = x$ با دوره تناوب ۴ کدام است؟ (برق- آزاد ۸۱)

۱) $\frac{4}{3\pi}$ ۲) $\frac{3}{4\pi}$ ۳) $-\frac{4}{3\pi}$ ۴) $-\frac{3}{4\pi}$

۶۳- هرگاه $f(x) = x + \sin x$ و $-\pi < x < \pi$، در بسط فوریه مثلثاتی f، ضریب جمله $\sin x$ برابر است با: (مواد- سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۶۴- در رابطه $x \in [0,2]$; $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{2}x) = 0$ ضریب $\sin(2\pi x)$ کدام است؟ (مواد- سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{4}{\pi}$ ۲) $-\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{1}{\pi}$ ۴) $\frac{4}{\pi}$

۶۵- اگر $f(t) = t + \sin t$ و $-\pi < t < \pi$ در بسط فوریه مثلثاتی f ضریب جمله $\sin 3t$ کدام است؟ (بیومتریال – آزاد ۸۶)

۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۶۶- هرگاه $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ نمایش سری فوریه تابع $-\pi < x < \pi$; $P = 2\pi, y = f(x)$ باشد، آنگاه ضریب b_3 در بسط تابع $-\pi < x < \pi, P = 2\pi$; $f(x) = x + 2\sin x$ به صورت یک سری فوریه عبارت است از: (مواد – آزاد ۸۵)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۶۷- مقادیر a_1 و b_3 در سری فوریه $-\pi < x < \pi, P = 2\pi$, $f(x) = x + 2\sin 3x$ برابر است با: (مواد – آزاد ۸۳)

۱) $b_3 = \frac{1}{3}, a_1 = 0$ ۲) $b_3 = \pi, a_1 = -1$ ۳) $b_3 = 0, a_1 = \frac{\pi}{3}$ ۴) $b_3 = \frac{8}{3}, a_1 = 0$

۶۸- سری فوریه تابع $\begin{cases} f(x) = x + \sin x \\ -\pi < x < \pi \end{cases}$ کدام است؟ (مهندسی پزشکی – آزاد ۹۱)

۱) $-\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin(nx)$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \sin(2n-1)x$

۳) $\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin(nx)$ ۴) $3\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$

۶۹- بسط فوریه سینوسی تابع زیر را پیدا کنید: (مکانیک – آزاد ۹۰)

$$f(x) = x \qquad (0 < x < 2)$$

۱) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2}$ ۲) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}$

۳) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2}$ ۴) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\pi + \frac{1}{2}\right)}{n\pi + \frac{1}{2}} \cos n\pi x$

۷۰- سری فوریه تابع فرد $\begin{cases} f(x) = x \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$ بر فاصله $[-2,2]$ عبارتست از: (هوا و فضا – سراسری ۸۱)

۱) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{2}$ ۲) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$

۳) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$ ۴) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cos \frac{n\pi x}{2}$

۷۱- در بسط تابع $f(x)=x$ با دوره تناوب $[-\pi,\pi]$، سری فوریه برابر است با: (مواد– آزاد ۹۱)

۱) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\sin nx$

۲) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$

۳) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n-1}\sin nx$

۴) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\cos nx$

۷۲- بسط فوریه تابع $f(x)=x, 0<x<2\pi$ کدام است؟ (فیزیک – سراسری ۹۱)

۱) $x=\pi-2[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-...]$

۲) $x=\pi+2[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-...]$

۳) $x=\pi-2[\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+...]$

۴) $x=\pi-2[\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+...]$

۷۳- سری فوریه سینوسی دوگانه تابع $f(x,y)$ در دامنه‌های $0<x<L$ و $0<y<k$ عبارت است از: $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{mn}\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi y}{K})$

سری فوریه دوگانه تابع $f(x,y)=xy$ برای $0<x<\pi$ و $0<y<\pi$ کدام است؟ (کامپیوتر – سراسری ۸۸)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{nm}\sin(nx)\sin(my)$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4nm}{\pi^2}\sin(nx)\sin(my)$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\pi^2}{nm}\sin(nx)\sin(my)$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm}{4}\sin(nx)\sin(my)$

۷۴- ضرایب a_n در بسط فوریه $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$ کدام است؟ (معماری کشتی – سراسری ۸۸)

۱) $\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ \frac{-2}{\pi n^2} & n \text{ فرد}\end{cases}$

۲) $\begin{cases}0 & n \text{ فرد}\\ \frac{-2\pi}{n^2} & n \text{ زوج}\end{cases}$

۳) $\begin{cases}0 & n \text{ فرد}\\ \frac{-2}{\pi n^2} & n \text{ زوج}\end{cases}$

۴) $\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ \frac{-2\pi}{n^2} & n \text{ فرد}\end{cases}$

۷۵- سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x-[x]$ را بعد از تشخیص دوره تناوب آن بنویسید. ([ ] نماد جزء صحیح است) (مواد – سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۲) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۳) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۴) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{(n\pi)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۷۶- مجموع سری مثلثاتی $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}$ کدام است؟ (فیزیک – سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{x}{2}$

۳) x

۴) $\frac{x^2}{2}$

بخش ششم) سری فوریه توابع مثلثاتی پایه‌ای و غیر پایه‌ای

تابع مثلثاتی متناوبی را که نمودار آن مشابه نوسانات کامل یک شکل موج سینوسی (یا کسینوسی) نباشد، تابع مثلثاتی غیر پایه‌ای می‌نامیم. به طور مثال، چنانچه قسمتی از یک نوسان کامل شکل موج سینوسی (کسینوسی) را انتخاب کرده و آنرا به طور متناوب گسترش دهیم، تابع متناوب بدست آمده، به صورت مثلثاتی غیر پایه‌ای خواهد بود.

تابع مثلثاتی پایه‌ای نیازی به بسط فوریه مثلثاتی نداشته و در واقع بسط فوریه آن برابر خودش می‌باشد. اما اگر تابع مثلثاتی به صورت غیر پایه‌ای باشد، نیاز به بسط فوریه مثلثاتی خواهد داشت. به طور مثال اگر تابع $f(x)=\sin x$ در بازه $0<x<\pi$ تعریف گردد و سپس این تابع را گسترش فرد داده و با دوره تناوب $T=2\pi$ بسط دهیم، نمودار حاصل به صورت نوسانات کامل یک شکل موج سینوسی خواهد بود. بنابراین در این حالت بسط فوریه مثلثاتی $f(x)=\sin x$ برابر $\sin x$ خواهد بود. اما اگر تابع $f(x)=\sin x$ در بازه $0<x<\pi$ تعریف گردد و سپس این تابع را گسترش زوج داده و با دوره تناوب $T=2\pi$ بسط دهیم، نمودار حاصل شبیه نوسانات کامل یک موج سینوسی نخواهد بود. بنابراین در این حالت باید برای تابع $f(x)=\sin x$ بسط فوریه مثلثاتی به شکل $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ تعریف گردد.

در مخرج ضرایب سری فوریه توابع مثلثاتی غیر پایه‌ای مانند $\sin mx$ یا $\cos mx$ با دوره تناوب $T=2L$ عامل $1-\frac{m^2L^2}{n^2\pi^2}$ وجود دارد که در اثر ساده کردن، قابل تبدیل به فرمهای $n^2\pi^2-m^2L^2$ یا $n^2-\frac{m^2L^2}{\pi^2}$ نیز می‌باشد. لازم به ذکر است که a_n تابعی زوج برحسب n و b_n تابعی فرد برحسب n می‌باشد.

$$a_n=\frac{n \text{ تابعی زوج برحسب}}{n^2\pi^2-m^2L^2} \qquad b_n=\frac{n \text{ تابعی فرد برحسب}}{n^2\pi^2-m^2L^2}$$

در بسط فوریه مثلثاتی توابع $f_1(x)=(\cos x)^{2k}$ و $f_2(x)=(\sin x)^{2k}$ هارمونیک‌های زوج کسینوسی وجود دارد. (با احتساب a_0)

$$(\cos x)^{2k}=a_0+a_2\cos 2x+a_4\cos 4x+\ldots+a_{2k}\cos 2kx$$

$$(\sin x)^{2k}=a_0+a_2\cos 2x+a_4\cos 4x+\ldots+a_{2k}\cos 2kx$$

مقدار ثابت بسط فوریه توابع $(\cos x)^{2n}$ و $(\sin x)^{2n}$ برابر $a_0=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ می‌باشد.

در بسط فوریه تابع $f_3(x)=(\sin x)^{(2k+1)}$ فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارد.

$$(\sin x)^{(2k+1)}=b_1\sin x+b_3\sin 3x+\ldots+b_{2k+1}\sin(2k+1)x$$

در بسط فوریه تابع $f_4(x)=(\cos x)^{(2k+1)}$ فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارد.

$$(\cos x)^{(2k+1)}=a_1\cos x+a_3\cos 3x+\ldots+a_{2k+1}\cos(2k+1)x$$

برخی از اتحادهای مثلثاتی مهم به شرح زیر می‌باشند:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x]$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]$$

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

$$\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x+\ldots+2\cos 2nx$$

$$\frac{\sin(2n)x}{\sin x}=2\cos x+2\cos 3x+2\cos 5x+\ldots+2\cos(2n-1)x$$

$$\frac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=1+a\cos\theta+a^2\cos 2\theta+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos n\theta \qquad |a|<1$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2-2a\cos\theta}=1+2(\frac{b}{a})\cos\theta+2(\frac{b}{a})^2\cos 2\theta+\ldots=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{b}{a})^k\cos k\theta \qquad |a|>|b|$$

$$\frac{1}{a+b\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{-b}{a+\sqrt{a^2-b^2}})^k\cos k\theta\right\} \qquad |a|>|b|$$

$$\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=a\sin\theta+a^2\sin 2\theta+a^3\sin 3\theta\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin n\theta \qquad |a|<1$$

در مخرج ضرایب سری فوریه توابع نمایی $\pm e^{mx}$ و هیپربولیکی $\sinh mx$ و $\cosh mx$ با دوره تناوب $T=2L$ عامل $1+\frac{m^2L^2}{n^2\pi^2}$ وجود دارد که پس از ساده کردن قابل تبدیل به فرم‌های $n^2\pi^2+m^2L^2$ یا $n^2+\frac{m^2L^2}{\pi^2}$ نیز می‌باشد.

$$a_n=\frac{n \text{ تابعی زوج برحسب}}{n^2\pi^2+m^2L^2} \qquad b_n=\frac{n \text{ تابعی فرد برحسب}}{n^2\pi^2+m^2L^2}$$

به طور مثال، می‌توان به بسط فوریه مثلثاتی توابع نمایی و هیپربولیکی زیر اشاره کرد:

$$e^x=\frac{2\sinh\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right] \qquad -\pi<x<\pi$$

$$\cosh mx=\frac{\sinh m\pi}{m\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2m\ \sinh(m\pi)}{\pi(n^2+m^2)}(\cos nx) \qquad -\pi<x<\pi$$

۷۷- سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ و $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ کدام است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون – سراسری ۹۰)

۱) $f(x)=\sin x+\sin 3x$
۲) $f(x)=\sin x-\sin 3x$
۳) $f(x)=\frac{3}{4}\sin x+4\sin 3x$
۴) $f(x)=\frac{3}{4}\sin x-4\sin 3x$

۷۸- هر گاه بسط فوریه یک تابع تناوبی برای دوره‌ی تناوب $T=2\pi$ به صورت: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ باشد، مقدار b_3 برای $f(x)=(\cos^2 x+\sin x-\frac{1}{2})^2$ کدام خواهد بود؟ (برق – سراسری ۸۳)

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{4}$

۷۹- در بسط فوریه $f(t)=(\sin x+\cos 2x)^2$ به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ مقدار ضریب a_1 کدام گزینه است؟ (برق – آزاد ۹۱)

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) صفر

۸۰- بسط فوریه تابع $f(x)=\sin^2 x\cos x$ که متناوب با دوره تناوب $T=2\pi$ می‌باشد به صورت $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$ می‌باشد. در این صورت ضریب a_3 کدام است؟ (مهندسی پزشکی – آزاد ۹۱)

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{-1}{4}$
۳) صفر
۴) ۱

۸۱- در بسط فوریهٔ تابع $f(x)=\sin^4 x$ ضریب جملهٔ $\cos 4x$ کدام است؟ (دکتری برق- آزاد ۹۰)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) صفر

۸۲- تابع f در بازه $(0,\pi)$ به صورت $f(t)=\cos^2 t.\cos 2t$ داده شده است. سری فوریه کسینوسی نیم دامنه f برابر کدام است؟ (بیومتریال – آزاد ۹۰)

۱) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos 4t$

۲) $\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nt)}{n}$

۳) $\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}$

۴) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos 4t$

۸۳- تابع f در بازهٔ $[0,\pi]$ به صورت $f(t)=\cos^2 t$ تعریف شده است. در این صورت سری فوریه کسینوسی نیم دامنهٔ f برابر است با: (مهندسی مواد – سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t$

۲) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2t$

۳) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)$

۴) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(nt)$

۸۴- سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\cos^2 \pi x$ در نیم دامنه $[0,1]$ کدام است؟

(مهندسی شیمی - بیوتکنولوژی – مهندسی داروسازی و نانو مواد – سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi x$

۲) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$

۴) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$

۸۵- بسط سری فوریه مثلثاتی تابع $\sin^3 x$ و $0<x<2\pi$، را بیابید. (مهندسی شیمی – بیوتکنولوژی داروسازی – سراسری ۸۷)

۱) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin kx$

۲) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin 3x$

۳) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin kx$

۴) $\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

۸۶- مطلوب است بسط $f(x)=\sin x$ ،$0<x<\pi$ بر حسب یک سری کسینوسی فوریه. (مکانیک «تبدیل انرژی و طراحی جامدات» آزاد ۸۰)

۱) $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$

۲) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$

۳) $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2+1}\cos nx$

۴) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2+1}\cos nx$

۸۷- سری فوریه سینوسی متناظر با تابع $f(x)=\cos x$ ،$0<x<\pi$ کدام است؟ (بیو الکتریک – آزاد ۸۶)

