جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

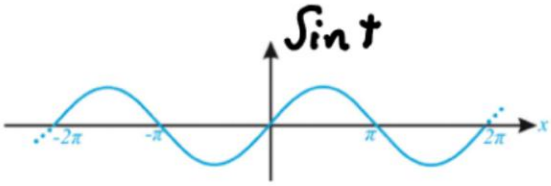
دوره تناوب

$\sin(2t) \Longrightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ $\cos(\pi t) \Longrightarrow T=\frac{2\pi}{\pi}=2$	$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$	$e^{j\omega_0 t}, \sin\omega_0 t$ $\cos\omega_0 t$
$\sin(2n) \Longrightarrow \frac{2\pi}{2}=\pi \notin Q$ $\cos(\frac{3\pi}{5}n) \Longrightarrow \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}}=\frac{10}{3}\in Q \rightsquigarrow N=10$	$\frac{2\pi}{\omega_0}\notin Q$ غیرمتناوب $\frac{2\pi}{\omega_0}\in Q$ متناوب	$e^{j\omega_0 n}, \sin\omega_0 n$ $\cos\omega_0 n$
$\sin(\frac{2\pi}{5})n^2 \Longrightarrow N=5$ $\cos(\frac{3\pi}{5})n^2 \Longrightarrow N=2\times 5=10$	اگر m و N هر دو فرد باشند، دوره تناوب برابر $2N$ و در غیر این صورت برابر N می باشد.	$e^{j(\frac{m\pi}{N})n^2}, \sin(\frac{m\pi}{N})n^2$ $\cos(\frac{m\pi}{N})n^2$
$2\cos(3t)+5\sin(2t) \Longrightarrow \frac{3}{2}\in Q$ $T=\mathrm{Lcm}(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{2})=\mathrm{Lcm}(\frac{4\pi}{6},\frac{6\pi}{6})=2\pi$ $2\cos(3t)+5\sin(\pi t) \Longrightarrow \frac{3}{\pi}\notin Q$	$\frac{\omega_1}{\omega_2}\notin Q$ غیرمتناوب $T=\mathrm{Lcm}(\frac{2\pi}{\omega_1},\frac{2\pi}{\omega_2})$	$A\cos(\omega_1 t+\theta_1)$ $+$ $B\cos(\omega_2 t+\theta_2)$
$\sin(\frac{\pi}{4}n)\cos(\frac{\pi}{3}n)$ $N_x=8 \quad N_y=6 \quad N=\mathrm{Lcm}(8,6)=24$	$N=\mathrm{Lcm}(N_x,N_y)$	$x[n]\,y[n]$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-\lvert 2n+6k\rvert} \rightsquigarrow N=\frac{6}{2}=3$ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\lvert n-2k\rvert}$	$T=T_0$ $N=N_0$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t\mp kT_0)$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n\mp kN_0)$
$x[n] \rightsquigarrow N_x=8$ $x[n-2]+x[n-4]+x[n-6]+x[n-8]$ ($x[n]$) $x[n]+x[n-2]+x[n-4]+x[n-6] \rightsquigarrow N=2$	$T=\frac{T_0}{m}$	$\sum_{k=0}^{m-1} x(t-\frac{k}{m}T_0)$ با فرض اینکه دوره تناوب اساسی سیگنال $x(t)$ برابر T_0 باشد.
$x[n] \rightsquigarrow N_x=3$ $x_{(5)}[n] \rightsquigarrow N=5\times 3=15$	$N=m N_x$	$x_{(m)}[n]$
$x[n] \rightsquigarrow N_x=12$ $x[5n] \rightsquigarrow N=\frac{12}{\gcd(12,5)}=\frac{12}{1}=12$ $x[4n] \rightsquigarrow N=\frac{12}{\gcd(12,4)}=\frac{12}{4}=3$	$N=\frac{N_x}{\gcd(N_x,m)}$	$x[mn]$
$x[n] \rightsquigarrow N=8$ $y[n]=\begin{cases} x[n] & \text{اگر } n \text{ مضرب } 4 \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \rightsquigarrow N=\frac{4\times 8}{4}=8$	$N=\mathrm{Lcm}(N_x,m)$ $=\frac{m\times N_x}{\gcd(N_x,m)}$	$\begin{cases} x[n] & \text{اگر } n \text{ مضرب } m \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