۱) $\frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{1-(2n-1)^2}$

۲) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(nx)}{1-n^2}$

۳) $\frac{-8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(2nx)}{1-4n^2}$

۴) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(2nx)}{1-n^2}$

۸۸- بسط فوریه فرد تابع $f(t)=\cos t$ ،$0<t<\pi$ کدام گزینه است؟ (بیومتریال – آزاد ۸۷)

۱) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nt)$

۲) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(nt)$

۳) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2+1}\sin(2nt)$

۴) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2+1}\sin(2nt)$

۸۹- سری فوریه تابع $f(x)=\cos\frac{x}{۲}$ ، $-\pi\le x\le\pi$ عبارت است از: (مهندسی هوا و فضا – سراسری ۸۱)

۱) $f(x)=\frac{۲}{\pi}+\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱-۴n^۲}\cos nx$

۲) $f(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱-۴n^۲}\cos nx$

۳) $f(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱-۴n^۲}\cos nx$

۴) $f(x)=\frac{۲}{\pi}+\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱-۴n^۲}\cos nx$

۹۰- در بسط به سری فوریه تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sin x & -\pi<x<۰\\ ۰ & ۰<x<\pi\end{cases}$ مقدار $b_۱$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای – سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۹۱- درسری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin ۲x & -\pi<x<-\frac{\pi}{۲}\\ ۰ & -\frac{\pi}{۲}\le x\le ۰\\ \sin ۲x & ۰<x\le\pi\end{cases}$ بادوره تناوب $p=۲\pi$ به صورت: $f(x)=a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ، $a_۲$ و $b_۲$ به ترتیب عبارتند از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون – سراسری ۸۸)

۱) ۰،۱ ۲) $\frac{۳}{۴}$،۰ ۳) $۱،\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۴}$

۹۲- چنانچه تابع $f(x)$ در یک دورهٔ تناوب به صورت $f(x)=\begin{cases}۰ & -۳<x<۰\\ \sin\frac{\pi x}{۳} & ۰\le x\le ۳\end{cases}$ تعریف شده باشد، در بسط فوریه آن به صورت $f(t)=a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{۳}+b_n\sin\frac{n\pi x}{۳})$ کدام گزینه صحیح است؟ (برق – سراسری ۸۰)

۱) $a_۰=\frac{۲}{\pi}$

۲) همه a_n ها به جز $a_۰$ صفرند.

۳) بجز $b_۱$ که مساوی $\frac{۱}{۲}$ است بقیه b_n ها صفرند.

۴) بجز $b_۱$ که مساوی $\frac{۱}{۲}$ و $b_۲$ که مساوی $\frac{۱}{۸}$ است بقیه b_n ها صفرند.

۹۳- سری فوریه تابع دوره‌ای $f(x)=x\sin x$ ، $-\pi\le x\le\pi$ کدام است؟ (بیو الکتریک – آزاد ۸۳)

۱) $۱-\frac{۱}{۲}\cos x-۲\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^۲-۱}$

۲) $۱-\frac{۱}{۲}\cos x-۲\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^n\cos nx}{n^۲-۱}$

۳) $۱-\frac{۱}{۲}\cos x+۲\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^n\cos nx}{n^۲-۱}$

۴) $۱-\frac{۱}{۲}\cos x+۲\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^۲-۱}$

۹۴- بسط سری فوریه تابع $-\pi\le x\le\pi$ $f(x)=e^x$ برابر است با: (مهندسی مواد – ۹۰)

۱) $f(x)=\frac{Sh\pi}{\pi}\left[۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^n}{۱+n^۲}(\cos nx-n\sin nx)\right]$

۲) $f(x)=\frac{Sh\pi}{\pi}\left[۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n+۱}(\cos nx+n\sin nx)\right]$

۳) $f(x)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{۲\pi}\left[۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱+n}(\cos nx-n\sin nx)\right]$

۴) $f(x)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{۲\pi}\left[۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۱+n)^۲}(\cos nx+n\sin nx)\right]$

بخش هفتم) خواص ضرایب سری فوریه

تابع	دوره تناوب	ضرایب سری فوریه مثلثاتی
$f(x)$	T	$a_\circ \ , \ a_n \ , \ b_n$
$g(x)$	T	$A_\circ \ , \ A_n \ , \ B_n$
$f(x-h)$	T	$\alpha_\circ = a_\circ \ , \ \alpha_n = a_n \cos(\frac{2\pi nh}{T}) - b_n \sin(\frac{2\pi nh}{T}) \ , \ \beta_n = a_n \sin(\frac{2\pi nh}{T}) + b_n \cos(\frac{2\pi nh}{T})$
$f(x-\frac{T}{2})$	T	$\alpha = a_\circ \ , \ \alpha_n = (-1)^n a_n \ , \ \beta_n = (-1)^n b_n$
$f(x)\cos\frac{2\pi mx}{T}$	T	$a'_\circ = \frac{a_m}{2} \ , \ a'_n = \frac{a_{n-m}+a_{n+m}}{2} = \frac{a_{m-n}+a_{m+n}}{2} \ , \ b'_n = \frac{b_{n-m}+b_{n+m}}{2} = \frac{b_{m+n}-b_{m-n}}{2}$
$f(x)\sin\frac{2\pi mx}{T}$	T	$a''_\circ = \frac{b_m}{2} \ , \ a''_n = \frac{b_{m-n}+b_{m+n}}{2} = \frac{b_{n+m}-b_{n-m}}{2} \ , \ b''_n = \frac{a_{n-m}-a_{n+m}}{2} = \frac{a_{m-n}-a_{m+n}}{2}$
$f(x)g(x)$	T	$\alpha_\circ = \frac{a_\circ A_\circ}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n A_n + b_n B_n) \ , \ \alpha_n = \frac{a_\circ A_n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[a_m(A_{m+n}+A_{m-n}) + b_m(B_{m+n}+B_{m-n})]$ $\beta_n = \frac{a_\circ B_n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[a_m(B_{m+n}-B_{m-n}) - b_m(A_{m+n}-A_{m-n})]$

- ✓ a_n تابعی زوج برحسب n می‌باشد. $(a_{-n} = a_n)$
- ✓ b_n تابعی فرد برحسب n می‌باشد. $(b_{-n} = -b_n)$
- ✓ اگر بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ با دوره تناوب پایه‌ای T به صورت: $f(x) = a_\circ + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2\pi nh}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nh}{T})$

  باشد، آنگاه: $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = (a_\circ)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ (رابطه پارسوال)
- ✓ حاصل سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ در نقطه پیوستگی آن برابر $f(x)$ و در نقطه ناپیوستگی آن برابر میانگین حد چپ و راست تابع $f(x)$ در آن نقطه خواهد بود.

اگر a_n و b_n ضرایب سری فوریه مثلثاتی یک تابع متناوب و مطلقاً انتگرال‌پذیر (در یک دوره تناوب) باشند، آنگاه:

- ✓ دنباله‌های $\{|a_n|\}$ و $\{|b_n|\}$ همگرا به صفر خواهند بود: $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}|b_n| = 0$
- ✓ دنباله‌های $\{|na_n|\}$ و $\{|nb_n|\}$ کراندار خواهند بود: $\lim_{n\to\infty}|na_n| \le M \quad , \quad \lim_{n\to\infty}|nb_n| \le M'$
- ✓ سری‌های عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ همگرا خواهند بود.

در حالتی که ضرایب سری فوریه مثلثاتی یک تابع را داده باشند و خود تابع، نامشخص باشد می‌توان از روی ضرایب سری فوریه داده شده، اطلاعاتی در مورد تابع متناوب متناظر با آن (در صورت وجود) بدست آورد.

- ✓ اگر تابع $f(x)$ در یک دوره تناوب خود، دارای تعداد محدودی نقاط ناپیوستگی باشد، درجه همگرایی ضرایب سری فوریه مثلثاتی آن حداقل یک خواهد بود. همچنین اگر تابع $f(x)$ و مشتقات تا مرتبه $(m-1)$ام آن پیوسته بوده و اولین ناپیوستگی (جهش) در مشتق مرتبه mام تابع $f(x)$ رخ دهد، آنگاه درجه همگرایی ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$، حداقل از درجه $(m+1)$ خواهد بود.
- ✓ در سری مثلثاتی $a_\circ + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{T})$ اگر ضرایب a_n و b_n در رابطه زیر صدق کنند:

$$\lim_{n\to\infty}|n^m a_n| \le M \quad , \quad \lim_{n\to\infty}|n^m b_n| \le M'$$

آنگاه مجموع سری فوق، معرف یک تابع پیوسته متناوب با دوره تناوب T می‌باشد که $(m-2)$ مشتق اول آن پیوسته بوده و با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوق بدست می‌آید.

مشتق گیری و انتگرال گیری از سری فوریه

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\to\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n+(-1)^{n+1}a_0}{n}\sin nx\right]$$

اگر $a_0=0$ باشد، سری فوریه $\int_0^x f(x)dx$ را می‌توان با انتگرال‌گیری جمله به جمله، از سری فوریه $f(x)$ بدست آورد.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\to f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos nx-a_n\sin nx)\qquad 0<x<2\pi$$

اگر بسط فوریه تابع $f(x)$، تعریف شده در بازه $(0,2\pi)$ را داشته باشیم، در آنصورت بسط فوریه تابع $f'(x)$ را می‌توان با استفاده از مشتق‌گیری جمله به جمله از بسط فوریه تابع $f(x)$ بدست آورد.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\to f'(x)=\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(nb_n+(-1)^n c)\cos nx-na_n\sin nx\right]\qquad -\pi<x<\pi$$

$$c=\lim_{n\to\infty}[(-1)^{n+1}nb_n]$$

اگر بسط فوریه تابع $f(x)$، تعریف شده در بازه $(-\pi,\pi)$ را داشته باشیم، در آنصورت بسط فوریه تابع $f'(x)$ را فقط زمانی می‌توان با استفاده از مشتق‌گیری جمله به جمله از بسط فوریه تابع $f(x)$ بدست آورد که $f(\pi)=f(-\pi)$ باشد.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\to f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}(na_n\sin nx)\qquad 0<x<\pi$$

اگر تابع $f(x)$ با بسط نیم دامنه‌ای زوج را داده باشند، در آنصورت، بسط فوریه تابع $f'(x)$ را می‌توان با مشتق‌گیری جمله به جمله از بسط فوریه تابع $f(x)$ بدست آورد.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\to f'(x)=\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[nb_n-d+(c+d)(-1)^n\right]\cos nx\qquad 0<x<\pi$$

$$c=-\lim_{n\to\infty}nb_n\quad,\quad d=\frac{1}{2}[(\lim_{n\to\infty}nb_n)-c]$$

اگر تابع $f(x)$ با بسط نیم دامنه‌ای فرد، را داده باشند، در آنصورت، بسط فوریه تابع $f'(x)$ را فقط زمانی می‌توان با مشتق‌گیری جمله به جمله از بسط فوریه تابع $f(x)$ بدست آورد. که $f(0)=f(\pi)=0$ باشد.

۹۵- مقدار سری فوریه تابع f با ضابطه زیر به ازای $x=0$ کدام است؟ (عمران – فراگیر پیام نور ۹۰)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}+2 & -\pi\le x<0\\ 2-2x & 0\le x<\pi\end{cases}$$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۶- مقدار سری فوریه تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x\le 0\\ 1 & 0<x\le\pi\end{cases}$ در نقاط ۰، $\frac{\pi}{2}$ و π به ترتیب برابر است با: (مهندسی مواد – آزاد ۸۷)

۱) ۰، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$، ۱، $\frac{1}{2}$ ۳) ۰، ۱، ۱ ۴) $\frac{1}{2}$، ۱، ۱

۹۷- تابع $f(x)=\begin{cases}0 & ; -1\le x<0\\ 1 & ; 0\le x\le 1\end{cases}$ را در نظر بگیرید که در آن $f(x+2)=f(x)$ سری فوریه تابع f در $x=1$ به چه عددی همگراست؟ (عمران – فراگیر پیام نور ۹۰)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۹۸- تابع تناوبی f با دورهٔ تناوب ۱۰ چنین تعریف شده است: $f(x)=\begin{cases}0 & -5<x<0\\ 3 & 0<x<5\end{cases}$. مقادیر $f(-5)$ و $f(0)$ و $f(5)$ را چگونه تعریف کنیم تا حد سری فوریهٔ مثلثاتی تابع f در همهٔ نقاط بازهٔ $-5\le x\le 5$ برابر با مقدار $f(x)$ باشد؟ (دکتری برق- آزاد ۹۰)

۱) $f(-5)=f(0)=f(5)=0$
۲) $f(0)=1/5\ ,\ f(-5)=f(5)=0$
۳) $f(0)=0\ ,\ f(-5)=f(5)=1/5$
۴) $f(-5)=f(0)=f(5)=1/5$

۹۹- ضابطهٔ تابع تناوبی $f(x)$ روی یک دوره تناوبی یعنی $-1\le x\le 1$ چنین است: $f(x)=\begin{cases}x^3\sin(1/x) & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$. حد سری فوریهٔ مثلثاتی این تابع یعنی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ در نقطهٔ $x=0$ برابر است با: (دکتری برق- آزاد ۸۶)

۱) $\sin(1)$
۲) ۱
۳) ۰/۵
۴) ۰

۱۰۰- کدامیک از ضرایب $A_n=\frac{n}{n+1}$ ، $B_n=\frac{n^2}{3n+1}$ ، $C_n=\frac{n+1}{n^2+1}$ ، $D_n=\frac{n}{\sin n}$ می‌تواند برابر یک ضریب اویلر سری فوریه یک تابع متناوب و به طور تکه‌ای هموار باشد؟ (مهندسی مواد – آزاد ۸۵)

۱) C_n
۲) D_n
۳) B_n
۴) A_n

۱۰۱- هرگاه $D_n=\frac{n}{\sin n}$ ، $C_n=\frac{n}{n^2+1}$ ، $B_n=\frac{n^2}{2n+4}$ و $A_n=\frac{n}{n+1}$ آنگاه کدام‌یک از این ضرایب می‌تواند برابر ضریب اویلر سری فوریه یک تابع متناوب و به‌طور تکه‌ای هموار باشد؟ (مهندسی مواد – آزاد ۸۳)

۱) A_n
۲) B_n
۳) C_n
۴) D_n

۱۰۲- دورهٔ تناوب تابع حقیقی تناوبی فرد $f(x)$ برابر با 2π است و $5\le\int_{-\pi}^{\pi}[f(z)]^2dx\le 6$. کدام یک از چهار سری زیر می‌تواند سری فوریهٔ f باشد؟ (دکتری برق- آزاد ۸۴)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\sin nx$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1}{2}}\sin nx$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1}{3}}\sin nx$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1}{4}}\sin nx$

۱۰۳- تابع $f(x)=x$ $0<x<L$ دارای سری‌های فوریه زوج و فرد زیر می‌باشد: (مهندسی هوا و فضا- سراسری ۸۰)

الف) $0<x<L$ $f(x)=x=\frac{L}{2}-\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}$

ب) $0<x<L$ $f(x)=x=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۱) سری الف سریع تر از سری ب همگراست.
۲) سری ب سریع‌تر از سری الف همگراست.
۳) هر دو سری دارای سرعت همگرایی یکسانی می‌باشد.
۴) معدل سری های الف و ب نیز سری فوریه برای تابع است.

۱۰۴- کدام گزینه بسط فوریه تابع دلتای دیراک $\delta(x-t)$ را ارائه می‌کند؟ (مکاترونیک – آزاد ۸۴)

۱) $\delta(x-t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-t)$
۲) $\delta(x-t)=\frac{1}{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-t)\right)$
۳) $\delta(x-t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\cos nt$
۴) $\delta(x-t)=\frac{1}{\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\cos nt\right)$

۱۰۵- اگر برای $0<x<2$ داشته باشیم: $x=\frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-...)$، در این صورت دو جمله اول بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$، در فاصله $0<x<2$ عبارت است از: (کامپیوتر - سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$
۲) $\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$
۳) $\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$
۴) $\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$

۱۰۶- در صورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع $-L \le x \le L, f(x)=x^2$ به صورت $\frac{1}{3}L^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{L}$ باشد، آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $\frac{x}{3}(\frac{x^2}{L^2}-1)$ کدام است؟ (برق - سراسری ۸۷)

۱) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{\pi n^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}$

۲) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۳) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n L}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۴) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۱۰۷- در صورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع $g(x)=x^2$، $-\pi \le x \le \pi$ به صورت $g(x)=4\left(\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\dots\right)$ باشد، آنگاه سری فوریه مثلثاتی $\sin x-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-\dots$ مربوط به کدام تابع است؟ (سراسری برق - ۹۱)

۱) $\frac{x^3}{12}$

۲) $\frac{x}{12}(\pi^2-x^2)$

۳) $\frac{x^2}{12}(\pi^2-x)$

۴) $\frac{x}{4}(\pi^2-x^2)$

۱۰۸- سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$ ، $f(x)=x/2$ به صورت زیر است: (برق- ۷۰)

$$f(x)=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots, T=2\pi$$

آنگاه سری فوریه $-\pi<x<\pi, g(x)=x^2$ و $T=2\pi$ عبارت است از:

۱) $g(x)=2(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\dots)$

۲) $g(x)=4(\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\dots)$

۳) $g(x)=4(-\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}-\dots)$

۴) $g(x)=-\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}-\dots)$

۱۰۹- اگر سری فوریه تابع f در بازه $|x|<\pi$ به صورت $f(x)=1+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx$ باشد،ضریب b_3 در بسط فوریه $f(x)\sin x$ با دوره تناوب 2π در بازه $|x|<\pi$ کدام است؟ (مهندسی مواد - آزاد ۹۰)

۱) $-\frac{3}{8\pi}$

۲) $-\frac{1}{8\pi}$

۳) $\frac{1}{8\pi}$

۴) $\frac{3}{8\pi}$

۱۱۰- ضریب فوریه a_n تابع $\begin{cases} f(x)=x-x^2 \\ -\pi<x<\pi \end{cases}$ برابر است با: (مهندسی مواد - آزاد ۹۱)

۱) $a_n=2\times\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

۲) $a_n=4\times\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

۳) $a_n=6\times\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$

۴) $a_n=8\times\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

۱۱۱- اگر سری فوریه تابع $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$ و $-\pi<x<\pi$ باشد، آنگاه سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-\pi x & 0<x<\pi \\ -x^2-\pi x & -\pi<x<0 \end{cases}$ کدام است؟ (بیومتریال - آزاد ۸۷)

۱) $f(x)=-\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m^3}+\frac{\pi^2}{3}$

۲) $f(x)=-\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^3}-\frac{\pi^2}{6}$

۳) $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^3}+\frac{\pi^2}{6}$

۴) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^4}-\frac{\pi^2}{6}$

۱۱۲- در سری فوریه $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ برای اینکه $f(x)=f^*(x)$ باشد چه قیدی روی ضرایب c_n باید اعمال نمود؟ (x متغیرحقیقی است.) (فیزیک – سراسری۹۰)

۱) $c_n^*=c_n$ ۲) $c_n^*=-c_n$ ۳) $c_n^*=c_{-n}$ ۴) $c_n^*=-c_{-n}$

۱۱۳- سری فوریه مختلط تابع $f(x)=\begin{cases}\pi & |x|<1\\ 0 & 1<|x|<\pi\end{cases}$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ کدام است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون – سراسری ۸۹)

۱) $f(x)=\frac{1}{\pi}+\sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin n}{n\pi}e^{inx}$ ۲) $f(x)=1+\sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin n}{n\pi}e^{inx}$

۳) $f(x)=\frac{1}{\pi}+\sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty}\frac{\cos n}{n\pi}e^{inx}$ ۴) $f(x)=1+\sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty}\frac{\cos n}{n}e^{inx}$

۱۱۴- اگر تابع $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}+\sin^2\frac{5x}{2}$ باشد، مقدار انتگرال $A=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ کدام است؟ (برق – سراسری ۹۲)

۱) 6π ۲) $\frac{21}{4}$ ۳) $\frac{21}{8}\pi$ ۴) $\frac{21}{4}\pi$

بخش هشتم) محاسبه سری‌های عددی به کمک سری فوریه

حاصل برخی از سری‌های عددی را می‌توان به کمک بسط فوریه مثلثاتی توابع متناوبی که متناسب با آن سری عددی باشد، محاسبه نمود. در برخی از موارد نیز باید از سری فوریه مثلثاتی و اتحاد پارسوال استفاده نمود.

- ✓ برای محاسبه سری‌های عددی که در مخرج آنها عبارت n^P وجود دارد، از بسط فوریه چندجمله‌ایها استفاده می‌کنیم.
- ✓ برای محاسبه سری‌های عددی که درمخرج آنها عبارت n^2+P^2 وجود دارد،از بسط فوریه توابع نمایی یا هیپربولیکی استفاده می‌کنیم.
- ✓ برای محاسبه سری‌های عددی که در مخرج آنها عبارت n^2-P^2 وجود دارد، از بسط فوریه توابع مثلثاتی غیر پایه‌ای استفاده می‌کنیم.
- ✓ تابع زتای ریمان به شکل روبرو تعریف می‌گردد. $\xi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\qquad s>1$
- ✓ سری‌های معروف دیریکله عبارتند از:

$$\eta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=(1-\frac{1}{2^{s-1}})\xi(s)\quad,\quad \lambda(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}=(1-\frac{1}{2^s})\xi(s)\quad,\quad \beta(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

برخی از مهمترین سری‌های عددی به شرح زیر می‌باشد: (به درجه همگرایی سری عددی و توان π در صورت کسر حاصل آن دقت کنید.)

$$\xi(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\xi(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$\xi(6)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\dots=\frac{\pi^6}{945}$$

$$\xi(8)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\dots=\frac{\pi^8}{9450}$$

$$\eta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=(1-\frac{1}{2})\xi(2)=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\eta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots=(1-\frac{1}{2^3})\xi(4)=\frac{7\pi^4}{720}$$

$$\lambda(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots=(1-\frac{1}{2^2})\xi(2)=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\lambda(4)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\dots=(1-\frac{1}{2^4})\xi(4)=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\beta(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots=\frac{\pi^1}{4}$$

$$\beta(3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\dots=\frac{\pi^3}{32}$$

با دقت در این سری‌ها خواهیم دید که اگر در مخرج جملات سری عددی عامل n^P داشته باشیم در صورت کسر حاصل نیز π^P خواهیم داشت. (البته در مواردی که در صورت سری‌های فوق به جای اعداد ثابت توابع مثلثاتی باشد، این ویژگی نقض می‌گردد. به طور مثال: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}$)

حاصل سری‌های عددی به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-m^2}$ یا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-m^2}$ را که در آن m عدد ناصحیحی باشد، می‌توان به کمک بسط فوریه مثلثاتی تابع $\cos mx$ در بازه $-\pi<x<\pi$ محاسبه نمود.

$$\cos mx=\frac{\sin m\pi}{m\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2m\sin m\pi}{\pi(m^2-n^2)}\cos nx \qquad -\pi<x<\pi$$

با جایگذاری $x=0$ و $x=\pi$ در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-m^2}=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2m\sin\pi m}=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2m}\csc(m\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-m^2}=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi\cos m\pi}{2m\sin\pi m}=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2m}\cot(m\pi)$$

حاصل سری‌های عددی به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+m^2}$ یا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+m^2}$ را می‌توان به کمک بسط فوریه مثلثاتی تابع $\cosh(mx)$ در بازه $-\pi<x<\pi$ محاسبه نمود.

$$\cosh(mx)=\frac{\sinh(m\pi)}{m\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2m(-1)^n\sinh(m\pi)}{\pi(n^2+m^2)}\cos nx \qquad -\pi<x<\pi$$

با جایگذاری $x=0$ و $x=\pi$ در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+m^2}=\frac{\pi}{2m\sinh(\pi m)}-\frac{1}{2m^2}=\frac{\pi}{2m}\csc h(m\pi)-\frac{1}{2m^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+m^2}=\frac{\pi\cosh(m\pi)}{2m\sinh(m\pi)}-\frac{1}{2m^2}=\frac{\pi}{2m}\coth(m\pi)-\frac{1}{2m^2}$$

در بسیاری از موارد، با داشتن چند جمله اول سری عددی، می‌توان مقدار تقریبی آن را تعیین کرد. (دقت کنید که اگر درجه همگرایی سری عددی، بزرگتر یا مساوی ۲ باشد، حاصل آن سری عددی، بسیار نزدیک به جمله اول آن سری عددی خواهد بود.)

$\pi^2\simeq 9/8 \quad , \quad \pi^3\simeq 32 \quad , \quad \pi^4\simeq 97$

۱۱۵- هرگاه f تابعی با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ باشد در این‌صورت، با توجه به سری فوریه f؛ جمع سری نامتناهی $S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots$ برابر کدام است؟ (مواد- سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{12}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2}{8}$

۱۱۶- تابع تناوبی $f(t)$ در یک دورهٔ تناوب عبارت است از $-1<t<1$ و $f(t)=1+t$ و سری فوریهٔ آن $f(t)=1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi t$ می‌باشد. مقدار سری $S_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ برابر است با: (مکانیک «ساخت و تولید» آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۱۷- با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & -2<x<-1\\ 1 & -1<x<1\\ 0 & 1<x<2\end{cases}$ و $f(x+4)=f(x)$ کدام برابری حاصل می‌شود؟ (هوا و فضا – سراسری ۸۷)

۱) $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$ ۲) $Ln2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$

۳) $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots$ ۴) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$

۱۱۸- اگر بسط فوریه تابع متناوب $-\pi \le x \le \pi$; $f(x)=|x|$ برابر باشد با: $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+...)$ در این‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ با کدام گزینه برابر است؟ (کامپیوتر- سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi^3}{32}$ ۲) $\frac{\pi^2}{32}$ ۳) $\frac{\pi^3}{16}$ ۴) $\frac{3\pi^3}{32}$

۱۱۹- با استفاده از بسط فوریه تابع پریودیک: $(-2 \le t \le 2)$; $f(t)=4-t^2$ مقدار $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...$ چیست؟ (کامپیوتر- آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\pi^2}{12}$ ۲) $\frac{\pi^2}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\pi^3}{32}$

۱۲۰- با توجه به سری فوریه برای تابع $f(x)=\frac{x^2}{2}$ برای $|x|<\pi$, $f(x+2\pi)=f(x)$ که به شکل $f(x)=\frac{\pi^2}{6}-2\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{9}\cos 3x-\frac{1}{16}\cos 4x+...\right)$ است،مقدار عددی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ کدام است؟ (ابزار دقیق واتوماسیون – سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2}{12}$

۱۲۱- فرض کنید $-L<x<L$ و $f(x)=x$ و سری فوریه تابع f به صورت $f(x)=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x$ باشد، در این صورت مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ کدام است؟ (مواد – سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi^2}{20}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{2\pi^2}{3}$

۱۲۲- بسط فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & , 0<x<\pi \\ -1 & , -\pi<x<0\end{cases}$ به صورت $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ می‌باشد. به کمک آن حاصل عبارت $S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...$ کدام است؟ (نانو مواد و شیمی – سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2}{90}$

۱۲۳- با استفاده از سری فوریه مثلثاتی تابع $f(t)=\begin{cases}t+\frac{\pi}{2} & -\pi<t<0 \\ -t+\frac{\pi}{2} & 0\le t\le \pi\end{cases}$ مقدار $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(2k+1)^2}+...$ کدام است؟ (مکانیک – سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۱۲۴- تابع متناوب $f(x)$ در یک دوره‌ی تناوب به صورت: $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ $f(x)=\begin{cases}1 & -\alpha<x<\alpha \\ 0 & -\pi<x<-\alpha \ , \ \alpha<x<\pi\end{cases}$ است. اگر بسط فوریه تابع به صورت $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}(\frac{\sin\alpha}{1}\cos x+\frac{\sin 2\alpha}{2}\cos 2x+\frac{\sin 3\alpha}{3}\cos 3x+...)$ باشد، در این صورت حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^2$ کدام است؟ (برق – سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$ ۲) $\frac{(\pi-\alpha)(\pi-\alpha)}{2}$ ۳) $\alpha(\pi-\alpha)$ ۴) $(\pi-\alpha)(\pi+\alpha)$