$x[n]$ متناوب $\longrightarrow$ $x[n^2]$, $x[n^3]$, $x[n^4]$, ... متناوب

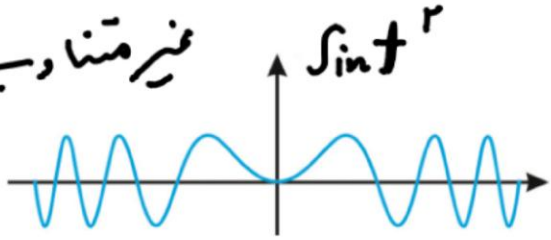
$x(t)$ متناوب $\not\longrightarrow$ $x(t^2)$ متناوب

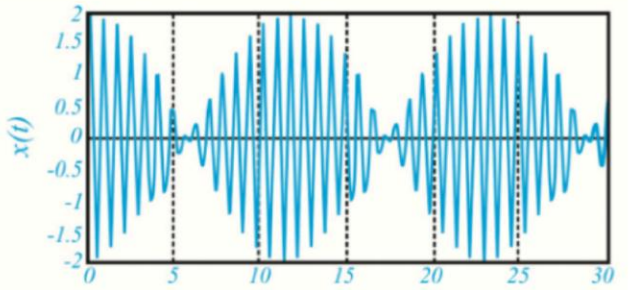
$x(t) = \sin t$



$x(t^2) = \sin t^2$

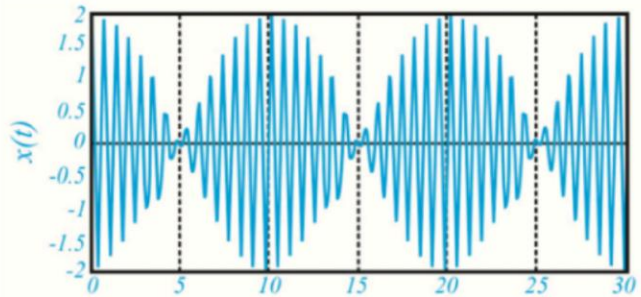
غیرمتناوب





$$x(t) = \sin(\underbrace{2\sqrt{2}\pi t}_{\omega_1}) + \sin(\underbrace{3\pi t}_{\omega_2})$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \notin Q$$