۱۲۵- اگر $f(x)=\begin{cases}2-x & 1<x\le 2\\ x & -1\le x\le 1\\ -2-x & -2\le x<-1\end{cases}$ ، آنگاه با استفاده از سری فوریه مثلثاتی این تابع، مجموع سری $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi^4}{64}$ ۲) $\frac{\pi^4}{96}$ ۳) $\frac{\pi^4}{128}$ ۴) $\frac{\pi^4}{192}$

(شیمی - بیوتکنولوژی -داروسازی و نانو مواد - سراسری ۸۶)

۱۲۶- در صورتی که برای $0<x\le 2$ داشته باشیم $x^2=\frac{4}{3}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(\frac{\pi n x}{2})$ مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi^4}{30}$ ۲) $\frac{\pi^4}{32}$ ۳) $\frac{\pi^4}{90}$ ۴) $\frac{\pi^4}{96}$

۱۲۷- با توجه به سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}x+1 & -\pi\le x<0\\ -\frac{1}{\pi}x+1 & 0\le x<\pi\end{cases}$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ حاصل سری $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{10}$ ۲) $\frac{\pi^4}{96}$ ۳) $\frac{3\pi^4}{256}$ ۴) $\frac{3\pi^2}{28}$

(بیومتریال - آزاد ۸۹)

۱۲۸- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$ برابر است با:

(بیو الکتریک - آزاد ۸۵)

۱) $\frac{\pi^6}{96}$ ۲) $\frac{\pi^6}{48}$ ۳) $\frac{\pi^6}{960}$ ۴) $\frac{\pi^6}{90}$

۱۲۹- اگر داشته باشیم: $0\le x\le\pi$; $\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos 2nx}{4n^2-1})$ ، آنگاه حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16n^2-1}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $1-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$ ۳) $1-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

(شیمی - بیوتکنولوژی و نانو مواد - سراسری ۸۸)

۱۳۰- با توجه به بسط نیم دامنه کسینوسی تابع $0<x<\pi$ ، $f(x)=\sin x$ حاصل سری $I=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4m^2-1}$ کدام است؟ (بیوالکتریک - آزاد ۸۹)

۱) $\frac{5-2\pi}{5}$ ۲) $\frac{-\pi}{10}$ ۳) $\frac{\pi}{4}(1-\frac{2}{\pi})$ ۴) $\frac{2-\pi}{4}$

۱۳۱- مقدار عددی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ چقدر است؟

(برق - آزاد ۹۱)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۲- اگر تابع $f(x)=\sin x, 0<x<\frac{\pi}{2}$ دارای سری فوریه کسینوسی به‌صورت $\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos 2nx}{\pi(1-4n^2)}$ باشد، حاصل $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{1-4n^2}$ کدام است؟

(بیومتریال - آزاد ۸۸)

۱) $\frac{-\pi\sqrt{3}}{8}$ ۲) $\frac{-\pi\sqrt{3}}{16}$ ۳) $\frac{-\pi\sqrt{2}}{8}$ ۴) $\frac{-\pi\sqrt{2}}{16}$

۱۳۳- مقدار انتگرال $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ برابر است با:

(مکانیک - سراسری ۹۱)

(در صورت نیاز از تساوی‌های: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ می‌توانید استفاده کنید.)

۱) $\frac{\pi^2}{12}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) انتگرال وجود دارد اماقابل محاسبه نمی‌باشد.

۱۳۴- تابع متناوب $f(x)$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است:

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<\pi-\alpha\\ 1 & \pi-\alpha<x<\pi+\alpha\\ 0 & \pi+\alpha<x<2\pi\end{cases}\ ;\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

اگر بسط فوریه آن به صورت روبرو باشد:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\cos x}{1}-\frac{\sin 2\alpha\cos 2x}{2}+\frac{\sin 3\alpha\cos 3x}{3}+\dots\right)$$

حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ چقدر است؟ (کامپیوتر – سراسری ۹۱)

۱) $\pi-1$ ۲) π^2-1 ۳) $\frac{\pi-1}{2}$ ۴) $\frac{\pi^2-1}{2}$

۱۳۵- مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ کدام است؟ (از بسط فوریه تابع $f(x)=x^2$ در بازه $-\pi<x<\pi$ استفاده کنید) (فیزیک – سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi^2}{90}$ ۲) $\frac{\pi^2}{12}$ ۳) $\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{6}$

۱۳۶- تابع $f(x)=\begin{cases}x+2 & -2<x<0\\ 1 & 0<x<2\end{cases}$ با بسط فوریه $f(x)=1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\left(\frac{2m-1}{2}\right)\pi x-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi x}{m}$ نشان داده شده است، در آن صورت مقدار $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$ کدام است؟ (معماری کشتی – سراسری ۹۱)

۱) 0 ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

۱۳۷- از سری فوریه‌ی تابع $f(x)=x$ روی $[-\pi,\pi]$، کدام گزینه را می‌توان نتیجه گرفت؟ (مهندسی نفت – سراسری ۹۱)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{\pi^3}{8}$ ۲) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ۳) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

۱۳۸- اگر بسط به سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=\sin x$، $0<x<\pi$ به صورت $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos(nx)$ باشد، آنگاه مقدار سری $\frac{1}{1^2\times3^2}+\frac{1}{3^2\times5^2}+\frac{1}{5^2\times7^2}+\dots$ کدام است؟ (دکتری – سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi^2-8}{16}$ ۲) $\frac{\pi^2-8}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2-8}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2-8}{2}$

یک گام فراتر

۱۳۹- دربسط فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ با دوره تناوب $T=2\pi$، فقط ضرایب جملات زیرممکن است، غیرصفر باشند:

۱) زوج کسینوسی ۲) فرد کسینوسی ۳) زوج سینوسی ۴) فرد سینوسی

۱۴۰- در بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\cos^{10}x$ (با دوره تناوب $T=2\pi$) ضریب $\cos 5x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) 0 ۴) $\frac{1}{20}$

۱۴۱- در بسط فوریه لژاندر تابع $(-1<x<1)$ $f(x)=x^4$ به صورت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}k_nP_n(x)$، ضریب k_3 کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{27}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) 0

۱۴۲- در بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\frac{\sin 9x}{\sin x}$ با دوره تناوب $T=2\pi$ به صورت $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ضریب a_4 کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۴

۱۴۳- با فرض اینکه سری فوریه لژاندر تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}P_n(x)$ باشد، حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx$ برابر کدام گزینه است؟ (راهنمایی $P_0(x)=1, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$)

۱) $\frac{62}{75}$ ۲) $\frac{72}{75}$ ۳) $\frac{38}{75}$ ۴) $\frac{12}{75}$

۱۴۴- حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\theta d\theta}{5-4\cos\theta}$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\frac{5\pi}{48}$ ۲) $\frac{13\pi}{46}$ ۳) $\frac{5\pi}{36}$ ۴) $\frac{13\pi}{48}$

۱۴۵- سیستم توابع $\left\{\sin\frac{x}{2},\sin\frac{3x}{2},\sin\frac{5x}{2},...\right\}$ کدام ویژگی را دارد؟

۱) مجموعه متعامد کامل در بازه $(-\pi,\pi)$ است.
۲) مجموعه متعامد کامل در بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ است.
۳) مجموعه متعامد کامل در بازه $(0,\pi)$ است.
۴) مجموعه متعامد کامل در بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ است، اما کامل نیست.

۱۴۶- هرگاه بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ به‌صورت $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}\sin nx$ (بادوره تناوب $T=2\pi$) باشد، حاصل $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{e^2+1}$ ۲) $\frac{\pi}{e^2-1}$ ۳) $\frac{2\pi}{e^2+1}$ ۴) $\frac{2\pi}{e^2-1}$

۱۴۷- با توجه به رابطه $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{6}=\begin{cases}2-x & 0<x<2\\ 0 & 2<x<6\end{cases}$ مقدار a_n کدام است؟

۱) $\frac{12\sin\frac{n\pi}{3}}{n\pi}$ ۲) $\frac{12(1-\cos\frac{n\pi}{3})}{n^2\pi^2}$ ۳) $\frac{6(1-\cos\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi^2}$ ۴) $\frac{6\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}$

۱۴۸- در بسط فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{\pi}{4}\\ 0 & \frac{\pi}{4}<x<\pi\end{cases}$ با دوره تناوب $T=2\pi$ ضریب a_3 کدام است؟

۱) $\frac{1}{3\pi}$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$ ۴) $\frac{2}{3\pi}$

۱۴۹- در بسط فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\frac{2\pi}{3}\\ 2(\pi-x) & \frac{2\pi}{3}<x<\pi\end{cases}$ با دوره تناوب $T=2\pi$ ضریب b_n کدام است؟

۱) $\frac{6\sin(\frac{2\pi n}{3})}{n^2\pi^2}$ ۲) $\frac{3\sin(\frac{2\pi n}{3})}{n^2\pi}$ ۳) $\frac{3\sin(\frac{2n\pi}{3})}{n^2\pi^2}$ ۴) $\frac{6\sin(\frac{2\pi n}{3})}{n^2\pi}$

۱۵۰- در بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<|x|<\pi\end{cases}$ با دوره تناوب $T=2\pi$ ضریب $\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $1-\frac{1}{\pi}$ ۴) $1+\frac{1}{\pi}$

۱۵۱- در بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x<2\pi\\ 0 & 2\pi<x<4\pi\end{cases}$ با دوره تناوب $T=4\pi$، ضریب $\cos 4x$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{8\pi}$ ۲) $\frac{1}{8\pi}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 0

۱۵۲- با توجه به رابطه $e^{-2|x|}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ $(-\pi<x<\pi)$ مقدار a_n $(n\geq 1)$ کدام است؟

۱) $\frac{4[1-(-1)^n e^{-2\pi}]}{(n^2+4)\pi}$ ۲) $\frac{4[1-(-1)^n e^{-2\pi}]}{(4-n^2)\pi}$ ۳) $\frac{4[1+(-1)^n e^{-2\pi}]}{(n^2+4)\pi}$ ۴) $\frac{4[1+(-1)^n e^{-2\pi}]}{(4-n^2)\pi}$

۱۵۳- حاصل سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2\pi n}{3})\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{6}$ ۳) $\frac{\pi^2}{12}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۱۵۴- با توجه به بسط فوریه مختلط $e^{ax}=\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-in}e^{inx}$ $(-\pi<x<\pi)$، حاصل سری عددی $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$ کدام است؟

۱) $\pi\coth(\pi)$ ۲) $\frac{\pi}{2}\coth(\frac{\pi}{2})$ ۳) $\frac{\pi}{2}\coth(2\pi)$ ۴) $\pi\coth(2\pi)$

۱۵۵- مقدار ثابت بسط فوریه تابع $f(x)=\sin^5 x+\cos^2 x$ (با دوره تناوب $T=2\pi$) کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۵۶- هرگاه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n\cos nx}{n^2}$ $(-\pi<x<\pi)$ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f(x)=\frac{\pi-x^2}{2}$ ۲) $f(x)=\frac{x^2}{2}$ ۳) $f(x)=x^2-\frac{\pi^2}{3}$ ۴) $f(x)=x^2-\frac{\pi^2}{6}$

۱۵۷- حاصل سری عددی $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin^2(\frac{k\pi}{4})}{k^2}$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $-\frac{\pi^2}{18}$ ۲) $-\frac{\pi^2}{32}$ ۳) $-\frac{\pi^3}{18}$ ۴) $-\frac{\pi^3}{32}$

۱۵۸- هرگاه بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=|\sin x|$ $(-\pi<x<\pi)$ به صورت $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$ باشد، بسط فوریه مثلثاتی تابع $g(x)=|\cos x|,(-\pi<x<\pi)$ برابر کدام گزینه خواهد بود؟

۱) $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx$ ۲) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx$

۳) $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$ ۴) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(\frac{k\pi}{2})}{4k^2-1}\cos 2kx$

۱۵۹- با توجه به رابطه $x=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$ مقدار b_{2n-1} کدام است؟

۱) $\frac{4(-1)^n}{(2n-1)^2\pi}$ ۲) $\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi}$ ۳) $\frac{2(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}$ ۴) $\frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi}$

پاسخ تست‌های فصل اول

۱- (۴)

سری (a) بیانگر بسط نیم دامنه‌ای فرد تابع $f(x)$ و سری (b) بیانگر بسط نیم دامنه‌ای زوج تابع $f(x)$ است. انتخاب یکی از این دو سری بستگی به شرایط مورد نیاز مساله دارد. به طور مثال چنانچه بعداً خواهیم دید، در بررسی معادله حرارت در طول یک میله متناهی، اگر دو انتهای میله در مخلوط آب و یخ باشد، از سری (a) استفاده می‌کنیم و در صورتی که دو انتهای میله عایق شده باشد، از سری (b) استفاده می‌کنیم.

۲- (۱)

تابع $f(x)=x$ در بازه $-\pi<x<\pi$ تقارن فرد دارد و لذا $a_n=0$ خواهد بود.

۳- (۱)

چنانچه تابع $f(x)=\cos 2x$ را در بازه $0<x<\frac{\pi}{2}$ رسم کرده و با دوره تناوب $T=\frac{\pi}{2}$ گسترش دهیم، خواهیم دید که نمودار متناوب حاصل تقارن فرد دارد و لذا سری فوریه آن سینوسی خواهد بود.

۴- (۱)

چنانچه تابع $f(x)$ را در بازه $-\pi<x<\pi$ رسم کنیم، خواهیم دید که این تابع تقارن زوج دارد و لذا $b_n=0$ خواهد بود.

۵- (۱)

تابع $\delta(x)$ تقارن زوج دارد بنابراین $b_n=0$ خواهد بود. از طرف دیگر طبق خاصیت غربالی تابع $\delta(x)$ می‌توان چنین نوشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx=f(0)\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)\cos nx\ dx=\frac{1}{\pi}[\cos(0)]=\frac{1}{\pi}$$

۶- (۱)

با رسم تابع $f(x)=\cos x$ در بازه $0<x<\pi$ و گسترش فرد آن (زیرا بسط فوریه سینوسی آن مورد نظر است) با دوره تناوب $T=2\pi$، خواهیم دید که تابع متناوب حاصل، به جای دوره تناوب $T=2\pi$، می‌تواند دوره تناوب π (نصف دوره تناوب فرضی مساله) نیز داشته باشد. در این صورت در بسط فوریه آن فقط هارمونیک‌های زوج وجود خواهند داشت. $b_5=0$

۷- (۲)

با رسم تابع $f(x)$ خواهیم دید که دارای تقارن ربع موجی زوج می‌باشد. بنابراین: $b_n=0 \quad , \quad a_{2n}=0 \quad , \quad a_{2n-1}\neq 0$

۸- (۴)

چنانچه تابع $g(x)=x(\pi-x)\frac{\pi}{8}$ را در بازه $0<x<\pi$ رسم کرده و آن را گسترش فرد دهیم، خواهیم دید که نمودار متناوب حاصل تقارن ربع موجی فرد دارد. بنابراین در بسط فوریه مثلثاتی آن، فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارند. (گزینه ۲ فاقد هارمونیک $\sin 1x$ می‌باشد.)

۹- (۳)

با رسم تابع $f(x)=\frac{L}{2}-x$ در بازه $0<x<L$ و گسترش آن با دوره تناوب $T=L$، خواهیم دید که نمودار تابع متناوب حاصل، تقارن فرد داشته و پایه متعامد آن به صورت $\sin(\frac{n\pi x}{\frac{L}{2}})=\sin\frac{2n\pi x}{L}$ می‌باشد.

۱۰- (۲)

$$\int_{0}^{2\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi & m=n\end{cases}$$

۱۱- (۲)

مجموعه S در بازه $-\pi<x<\pi$ متعامد است، اما کامل نیست. زیرا به طور مثال یک تابع زوج در بازه $(-\pi$ و $\pi)$ را نمی‌توان بر اساس این مجموعه بسط داد.

مجموعه C در بازه $-\pi<x<\pi$ متعامد است، اما کامل نیست. زیرا به طور مثال یک تابع فرد در بازه $(-\pi$ و $\pi)$ را نمی‌توان بر اساس این مجموعه بسط داد. مجموعه $C\cup S$ در بازه $0<x<\pi$ متعامد نیست. زیرا به طور مثال: $\int_{0}^{\pi}(\sin x)(1)dx=2\neq 0$

۱۲- (۲)

مجموع مورد نظر، نسبت به تابع وزنی $\omega(x)=1$ یک مجموعه متعامد است، اما کامل نیست، زیرا به طور مثال، تابع ثابت تعریف شده در بازه (π و $-\pi$) را نمی‌توان بر اساس این مجموعه بسط داد. در واقع این مجموعه زمانی کامل می‌شود که $\cos(0x)=1$ را نیز به آن اضافه کنیم.

۱۳- (۲)

طبق خاصیت تعامد توابع لژاندر می‌توان چنین نوشت:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}\xrightarrow{x=\cos t}\int_0^{\pi}[P_m(\cos t)]^2(\sin t)dt=\frac{2}{2m+1}\qquad (m=n)$$

۱۴- (۲)

معادلات دیفرانسیل داده شده از نوع لژاندر می‌باشند.

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0\qquad\Rightarrow y=P_n(x)$$

بنابراین:

$$\begin{cases}y_1(x)=P_2(x)\\ y_2(x)=P_1(x)\end{cases}\Rightarrow\int_{-1}^{1}P_1(x)P_2(x)dx=\int_{-1}^{1}y_1y_2dx=0$$

۱۵- (۱)

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin^2 x\ dx=\int_0^{\pi}f(x)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

با توجه به اینکه فقط یکی از جملات سری مثلثاتی پرانتز اول، با جمله‌ای مشابه از پرانتز دوم، یکسان است، طبق خاصیت تعامد، می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int_0^{\pi}\left(\frac{(-1)^2}{(2)^2}\cos 2x\right)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\frac{-1}{8}\int_0^{\pi}(\cos 2x)(\cos 2x)dx=-\frac{\pi}{16}$$

۱۶- (۳)

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(1)^2}}=2\pi$$

۱۷- (۱)

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\left[(\frac{1}{2})^0-(\frac{1}{2})^2\right]}{(2)^2-(1)^2}\right)=\frac{\pi}{8}$$

۱۸- (۲)

به ازای مقدار فرضی $a=5$ و $b=4$ خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\left[2\pi\frac{(\frac{-1}{2})^0-(\frac{-1}{2})^2}{(2)^2-(1)^2}\right]=\pi\frac{(1-\frac{1}{4})}{3}=\frac{\pi}{4}$$

۱۹- (۱)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}d\theta=\frac{2\pi(a)^2}{1-a^2}$$

۲۰- (۲)

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{(5)^2-(4)^2}}=\frac{2\pi}{3}$$

۲۱- (۳)

a_0 مقدار dc (متوسط) یک سیگنال را مشخص می‌کند.

۲۲- (۳)

$$a_0=\frac{1}{10}\int_0^{10}4xdx=20$$

۲۳- (۳)

با فرض اینکه دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر ۲ باشد، خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x)dx = 1$$

۲۴- (۲)

تابع $f(x)$ تقارن فرد داشته و بنابراین مقدار متوسط آن صفر خواهد بود.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx = 0$$

۲۵- (۲)

با فرض اینکه دوره تناوب تابع $f(t)$ برابر $T = L$ باشد، می‌توان چنین نوشت:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L}\sin(\frac{\pi}{L}t)dt = \frac{2}{\pi}$$

۲۶- (۳)

فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)(\pi+x)dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

روش دوم: مقدار سری فوریه خواسته شده در $x=0$ باید برابر π^2 گردد (؟) که فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

$$\frac{2\pi^2}{3} + 4(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-...) = \frac{2\pi^2}{3} + 4(\frac{\pi^2}{12}) = \pi^2$$

۲۷- (۲)

فقط گزینه ۲ این ویژگی را دارد.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^2dt = \frac{1}{3}$$

۲۸- (۱)

$$g(x) = f(x)+1 \Rightarrow a_0 = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$$

۲۹- (۲)

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(2-x)dx = 1$$

۳۰- (۲)

تابع دلتای دیراک $\delta(t)$ تقارن زوج دارد. (گزینه ۱ و ۳ نادرست است) همچنین طبق خاصیت غربالی تابع ضربه، می‌توان چنین نوشت:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)dt = \frac{1}{2\pi} \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}$$

۳۱- (۳)

مقدار متوسط بسط مورد نظر برابر است با:

$$a_0 \frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(x)dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L}x(L-x)dx = \frac{L^2}{6}$$

همچنین با رسم نمودار تابع $f(x)$ و گسترش زوج آن (با دوره تناوب $T=2L$) خواهیم دید که نمودار حاصل نسبت به هر دو خط عمودی $x=0, x=\frac{T}{4}=\frac{L}{2}$ تقارن زوج دارد. بنابراین بسط فوریه آن شامل هارمونیک‌های زوج کسینوسی به شکل $\cos\frac{2m\pi x}{L}$ خواهد بود. بدیهی است که علامت اولین هارمونیک کسینوسی نیز باید منفی باشد. (؟)

۳۲- (۱)

در تابع پله‌ای شکل متقارن، فقط هارمونیک‌های فرد وجود دارد.

۳۳- (۴)

$$b_n = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ \frac{4\times 1}{(2m-1)\pi} & n = 2m-1 \end{cases}$$

۳۴- (۱)

در بسط فوریه مثلثاتی تابع پله‌ای شکل متقارن، فقط هارمونیک‌های فرد وجود دارد.

۳۵- (۱)

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ -1 & -\pi<x<0\end{cases}\quad\Rightarrow b_n=\begin{cases}0 & n=2m\\ \dfrac{4\times 1}{(2m-1)\pi} & n=2m-1\end{cases}$$

۳۶- (۲)

در بسط فوریه مثلثاتی تابع پله‌ای شکل متقارن فرد، هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارند، که همگی آنها هم علامت‌اند.

۳۷- (۱)

همانطور که در تست قبل نیز گفته شد؛ در بسط فوریه مثلثاتی تابع پله‌ای شکل متقارن فرد، هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارند، که همگی آنها هم علامت‌اند.

۳۸- (۳)

در بسط فوریه مثلثاتی تابع پله‌ای شکل متقارن زوج، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارند که یک در میان تغییر علامت می‌دهند. با توجه به اینکه دوره تناوب برابر $T=4$ می‌باشد، پایه متعامد بسط فوریه به صورت $\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2}$ خواهد بود.

۳۹- (۲)

در بسط فوریه تابع پله‌ای شکل متقارن، هارمونیک زوج $(\cos 4x)$ وجود ندارد.

۴۰- (۲)

بدیهی است که مقدار متوسط تابع $f(x)$ برابر $\frac{1}{2}$ است. $(\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2})$ همچنین تابع $f(x)$ به صورت پله‌ای شکل متقارن (تقارن مخفی فرد) است. بنابراین، فقط شامل هارمونیک‌های فرد سینوسی خواهد بود.

۴۱- (۱)

چنانچه تابع $f(x)$ را در بازه $0<x<\pi$ رسم کرده و آن را گسترش زوج دهیم (زیرا سری فوریه کسینوسی آن مورد نظر است) و با دوره تناوب $T=2\pi$ به طور متناوب تکرار نماییم، خواهیم دید که نمودار حاصل به صورت پله‌ای شکل متقارن زوج است. بنابراین:

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2m\\ -\dfrac{2(1-2)(-1)^m}{(2m-1)\pi} & n=2m-1\end{cases}\qquad a_2=0, a_3=\frac{2}{3\pi}$$

۴۲- (۲)

بدیهی است که مقدار متوسط تابع برابر $\frac{1}{2}$ است.

۴۳- (۱)

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2m\\ -\dfrac{2(0-1)(-1)^m}{(2m-1)\pi} & n=2m-1\end{cases}\qquad a_0=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

۴۴- (۳)

$$f(x)=H(-x)-2H(1-x)+H(2-x)=\begin{cases}-1 & 0<x<1\\ 1 & 1<x<2\end{cases}$$

اگر تابع فوق را بسط نیم دامنه‌ای زوج دهیم (زیرا سری فوریه کسینوسی آن مورد نظر است) خواهیم داشت:

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2m\\ -\dfrac{2(-1-1)(-1)^m}{(2m-1)\pi} & n=2m-1\end{cases}\quad\Rightarrow a_n=\begin{cases}0 & n=2m\\ \dfrac{-4(-1)^{m-1}}{(2m-1)\pi} & n=2m-1\end{cases}$$

۴۵- (۲)

چنانچه تابع $f_1(x)=x$ را در بازه $0<x<\pi$ رسم کرده و آن را با دوره تناوب $T=2\pi$ گسترش زوج دهیم (طبق فرض مساله) نمودار آن به شکل شیب متقارن زوج خواهد بود،لذا در بسط فوریه مثلثاتی آن فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی به‌شکل $\cos\frac{(2k-1)\pi x}{\pi}$ وجود خواهند داشت.

$$f(x)=x+\cos 2x=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{\pi}+\cos 2x \qquad \Rightarrow \cos 2x \text{ ضریب } =1$$

(فاقد جمله ای به صورت $\cos 2x$ می‌باشد.)

۴۶- (۱)

با توجه به پایه مثلثاتی $\sin\frac{k\pi x}{L}$ و $\cos\frac{k\pi x}{L}$ می‌توان نتیجه گرفت که دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر $T=2L$ می‌باشد و لذا اگر تابع $f(x)$ را در بازه $0<x<2L$ رسم کرده و با دوره تناوب $T=2L$ گسترش دهیم، نمودار حاصل به صورت شیب متقارن زوج خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases} b_k=0 \\ a_{2k}=0 \qquad (k\neq 0)\end{cases} \qquad \frac{a_0}{2}=\frac{0+L}{2}=\frac{L}{2} \qquad \Rightarrow a_0=L$$

۴۷- (۱)

نمودار تابع متناوب $f(x)$ به صورت شیب متقارن زوج خواهد بود و لذا:

$$a_n=\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ -\frac{4\times1\times1}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد}\end{cases} \qquad a_5=\frac{-4}{25\pi^2}$$

۴۸- (۱)

$$a_n=\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ -\frac{4\times1\times\pi}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد}\end{cases} \qquad a_5=\frac{-4}{25\pi}$$

۴۹- (۲)

$$a_n=\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ -\frac{4\times1\times L}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد}\end{cases} \qquad a_3=\frac{-4L}{9\pi^2}$$

۵۰- (۴)

$$a_n=\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ +\frac{4\times1\times2}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد}\end{cases} \qquad a_3=\frac{8}{9\pi^2}$$

۵۱- (۴)

$$a_n=\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ +\frac{4\times1\times1}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد}\end{cases} \qquad a_3=\frac{4}{9\pi^2}$$

۵۲- (۱)

در بسط فوریه مثلثاتی شیب متقارن زوج فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارد. فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

۵۳- (۱)

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2m \\ +\frac{4\times(\frac{1}{2})\times2}{(2m-1)^2\pi^2} & n=2m-1\end{cases}$$

۵۴- (۲)

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ -\dfrac{4\times1\times1}{(2k-1)^2\pi^2} & n=2k-1\end{cases}$$

۵۵- (۳)

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ +\dfrac{4\times1\times1}{(2k-1)^2\pi^2} & n=2k-1\end{cases}$$

۵۶- (۱)

$$a_0=\frac{0+L}{2}=\frac{L}{2}\quad,\quad a_n=\begin{cases}0 & n=2m\\ -\dfrac{4\times1\times L}{(2m-1)^2\pi^2} & n=2m-1\end{cases}$$

۵۷- (۴)

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ +\dfrac{4\times(1)\times\pi}{(2k-1)^2\pi^2} & n=2k-1\end{cases}$$

در بسط فوریه مثلثاتی شیب متقارن زوج، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی با درجه همگرایی ۲ وجود دارند که فقط گزینه ۴ این ویژگی را دارد.