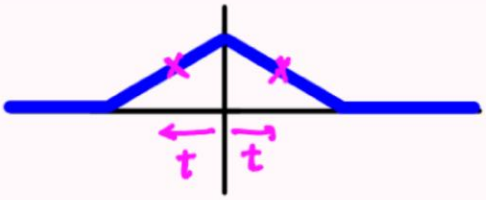
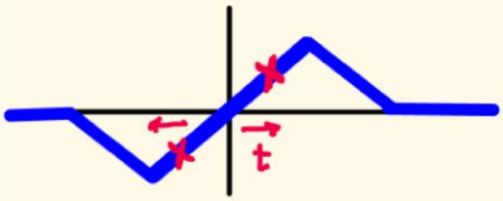
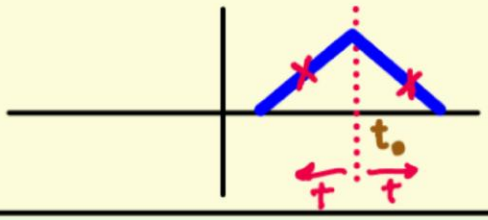
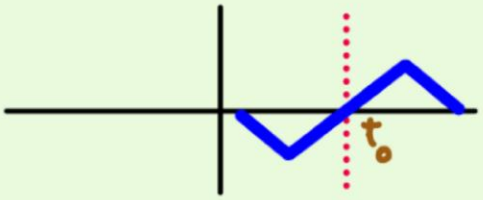
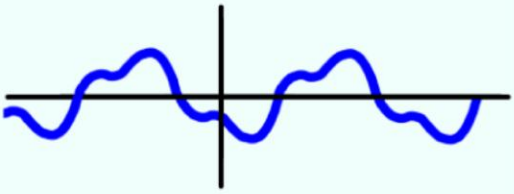
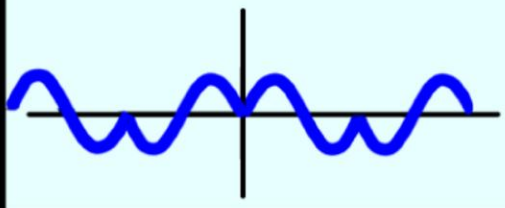
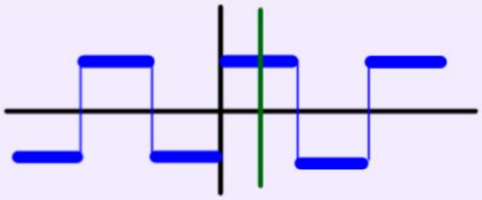
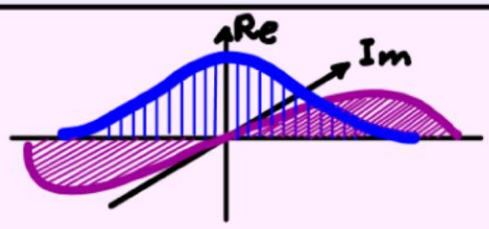
$$x(t) = \sin(\underbrace{2/8\pi t}_{\omega_1}) + \sin(\underbrace{3\pi t}_{\omega_2})$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{12} \in Q$$

مفاهیم اولیه و کانولوشن

جلسه ۱

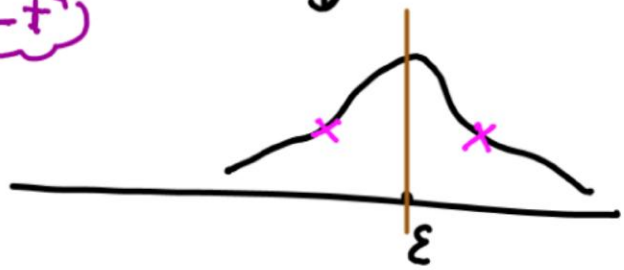
انواع تقارن

تقارن زوج حول زمان $t=0$	$x(0+t) = x(0-t)$ $x(t) = x(-t)$	
تقارن فرد حول زمان $t=0$	$x(0+t) = -x(0-t)$ $x(t) = -x(-t)$ $x(-t) = -x(t)$	
تقارن زوج حول زمان $t=t_0$	$x(t_0+t) = x(t_0-t)$ $x(t) = x(2t_0-t)$	
تقارن فرد حول زمان $t=t_0$	$x(t_0+t) = -x(t_0-t)$ $x(t) = -x(2t_0-t)$	
تقارن نیم موج	$x(t \pm \frac{T}{2}) = -x(t)$	
تقارن ربع موجی زوج	$x(t \pm \frac{T}{2}) = -x(t)$ $x(-t) = x(t)$	
تقارن ربع موجی فرد	$x(t \pm \frac{T}{2}) = -x(t)$ $x(-t) = -x(t)$	
تقارن هرمیتی	$x^*(t) = x(-t)$ $x_R(-t) = x_R(t)$ $x_I(-t) = -x_I(t)$	