۵۸- (۲)

در بسط فوریه مثلثاتی شیب متقارن زوج، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی با درجه همگرایی ۲ وجود دارند.

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2m\\ -\dfrac{4\times(\frac{1}{\pi})\times\pi}{(2m-1)^2\pi^2} & n=2m-1\end{cases}$$

۵۹- (۲)

$$a_0=\frac{0+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\quad,\quad a_n=\begin{cases}0 & n=2m\\ -\dfrac{4\times1\times\pi}{(2m-1)^2\pi^2} & n=2m-1\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{(2m-1)^2\pi}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{\pi}\xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}}f(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)\frac{\pi}{3}}{(2m-1)^2}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)\frac{\pi}{3}}{(2m-1)^2}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{(\frac{4}{\pi})}=\frac{\pi^2}{24}$$

۶۰- گزینه صحیح موجود نمی‌باشد.

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{\cos(2P+1)x}{(2P+1)^2}$$

۶۱- (۳)

تابع $f(x)=\pi-2|x|$ به صورت شیب متقارن زوج می‌باشد. بنابراین در بسط فوریه مثلثاتی آن فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود خواهند داشت که وجود $\cos 1x$ در بسط فوریه آن ضروری است. (گزینه‌های ۱ و ۲ نادرستاند) همچنین به ازای $x=0$ حاصل سری مثلثاتی باید $f(0)=\pi$ گردد که فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\Bigg|_{x=0}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{8}{\pi}(\frac{\pi^2}{8})=\pi$$

۶۲- (۱)

نمودار تابع $f(x)$ به صورت موج دندانه اره‌ای فرد خواهد بود و لذا:

$$b_n=\frac{(۲-(-۲))(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\Rightarrow b_۳=\frac{۴}{۳\pi}$$

۶۳- (۳)

بسط فوریه تابع $f_۱(x)=x$ در بازه $-\pi<x<\pi$ با دوره تناوب $T=۲\pi$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[\pi-(-\pi)](-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{\pi})=۲\sin x-\sin ۲x+\frac{۲}{۳}\sin ۳x-\frac{۱}{۲}\sin ۴x+...$$

بنابراین:

$$x+\sin x=۳\sin x-\sin ۲x+\frac{۲}{۳}\sin ۳x-\frac{۱}{۲}\sin ۴x+...\Rightarrow b_۱=۳$$

۶۴- (۲)

$$x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[۲-(-۲)](-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{۲}\qquad (-۲<x<۲)\xrightarrow{n=۴}\sin ۲\pi x\ \text{ضریب}=\frac{-۴}{۴\pi}=-\frac{۱}{\pi}$$

۶۵- (۲)

$$t=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[\pi-(-\pi)](-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{\pi}=۲\sin t-\sin ۲t+\frac{۲}{۳}\sin ۳t...\qquad (-\pi<x<\pi)$$

$$t+\sin t=۳\sin t-\sin ۲t+\frac{۲}{۳}\sin ۳t-...\Rightarrow \sin ۳t\ \text{ضریب}=\frac{۲}{۳}$$

۶۶- (۱)

$$x=۲\sin x-\sin ۲x+\frac{۲}{۳}\sin ۳x-...\Rightarrow x+۲\sin x=۴\sin x-\sin ۲x+\frac{۲}{۳}\sin ۳x-...\Rightarrow b_۳=\frac{۲}{۳}$$

۶۷- (۴)

$$x=۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{\sin nx}{n}\qquad (-\pi<x<\pi)$$

$$x+۲\sin ۳x=(۲\sin x-\sin ۲x+\frac{۲}{۳}\sin ۳x-...)+۲\sin ۳x\Rightarrow a_۱=۰\quad ,\quad b_۳=\frac{۲}{۳}+۲=\frac{۸}{۳}$$

۶۸- (۴)

$$x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx=۲\sin x+\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin x\qquad\Rightarrow x+\sin x=۳\sin x+\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx$$

۶۹- (۱)

$$x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[۲-(-۲)](-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{۲})=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-۴(-۱)^{n}}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{۲}\right)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-۴\cos n\pi}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{۲})$$

۷۰- (۳)

$$x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[۲-(-۲)](-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{۲})=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{n-۱}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{۲}$$

۷۱- هر دو گزینه ۲ و ۳ صحیح می‌باشند.

$$x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n-۱}}{n}\sin nx$$

۷۲- (۴)

چنانچه تابع $f(x)$ را در بازه $۰<x<۲\pi$ رسم کرده و آن را با دوره متناوب $T=۲\pi$ گسترش دهیم، خواهیم دید که در طول یک دوره تناوب خود (به طور مثال در بازه $۰^+<x<۲\pi^+$) درنقطه $x=۲\pi$ ناپیوسته خواهد بود. بنابراین:

$$a_n=\frac{۱}{n\pi}\{(۲\pi-۰)\sin n(۲\pi)\}=۰$$

$$b_n=\frac{۱}{n\pi}\{-(۲\pi-۰)\cos n(۲\pi)\}=\frac{-۲}{n}$$

بدیهی است که مقدار متوسط تابع $f(x)$ برابر π می‌باشد.

$$f(x)=\pi+\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{-۲}{n})\sin nx=\pi-۲(\sin x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x+...)$$

۷۳- گزینه صحیح موجود نمی‌باشد.

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{[\pi-(-\pi)](-1)^{n+1}}{n\pi} & (-\pi<x<\pi) \\ b_m = \dfrac{[\pi-(-\pi)](-1)^{m+1}}{m\pi} & (-\pi<y<\pi) \end{cases} \Rightarrow b_{mn} = b_n b_m = \frac{4(-1)^{m+n}}{mn}$$

۷۴- (۱)

با توجه به اینکه قسمت زوج تابع $f(x)$ به صورت $f_e(x)=\frac{1}{2}|x|$ می‌باشد، و $f_e(x)$ به صورت شیب متقارن زوج می‌باشد، خواهیم داشت:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{4\times1\times\pi}{n^2\pi^2}\right) & n \text{ فرد} \end{cases}$$

۷۵- (۲)

بدیهی است که مقدار متوسط تابع متناوب $f(x)$ برابر $\frac{1}{2}$ است. همچنین تابع متناوب $f(x)$ تقارن مخفی فرد دارد و لذا در بسط فوریه مثلثاتی آن ضرایب a_n صفرند. $(T=2L=1)$

$$b_n = -\frac{2\times1\times(\frac{1}{2})}{n\pi} = \frac{-1}{n\pi}$$

۷۶- (۲)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi-(-\pi))(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\pi} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi<x<\pi)$$

۷۷- (۱)

به ازای $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ حاصل سری مثلثاتی جواب، باید برابر صفر گردد، که فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

۷۸- (۳)

$$f(x)=\cos^4 x+\sin^2 x+\frac{1}{4}+2\cos^2 x\sin x-\cos^2 x-\sin x$$

عبارت $\sin 3x$ را فقط می‌توان با ساده‌تر کردن جمله چهارم $(2\cos^2 x\sin x)$ بدست آورد. (؟) بنابراین:

$$2\cos^2 x\sin x = 2\left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]\sin x = \sin x+\sin x\cos 2x = \sin x+\frac{1}{2}[\sin 3x-\sin x] \Rightarrow \sin 3x \text{ ضریب } = \frac{1}{2}$$

۷۹- (۴)

$$\sin^2 x+2\sin x\cos 2x+\cos^2 2x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin 3x-\sin x+\frac{1+\cos 4x}{2} \Rightarrow a_1 = 0$$

۸۰- (۲)

$$f(x)=\sin^2 x\cos x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\cos x = \frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos x\cos 2x = \frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{4}[\cos x+\cos 3x]$$

$$=\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{4}$$

۸۱- (۳)

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

۸۲- (۱)

گزینه‌های ۲ و ۳ نمی‌توانند بیانگر سری فوریه توابع مثلثاتی باشند. (؟) همچنین حاصل سری جواب به ازای $t=0$، باید برابر $f(0)=1$ گردد، که گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

۸۳- (۱)

دقت کنید که گزینه‌های ۳ و ۴ نمی‌توانند بیانگر سری فوریه تابع مثلثاتی باشند. (؟)

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

۸۴- (۱)

هیچکدام از گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ نمی‌توانند بیانگر سری فوریه تابع مثلثاتی باشند. (؟) $\cos^2 \pi x = \frac{1+\cos 2\pi x}{2}$

۸۵- (۴)

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

گزینه‌های ۱ و ۳نمی‌توانند بیانگر سری فوریه تابع مثلثاتی باشند. به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ حاصل سری جواب باید برابر ۱ گردد که گزینه۴ این ویژگی را دارد.

۸۶- (۲)

گزینه‌های ۳ و ۴ مربوط به سری فوریه مثلثاتی توابع نمایی (هیپربولیکی) می‌باشد. (؟) اگر نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در بازه $0<x<\pi$ رسم کرده و آن را گسترش زوج دهیم (زیرا بسط فوریه کسینوسی آن مورد نظر است) خواهیم دید که در $x=0$ کمترین مقدار تابع متناوب رخ می‌دهد. بنابراین لازم است که ضریب اولین هارمونیک کسینوسی منفی باشد که گزینه ۲ این ویژگی را دارد.

۸۷- (۳)

چنانچه تابع $f(x)=\cos x$ را در بازه $0<x<\pi$ رسم کرده و آن را گسترش فرد دهیم (زیرا سری فوریه سینوسی آن مورد نظر است) و با دوره تناوب $T=2\pi$ به طور متناوب تکرار نماییم، خواهیم دید که نمودار حاصل با دوره تناوب $T'=\frac{T}{2}=\pi$ نیز متناوب خواهد بود. بنابراین، در بسط فوریه آن، فقط هارمونیک‌های زوج سینوسی وجود دارند. چنانچه بسط فوریه مثلثاتی این تابع را بر اساس دوره تناوب $T=2\pi$ بنویسیم، (خواسته مساله) با توجه به اینکه، در مخرج ضرایب سری فوریه تابع مثلثاتی غیر پایه‌ای $\cos 1x$ با دوره تناوب $T=2\pi$ عامل (n^2-1) وجود دارد (؟)، انتظار می‌رود که به ازای nهای زوج، این عامل به صورت $(2n)^2-1=4n^2-1$ در بیاید که این ویژگی فقط در گزینه ۳ دیده می‌شود.

روش تستی: مخرج ضرایب سری فوریه گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ به ازای $n=1$ صفر می‌گردد که غیر قابل قبول است.

۸۸- (۱)

به توضیحات مندرج در تست قبل مراجعه کنید.

۸۹- (۴)

نمودار تابع متناوب $f(x)$ پیوسته بوده و مشتق آن در طول یک دوره تناوب آن $(-\pi^+ < x < \pi^+)$ در نقطه $x=\pi$ ناپیوسته است. بنابراین:

$$a_n = \frac{\frac{1}{n\pi}\left\{\frac{\pi}{n\pi}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{n\pi\pi}{\pi}\right\}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{n\pi}\right)^2} = \frac{\frac{(-1)^n}{n^2\pi}}{1-\frac{1}{4n^2}} = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$$

با توجه به اینکه در $x=0$ بیشترین مقدار تابع رخ می‌دهد، گزینه‌های ۲ و ۳ نمی‌توانند صحیح باشند. (؟)

۹۰- (۳)

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}|\sin x|$$

با توجه به اینکه در بسط فوریه مثلثاتی تابع زوج $\frac{1}{2}|\sin x|$ ضریب b_n وجود ندارد، بنابراین می‌توان گفت که ضریب b_1 همان ضریب $\frac{1}{2}$ در عبارت $\frac{1}{2}\sin x$ می‌باشد.

۹۱- (۲)

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\ dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)\cos 2x\ dx+\int_{0}^{\pi}(\sin 2x)\cos 2x\ dx\right\}=0$$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2x\ dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)\sin 2x\ dx+\int_{0}^{\pi}(\sin 2x)\sin 2x\ dx\right\}=\frac{3}{4}$$

۹۲- (۳)

$$f(t)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{3}+\frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi x}{3}\right|$$

عبارت $\frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi x}{3}\right|$ بدلیل زوج بودن، فاقد ضرایب b_n می‌باشد. بنابراین بجز b_1 (ضریب $\sin\frac{\pi x}{3}$) که برابر $\frac{1}{2}$ است، بقیه b_nها صفرند.

۹۳- (۲)

می‌دانیم که بسط فوریه مثلثاتی تابع $g(x)=x$ در بازه $-\pi<x<\pi$ با دوره تناوب $T=2\pi$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\pi-(-\pi)](-1)^{n+1}}{n\pi}\sin nx=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\dots$$

$$x\sin x=(2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\dots)(\sin x)=2\sin^2 x-\sin x\sin 2x+\frac{2}{3}\sin x\sin 3x-\frac{2}{4}\sin x\sin 4x+\dots$$

$$=1-\cos 2x-\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)+\frac{1}{3}(\cos 2x-\cos 4x)-\frac{1}{4}(\cos 3x-\cos 5x)+\dots=1-\frac{1}{2}\cos x-\frac{2}{3}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 3x\dots$$

سری مثلثاتی فوق فقط با گزینه ۲ مطابقت دارد.