$$x(t) = x(8-t) \longrightarrow x(4-t) = x(8-(4-t))$$

$t=0$, $t=8$, $\frac{8+0}{2}=4 \longrightarrow t \to 4-t$

$$x(4-t) = x(4+t)$$

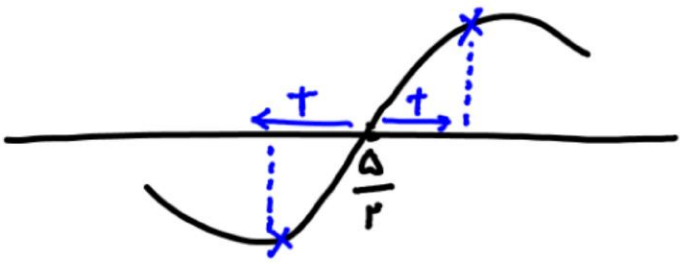


$$x(t-3) = -x(-t+8)$$

$t=3$, $t=8$, $\frac{3+8}{2}=\frac{11}{2} \longrightarrow t \to \frac{11}{2}-t$

$$x\left(\frac{11}{2}-t-3\right) = -x\left(-\left(\frac{11}{2}-t\right)+8\right)$$

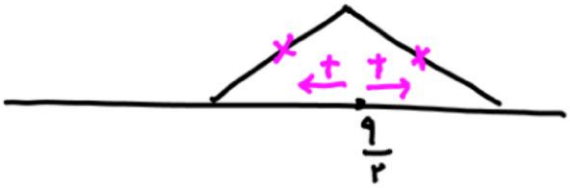
$$x\left(\frac{5}{2}-t\right) = -x\left(\frac{5}{2}+t\right)$$



$x(t)$ حقیقی , $x(t) = x(9-t)$

$0 \longleftrightarrow \frac{9}{2} \longleftrightarrow 9$ $\quad t \to \frac{9}{2}-t$

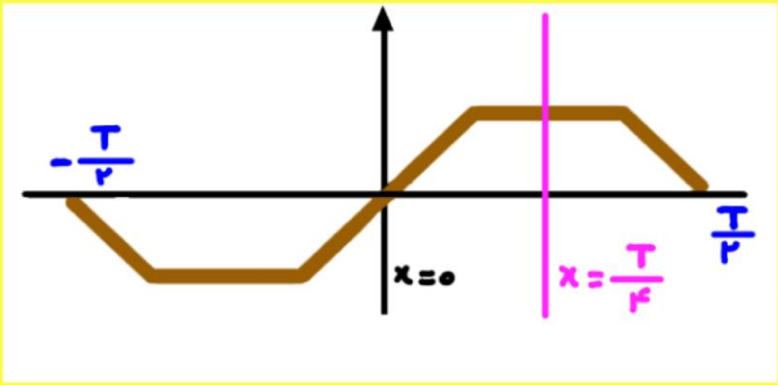
$$x\left(\frac{9}{2}-t\right) = x\left(\frac{9}{2}+t\right) \longrightarrow \angle X(j\omega) = -\frac{9}{2}\omega$$



مفاهیم اولیه و کانولوشن

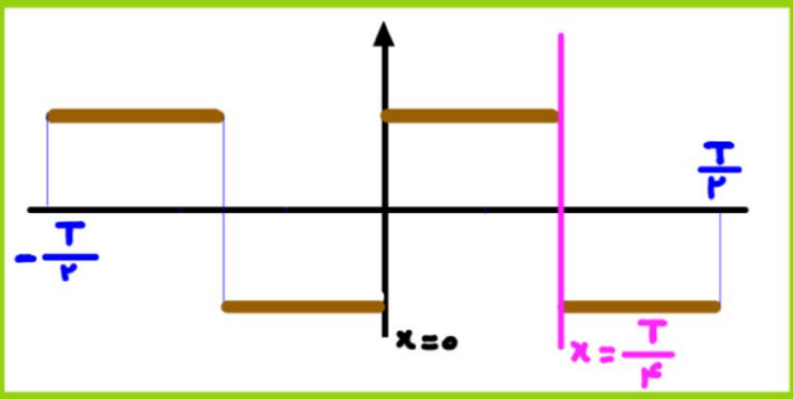
جلسه ۱

هارمونیک های فرد سینوسی $\sin[(2k+1)\omega_0 x]$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