روش دوم: با توجه به خواص ضرایب سری فوریه می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} f(x)\xrightarrow[T]{FS} b_n \\ f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}\xrightarrow[T]{FS} a_n=\frac{b_{m-n}+b_{m+n}}{2}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x\xrightarrow[T=2\pi]{FS} b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \\ x\sin x\xrightarrow[T=2\pi]{FS} a_n=\frac{\frac{2(-1)^{(1-n)+1}}{1-n}+\frac{2(-1)^{(1+n)+1}}{1+n}}{2}=\frac{2(-1)^n}{1-n^2}=-\frac{2(-1)^n}{n^2-1}\end{cases}$$

استدلال کنید که چرا وجود عامل $(-1)^n$ در ضرایب سری فوریه تابع $f(x)=x\sin x$ ضروری است.

۹۴- (۱)

فقط گزینه ۱ می‌تواند بیانگر سری فوریه مثلثاتی یک تابع نمایی باشد. زیرا در مخرج ضرایب سری فوریه توابع نمایی (هیپربولیکی) عبارت $n^2+m^2(\frac{L}{\pi})^2$ دیده می‌شود که در این سوال $m=1$ و $L=\pi$ بوده و لذا باید در مخرج ضرایب سری فوریه آن عبارت n^2+1 دیده شود.

۹۵- (۴)

$$\begin{cases} f(0^-)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos 2x}{x^2}+2\right]=4 \\ f(0^+)=2-0=2\end{cases}\quad\Rightarrow S(0)=\frac{4+2}{2}=3$$

۹۶- (۲)

$$S(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\qquad S(\frac{\pi}{2})=\frac{f(\frac{\pi}{2}^-)+f(\frac{\pi}{2}^+)}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

$$S(\pi)=\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

۹۷- (۳)

$$S(1)=\frac{f(1^-)+f(1^+)}{2}=\frac{f(1^-)+f(-1^+)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

۹۸- (۴)

$$S(-5)=\frac{f(-5^-)+f(-5^+)}{2}=\frac{f(5^-)+f(-5^+)}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}\qquad S(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$S(5)=\frac{f(5^-)+f(5^+)}{2}=\frac{f(5^-)+f(-5^+)}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}$$

۹۹- (۴)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^3\sin(\frac{1}{x})=0 \qquad S(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{0+0}{2}=0$$

۱۰۰- (۱)

اگر a_n ضریب سری فوریه یک تابع متناوب باشد، لازم است که $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ باشد، که فقط ضریب C_n این ویژگی را دارد.

۱۰۱- (۳)

$$\lim_{n\to\infty} C_n=0$$

۱۰۲- (۱)

اگر a_n ضریب سری فوریه یک تابع متناوب باشد، لازم است که $\lim_{n\to\infty} na_n<\infty$ باشد، که فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

۱۰۳- (۱)

درجه همگرایی سری (الف) برابر ۲ و درجه همگرایی سری (ب) برابر ۱ است. بنابراین سری (الف) سریع تر از سری (ب) همگراست.

۱۰۴- (۱)

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx) \qquad \Rightarrow \delta(x-t)=\frac{1}{2\pi}(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-t))$$

۱۰۵- (۳)

با رسم تابع $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ و گسترش زوج آن با دوره تناوب $T=4$ خواهیم دید که در $x=0$ بیشترین مقدار تابع متناوب حاصل رخ می‌دهد. بنابراین، لازم است ضریب اولین هارمونیک کسینوسی مثبت باشد (گزینه‌های ۲ و ۴ نادرست اند). همچنین مقدار متوسط تابع متناوب $f(x)$ برابر است با:

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(1-\frac{x^2}{4})dx=\frac{1}{2}\int_0^2(1-\frac{x^2}{4})dx=\frac{2}{3}$$

۱۰۶- (۱)

$$x^2=\frac{L^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق، درجه همگرایی سری حاصل، برابر ۳ خواهد شد، که فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

$$\frac{x^3}{3}=\frac{L^2}{3}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^3}{(n\pi)^3}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{L}\Rightarrow\frac{x^3}{3}-\frac{L^2}{3}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^3}{(n\pi)^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}\Rightarrow\frac{x}{3}(\frac{x^2}{L^2}-1)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{\pi n^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

۱۰۷- (۲)

با انتگرال‌گیری از طرفین سری فوریه $g(x)$ خواهیم داشت:

$$\frac{x^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}x-4(\sin x-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-\dots)\Rightarrow\sin x-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-\dots=\frac{\frac{\pi^2}{3}x-\frac{x^3}{3}}{4}=\frac{x}{12}(\pi^2-x^2)$$

۱۰۸- (۲)

چنانچه نمودار تابع متناوب $g(x)$ را رسم کنیم، خواهیم دید که مقدار متوسط آن مخالف صفر است، که فقط گزینه ۲ این ویژگی را دارد.

$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$\frac{x^2}{4}=c-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\dots\xrightarrow{x=0}0=c-(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots)\Rightarrow c=\eta(2)=\frac{\pi^2}{12}$$

بنابراین:

$$x^2=4\left[\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\dots\right]$$

۱۰۹- (۳)

$$f(x)\xrightarrow{FS}\{a_0,a_n,b_n\}$$

$$f(x)\sin x\xrightarrow[T=2\pi]{FS}\left\{\frac{b_1}{2},\frac{b_{n+1}-b_{n-1}}{2},\frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2}\right\}\Rightarrow b'_3=\frac{a_{3-1}-a_{3+1}}{2}=\frac{a_2-a_4}{2}=\frac{\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{4\pi}}{2}=\frac{1}{8\pi}$$

۱۱۰- (۲)

ضرایب سری فوریه مثلثاتی توابع چندجمله‌ای، متناسب با $\frac{1}{n^k}$ است. فقط گزینه ۲ این ویژگی را دارد. $a_n\neq\frac{1}{(n+1)^k}$

دقت کنید که ضریب سری فوریه گزینه ۱، مربوط به توابع نمایی (هیپربولیکی) متناوب می‌باشد.

۱۱۱- گزینه صحیح موجود نمی‌باشد.

بدیهی است که تابع $f(x)$ تقارن فرد دارد و لذا مقدار متوسط بسط فوریه آن صفر خواهد بود. در واقع به علت اینکه در نقطه $x=0$ تابع $f(x)$ پیوسته است و $f(0)=0$ می باشد، لازم است که مقدار سری فوریه آن در $x=0$ برابر صفر گردد که هیچکدام از گزینه‌ها این ویژگی را ندارند.

$$|x|=\begin{cases}x & 0<x<\pi\\ -x & -\pi<x<0\end{cases}$$

با انتگرال گیری از طرفین سری فوریه داده شده، خواهیم داشت:

$$g(x)=\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^3}+c\qquad\Rightarrow 2g(x)=-\pi x=-\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^3}+c$$

بنابراین:

$$f(x)=2g(x)-\pi x=-\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^3}+c\qquad(f(0)=0\Rightarrow c=0)$$

۱۱۲- (۳)

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\qquad\Rightarrow f^*(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^*e^{-inx}\xrightarrow{n\to(-n)}f^*(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^*e^{inx}$$

$$f^*(x)=f(x)\Rightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^*e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^*e^{inx}\Rightarrow c_n=c_{-n}^*\Rightarrow c_{-n}=c_n^*$$

۱۱۳- (۲)

بدیهی است که مقدار متوسط تابع $f(x)$ برابر ۱ می‌باشد. (؟) همچنین تابع $f(x)$ حقیقی و زوج است، بنابراین ضرایب سری فوریه مختلط آن نیز، باید حقیقی و زوج باشد که فقط گزینه ۲ این ویژگی‌ها را دارد.

۱۱۴- (۴)

تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت سری فوریه مثلثاتی زیر نمایش داد:

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 3x}{2}+\frac{1-\cos 5x}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 5x$$

طبق رابطه پارسوال می‌توان چنین نوشت:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=2\pi\{(\tfrac{3}{2})^2+(\tfrac{1}{2})[(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^2]\}=\frac{21}{4}\pi$$

۱۱۵- (۳)

$$S=\xi(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

۱۱۶- (۲)

$$S_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

بدیهی است که حاصل سری عددی مورد نظر باید کمی از ۱ کمتر باشد، که فقط گزینهٔ ۲ این ویژگی را دارد.

۱۱۷- (۴)

نمودار تابع $f(x)$ به شکل تابع پله‌ای متقارن زوج است که می‌دانیم در بسط فوریه آن، فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی وجود دارد و یک در میان تغییر علامت می‌دهند. بنابراین با استفاده از بسط فوریه چنین تابعی حاصل سری عددی گزینه ۴ قابل محاسبه است. البته اگر از رابطه پارسوال استفاده نماییم، سری عددی گزینه ۳ نیز قابل اثبات است.

۱۱۸- (۱)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots=\beta(3)=\frac{\pi^3}{32}$$

بدیهی است که حاصل سری عددی مورد نظر کمی از ۱ کمتر بوده و با توجه به اینکه درجه همگرایی سری عددی ۳ می‌باشد، در صورت کسر حاصل باید عامل π^3 داشته باشیم، که فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

۱۱۹- (۱)

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\eta(2)=\frac{\pi^2}{12}$$

حاصل سری عددی مورد نظر کمی از ۱ کمتر بوده و بدلیل اینکه درجه همگرایی سری عددی ۲ می‌باشد، در صورت کسر حاصل باید عامل π^2 داشته باشیم، که فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

۱۲۰- (۴)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\eta(2)=\frac{\pi^2}{12}$$

۱۲۱- (۳)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

حاصل سری عددی باید کمی از ۱ بیشتر بوده و در صورت کسر حاصل عامل π^2 داشته باشیم.

۱۲۲- (۲)

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\lambda(2)=\frac{\pi^2}{8}$$

حاصل سری عددی باید کمی از ۱ بیشتر بوده و در صورت کسر حاصل عامل π^2 داشته باشیم.

۱۲۳- (۳)

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\lambda(2)=\frac{\pi^2}{8}$$

۱۲۴- (۱)

به ازای $\alpha=0$ حاصل سری عددی باید برابر صفر گردد. بنابراین گزینه‌های ۲ و ۴ نادرست‌اند. به ازای $\alpha=\frac{\pi}{2}$ حاصل سری عددی به صورت $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\lambda(2)$ در می‌آید که برابر $\frac{\pi^2}{8}$ است. بنابراین فقط گزینه ۱می‌تواند صحیح باشد.

۱۲۵- (۲)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}=\lambda(4)=\frac{\pi^4}{96}$$

بدیهی است که حاصل سری عددی باید کمی از ۱ بیشتر باشد (گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست‌اند) با توجه به چند جمله‌ای اول سری، گزینه ۲ تقریب مناسب‌تری برای آن می‌باشد. $(\pi^4\simeq 98\Rightarrow\frac{\pi^4}{96}\simeq 1)$

۱۲۶-(۳)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\xi(4)=\frac{\pi^4}{90}$$

۱۲۷-(۲)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}=\lambda(4)=\frac{\pi^4}{96}$$

۱۲۸-(۳)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\lambda(6)=\frac{\pi^6}{960}$$

بدیهی است که حاصل سری عددی باید کمی از ۱ بیشتر باشد و در صورت کسر حاصل عامل π^6 داشته باشیم. فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

۱۲۹-(۴)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16n^2-1}=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-\frac{1}{16}}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2(\frac{1}{4})^2}-\frac{\pi}{2(\frac{1}{4})\sin\frac{\pi}{4}}\right]=\frac{8-2\sqrt{2}\pi}{16}=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

۱۳۰-(۴)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4m^2-1}=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2(\frac{1}{2})^2}-\frac{\pi}{2(\frac{1}{2})\sin(\frac{\pi}{2})}\right]=\frac{2-\pi}{4}$$

۱۳۱-(۴)

روش اول:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\right]=\frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2(\frac{1}{2})^2}-\frac{\pi\cos(\frac{1}{2}\pi)}{2(\frac{1}{2})\sin(\frac{1}{2}\pi)}\right]=\frac{1}{2}$$

۱۳۲-(۴)

$$\sin x=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos 2nx}{\pi(1-4n^2)}\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

با مشتق گرفتن از طرفین رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$\cos x=\frac{-8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{1-4n^2}\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

به ازای $x=\frac{\pi}{4}$، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{1-4n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{1-4n^2}=\frac{-\pi\sqrt{2}}{16}$$

۱۳۳-(۲)

با توجه به اینکه حدود تغییرات x بین صفر و یک می‌باشد می‌توان از بسط مک لورن تابع $Ln(1+x)$ استفاده نمود.

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

بنابراین:

$$\int_0^1\frac{Ln(1+x)}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots\right)dx=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(۳)-۱۳۴

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n\sin n\alpha}{n}\cos nx$$

با استفاده از رابطه پاسوال می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^۲(x)dx=(\frac{\alpha}{\pi})^۲+\frac{۲}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^۲ \qquad \Rightarrow\frac{۱}{۲\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha}dx=\frac{\alpha}{\pi^۲}^۲+\frac{۲}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^۲$$

$$\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\alpha^۲}{\pi^۲}=\frac{۲}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^۲ \qquad \Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^۲=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{۲}$$

به ازای $\alpha=۱$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\sin n}{n})^۲=\frac{\pi-۱}{۲}$$

روش تستی: بدیهی است که حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\sin n}{n})^۲$ از حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ کمتر است. $(\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}=\frac{\pi^۲}{۶})$ و تنها گزینه‌ای که این ویژگی را دارد، گزینه ۳ است.

(۲)-۱۳۵

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲}=۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}-...=\frac{\pi^۲}{۱۲}$$

حاصل سری باید کمی از یک کمتر باشد که فقط گزینه ۲ این ویژگی را دارد.