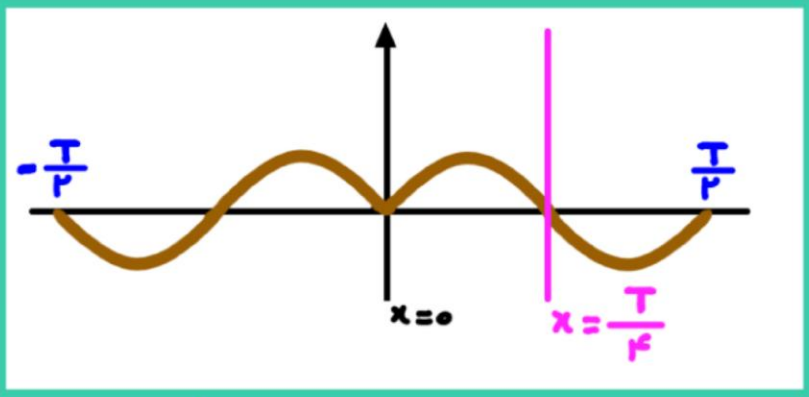
وضعیت تقارن نسبت به محور $x=\frac{T}{4}$	وضعیت تقارن نسبت به محور $x=0$
زوج	فرد

هارمونیک های زوج سینوسی $\sin(2k\omega_0 x)$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



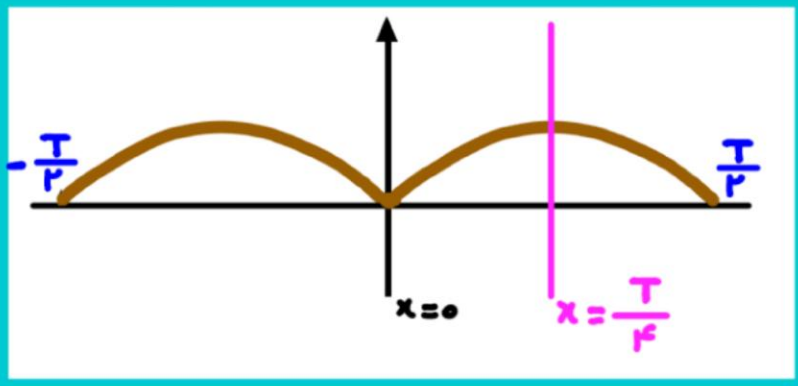
وضعیت تقارن نسبت به محور $x=\frac{T}{4}$	وضعیت تقارن نسبت به محور $x=0$
فرد	فرد

هارمونیک های فرد کسینوسی $\cos[(2k+1)\omega_0 x]$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



وضعیت تقارن نسبت به محور $x=\frac{T}{4}$	وضعیت تقارن نسبت به محور $x=0$
فرد	زوج

هارمونیک های زوج کسینوسی $\cos(2k\omega_0 x)$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



وضعیت تقارن نسبت به محور $x=\frac{T}{4}$	وضعیت تقارن نسبت به محور $x=0$
زوج	زوج

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

$t \to \frac{11}{2} - t$

$$x(t-3) = x(8-t)$$

$3 \xleftrightarrow{\frac{11}{2}} 8$

$x(\frac{11}{2}-t-3) = x(8-(\frac{11}{2}-t))$

$x(\frac{5}{2}-t) = x(\frac{5}{2}+t)$

$\angle X(jw) = 0 - \frac{5}{2}w$ با شرط حقیقی بودن $x(t)$

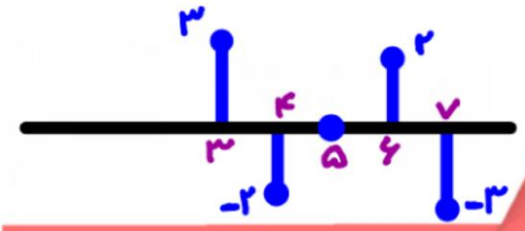
$n \to \frac{N-1}{2} - n$

$$h[n] = -h[N-1-n]$$

$0 \xleftrightarrow{\frac{N-1}{2}} N-1$

$h[\frac{N-1}{2}-n] = -h[\frac{N-1}{2}+n]$

$\angle H(jw) = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}w$ با شرط حقیقی بودن $h[n]$