(۲)-۱۳۶

$$\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲m-۱)^۲}=\frac{\pi^۲}{۸}$$

(۲)-۱۳۷

تابع $f(x)=x$ در بازه $-x<x<\pi$ با دوره تناوب $T=۲\pi$ ناپیوسته است. بنابراین درجه همگرایی ضرایب فوریه آن یک خواهد بود. چنانچه از رابطه پارسوال استفاده کنیم، درجه همگرایی سری عددی حاصل برابر دو خواهد شد که فقط گزینه ۲ این ویژگی را دارد.

$$x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx \qquad (-\pi<x<\pi)$$

با استفاده از رابطه پارسوال، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^۲dx=\frac{\pi^۲}{۳}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}b_n^۲=۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}=\frac{\pi^۲}{۶}$$

(۱)-۱۳۸

$$f(x)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲mx}{۴m^۲-۱}=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲mx}{(۲m-۱)(۲m+۱)}$$

$$۱+\cos n\pi=\begin{cases}۰ & n=۲m-۱\\ ۲ & n=۲m\end{cases}$$

با توجه به اینکه سری عددی خواسته شده به صورت $\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲m-۱)^۲(۲m+۱)^۲}$ می‌باشد، بنابراین باید از رابطه پارسوال استفاده کنیم:

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^۲dx=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}(\sin x)^۲dx=\frac{۴}{\pi^۲}+\frac{۸}{\pi^۲}\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲m-۱)^۲(۲m+۱)^۲}$$

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۴}{\pi^۲}+\frac{۸}{\pi^۲}S\Rightarrow S=\frac{\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{\pi^۲}}{(\frac{۸}{\pi^۲})}=\frac{\pi^۲-۸}{۱۶}$$

روش تستی: بدیهی است که با توجه به شدت درجه همگرایی سری عددی خواسته شده، حاصل آن باید به مقدار خیلی کمی از $\frac{۱}{۹}$ بیشتر باشد که فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

(۴)-۱۳۹

تابع $f(x)$ تقارن نیم موج فرد دارد. بنابراین، در بسط فوریه مثلثاتی آن، فقط هارمونیک‌های فرد سینوسی وجود دارند.

(۳)-۱۴۰

بدیهی است که، دوره تناوب تابع $f(x)$ می‌تواند برابر $\frac{T}{۲}=\pi$ نیز باشد. (؟) بنابراین، چنانچه این تابع را بر اساس دوره تناوب $T=۲\pi$ بسط دهیم، ضریب هارمونیک‌های فرد کسینوسی آن صفر خواهد بود. در واقع، در بسط فوریه مثلثاتی چنین تابعی، فقط هارمونیک‌های زوج کسینوسی وجود دارند.

(۴)-۱۴۱

تابع $f(x)=x^۴$ در بازه $-۱<x<۱$ تقارن زوج دارد. بنابراین بسط فوریه لژاندر آن نیز، فقط شامل توابع $P_{۲k}(x)$ خواهد بود.

(۲)-۱۴۲

$$\frac{\sin(۲n+۱)x}{\sin x}=۱+۲\cos ۲x+۲\cos ۴x+...+۲\cos(۲nx)$$

بنابراین:

$$\frac{\sin ۹x}{\sin x}=۱+۲\cos ۲x+۲\cos ۴x+۲\cos ۲x+۲\cos ۸x\Rightarrow a_۴=۲$$

(۱)-۱۴۳

$$۳x^۲-۱=۲P_۲(x)\Rightarrow x^۲=\frac{۲}{۳}P_۲(x)+\frac{۱}{۳}P_۰(x)$$

$$I=\int_{-۱}^{۱}x^۲f(x)dx=\int_{-۱}^{۱}\left[\frac{۱}{۲}P_۲(x)+\frac{۱}{۳}P_۰(x)\right]\left[\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n+۱}{۲n+۱}P_n(x)\right]dx$$

بدیهی است که فقط دو جمله از پرانتز دوم با جملات پرانتز اول یکسانند و لذا طبق خاصیت تعامد توابع لژاندر در بازه (۱ و ۱-) می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int_{-۱}^{۱}\left[\frac{۲}{۳}P_۲(x)\right]\left[\frac{۳}{۵}P_۲(x)\right]dx+\int_{-۱}^{۱}\left[\frac{۱}{۳}P_۰(x)\right]\left[P_۰(x)\right]dx=\frac{۶}{۱۵}\left(\frac{۲}{۲\times۲+۱}\right)+\frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۲\times۰+۱}\right)=\frac{۱۲}{۷۵}+\frac{۲}{۳}=\frac{۶۲}{۷۵}$$

(۴)-۱۴۴

$$\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\cos n\theta d\theta}{a^۲+b^۲-۲ab\cos\theta}=\frac{۲\pi(\frac{b}{a})^n}{a^۲-b^۲}\qquad |b|<|a|$$

بنابراین با فرض $a=۲$ و $b=۱$ خواهیم داشت:

$$\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\cos^۳\theta d\theta}{۵-۴\cos\theta}=\frac{۳}{۴}\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\cos\theta}{۵-۴\cos\theta}d\theta+\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\cos ۳\theta}{۵-۴\cos\theta}d\theta=\frac{۳}{۴}\left[\frac{۲\pi(\frac{۱}{۲})^۱}{۳}\right]+\frac{۱}{۴}\left[\frac{۲\pi(\frac{۱}{۲})^۳}{۳}\right]=\frac{۱۳\pi}{۴۸}$$

(۲)-۱۴۵

سیستم توابع $\left\{\sin\frac{(۲n-۱)\pi x}{۲L}\right\}_{n\in N}$ یک مجموعه متعامد کامل در بازه $[۰,L]$ می‌باشد. چنانچه بخواهیم، تابع تعریف شده در بازه $[۰,L]$ را بر اساس این پایه متعامد بسط دهیم، لازم است که ابتدا، آن تابع را نسبت به محور $x=۰$ گسترش فرد و نسبت به محور $x=L$ گسترش زوج داده و با دوره تناوب مفروض $T=۴L$ تکرار نماییم و سپس ضرایب سری فوریه آن را محاسبه نماییم.

(۲)-۱۴۶

با استفاده از اتحاد پارسوال می‌توان چنین نوشت:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^۲(x)dx=۲\pi\left[\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}b_n^۲\right]=\pi\sum_{n=۱}^{\infty}e^{-۲n}=\frac{\pi}{e^۲-۱}$$

(۲)-۱۴۷

رابطه داده شده، بیانگر بسط فوریه نیم دامنه‌ای کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}۲-x & ۰<x<۲\\ ۰ & ۲<x<۶\end{cases}$ می‌باشد. بنابراین:

$$a_n=\frac{۲}{L}\int_{۰}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{۲}{۶}\int_{۰}^{۶}f(x)\cos\frac{n\pi x}{۶}dx=\frac{۱}{۳}\int_{۰}^{۲}(۲-x)\cos\frac{n\pi x}{۶}dx=\frac{۱۲}{n^۲\pi^۲}\left[۱-\cos\frac{n\pi}{۳}\right]$$

به روش سریع حل این مسئله فکر کنید.

(۳)-۱۴۸

چنانچه، تابع $f(x)$ را در بازه $0<x<\pi$ رسم کرده و نسبت به محور $x=0$ گسترش زوج داده (؟) و با دوره تناوب $T=2\pi$ تکرار نماییم، خواهیم دید که نمودار تابع متناوب حاصل، به صورت پله‌ای غیر متقارن زوج می باشد و ناپیوستگی‌های آن در $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=-\frac{\pi}{4}$ رخ می‌دهد.

(البته این موضوع را می‌توان، مستقیماً از ضابطه داده شده نیز نتیجه گرفت) بنابراین:

$$a_n=\frac{2\sin(\frac{n\pi}{4})}{n\pi}\Rightarrow a_3=\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$$

(۴)-۱۴۹

با توجه به ضابطه داده شده، می‌توان چنین نتیجه گرفت که ناپیوستگی مشتق تابع $f(x)$ در $x=\frac{2\pi}{3}$ (و $x=-\frac{2\pi}{3}$) رخ می‌دهد، و لذا:

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\left\{2\times(\frac{\pi}{n\pi})(1-(-2)\sin(\frac{2\pi n}{3})\right\}=\frac{6\sin(\frac{2\pi n}{3})}{n^2\pi}$$

(۱) -۱۵۰

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}|\cos x|$$

می‌دانیم که در بسط فوریه مثلثاتی تابع $g(x)=\frac{1}{2}|\cos x|$، بر اساس دوره تناوب $T=2\pi$، فقط هارمونیک‌های زوج کسینوسی وجود دارند. (؟)

بنابراین:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\cos 2nx\Rightarrow a_1=\frac{1}{2}$$

(۴) -۱۵۱

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx=\frac{2}{4\pi}\int_0^{4\pi}f(x)\cos\frac{nx}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\cos\frac{nx}{2}dx$$

ضریب $\cos 4x$، برابر a_8 می‌باشد، بنابراین:

$$a_8=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\cos 4x dx=0$$ (بر طبق خاصیت تعامد توابع مثلثاتی)

(۱) -۱۵۲

$$f(x)=\begin{cases}e^{-2x} & 0<x<\pi\\ e^{2x} & -\pi<x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-2e^{-2x} & 0<x<\pi\\ 2e^{2x} & -\pi<x<0\end{cases}$$

با توجه به ضابطه توابع $f(x)$ و $f'(x)$ می‌توان نتیجه گرفت که تابع $f(x)$ پیوسته بوده و ناپیوستگی‌های تابع $f'(x)$ در طول یک دوره تناوب آن (مثلاً در بازه $-\pi<x<\pi$) در $x=0$ و $x=\pi$ رخ می‌دهد و لذا:

$$a_n=\frac{\frac{1}{n\pi}\left\{(\frac{\pi}{n\pi})\left[(2-(-2)\cos 0+(-2e^{-2\pi}-2e^{-2\pi})\cos n\pi\right]\right\}}{1+4(\frac{\pi}{n\pi})^2}=\frac{4(1-e^{-2\pi}(-1)^n)}{(n^2+4)\pi}$$

(به روش سریع حل مسئله فکر کنید.)

(۳)-۱۵۳

با توجه به عبارت $\frac{\sin(\frac{2\pi n}{3})}{n^2}$، می توان حدس زد که باید از بسط فوریه سینوسی (؟) تابع $f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\frac{2\pi}{3}\\ 2(\pi-x) & \frac{2\pi}{3}<x<\pi\end{cases}$ استفاده کرد.

(شیب ضابطه اول می‌تواند دلخواه باشد، اما شیب ضابطه دوم با توجه به بازه مکانی تعریف شده، ۲ بر ابر شیب ضابطه اول خواهد بود.) در این صورت خواهیم داشت:

$$b_2=\frac{2\times\pi\times[1-(-2)]\sin(\frac{2\pi n}{3})}{n^2\pi^2}=\frac{6\sin\frac{2\pi n}{3}}{n^2\pi}\Rightarrow f(x)=\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n}{3}}{n^2}\sin nx$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{2}$ در طرفین رابطه قبل، خواهیم داشت:

$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}=\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2\pi n}{3})}{n^2}\sin(\frac{n\pi}{2})\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2\pi n}{3})\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

(۳)-۱۵۴

بدیهی است که تابع متناوب حاصل در $x=\pi$ ناپیوسته است و لذا طبق قضیه دیریکله، می‌توان چنین نوشت:

$$\left\{\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-in}e^{inx}\right\}_{x=\pi}=\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2}\Rightarrow\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a+in}{a^2+n^2}=\cosh a\pi$$

با توجه به اینکه $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n}{a^2+n^2}=0$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+n^2}=\pi\coth(a\pi)\xrightarrow{a=2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}=\frac{\pi}{2}\coth(2\pi)$$

(۴)-۱۵۵

می‌دانیم که مقدار ثابت بسط فوریه مثلثاتی $\sin x^{2n+1}$ (با دوره تناوب 2π) برابر صفر می‌باشد. بنابراین مقدار ثابت بسط فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ را باید در عبارت $\cos^2 x$ جستجو کنیم.

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\Rightarrow \quad \text{مقدار ثابت}=\frac{1}{2}$$

(۳)-۱۵۶

$$f(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}=-4\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots\right]=-4\left[\frac{\pi^2}{12}\right]=-\frac{\pi^2}{3}$$

فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.

(۴)-۱۵۷

با توجه به عبارت $\frac{\sin^2(\frac{k\pi}{4})}{k^2}=\frac{1-\cos\frac{k\pi}{2}}{2k^2}$، می‌توان حدس زد که استفاده از بسط فوریه کسینوسی (؟) تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ مناسب می‌باشد.(؟) به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$a_0=\frac{\pi}{8},a_k=\frac{2(1-\cos\frac{k\pi}{2})}{k^2\pi^2}=\frac{4\sin^2\frac{k\pi}{4}}{k^2\pi^2}\Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{8}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{4}}{k^2}\cos kx$$

به ازای $x=\pi$، می‌توان چنین نوشت:

$$f(\pi)=0=\frac{\pi}{8}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin^2\frac{k\pi}{4}}{k^2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin^2\frac{k\pi}{4}}{k^2}=-\frac{\pi^3}{32}$$

(۲)-۱۵۸

$$g(x)=f(x-\frac{\pi}{2})\Rightarrow a'_n=a_n\cos\frac{2\pi n(\frac{\pi}{2})}{2\pi}-b_n\sin\frac{2\pi n(\frac{\pi}{2})}{2\pi}$$

$$a'_n=a_n\cos\frac{n\pi}{2}\Rightarrow a'_{2k}=a_{2k}\cos k\pi=(-1)^k a_{2k}$$

(۲)-۱۵۹

با توجه به فرم سری فوریه مثلثاتی داده شده، می‌توان چنین گفت که تابع متناوب حاصل، تقارن نیم موج فرد دارد (؟) بنابراین لازم است، تابع $f(x)=x$ را در بازه $0<x<\frac{\pi}{2}$ رسم کرده و آن را نسبت به محور $x=0$ گسترش فرد و نسبت به محور $x=\frac{\pi}{2}$ گسترش زوج دهیم و با دوره تناوب $T=2\pi$ تکرار نماییم. در این صورت تابع متناوب حاصل به صورت شیب متقارن فرد خواهد بود و می‌توان چنین نوشت:

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\left\{(\frac{\pi}{n\pi})\left[(-1-1)\sin(\frac{-n\pi}{2})+(1-(-1))\sin(\frac{n\pi}{2})\right]\right\}=\frac{2\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi}\Rightarrow\begin{cases}b_{2n}=0\\ b_{2n-1}=\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi}\end{cases}$$