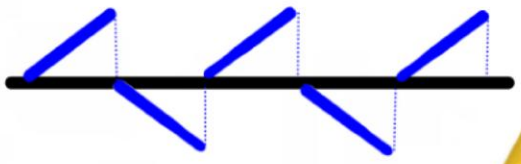


$x[5-n] = -x[5+n]$

$\Downarrow$

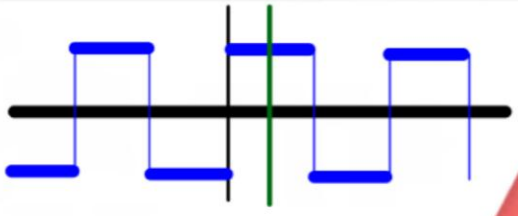
$x[n] = -x[10-n]$

$x[3] = -x[7]$ $\quad$ $x[4] = -x[6]$



$x(t \pm \frac{T}{2}) = -x(t)$

تقارن نیم موج



$t=0$	$t=\frac{T}{2}$
فرد	زوج

$\longrightarrow$ فقط شامل هارمونیک‌های فرد سینوسی است.

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{\text{زوج}} + j\underbrace{\frac{t}{1+t^2}}_{\text{فرد}}$$

$x_R(t) = x_R(-t)$

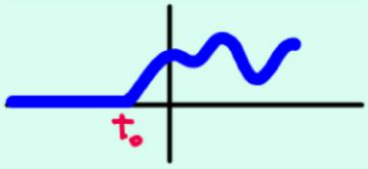
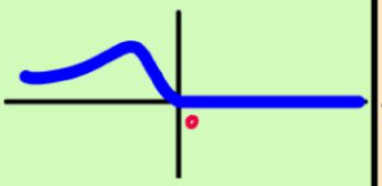
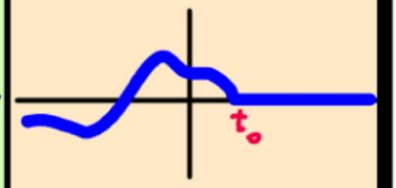
$x_I(t) = -x_I(-t)$

$\longrightarrow x^*(t) = x(-t)$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$ $\quad$ $x(t)=x_r(t)+j\,x_i(t)$ $\quad$ $x(t)=x_H(t)+x_{AH}(t)$

$x_e(t)$	$x_o(t)$	$x_r(t)$	$x_i(t)$	$x_H(t)$	$x_{AH}(t)$
$\frac{x(t)+x(-t)}{2}$	$\frac{x(t)-x(-t)}{2}$	$\frac{x(t)+x^*(t)}{2}$	$\frac{x(t)-x^*(t)}{2j}$	$\frac{x(t)+x^*(-t)}{2}$	$\frac{x(t)-x^*(-t)}{2}$

سیگنال سمت راستی	سیگنال علّی	سیگنال ضد علّی	سیگنال سمت چپی
			
$\forall t<t_0 \rightsquigarrow x(t)=0$	$\forall t<0 \rightsquigarrow x(t)=0$	$\forall t>0 \rightsquigarrow x(t)=0$	$\forall t>t_0 \rightsquigarrow x(t)=0$

$$x(t)=x(t)\,u(t)$$

$$x(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ x_e(0) & t=0 \\ 2x_e(t) & t>0 \end{cases}$$

$$x(t)=x(t)\,u(-t)$$

$$x(t)=\begin{cases} 2x_e(t) & t<0 \\ x_e(0) & t=0 \\ 0 & t>0 \end{cases}$$

انرژی (E)

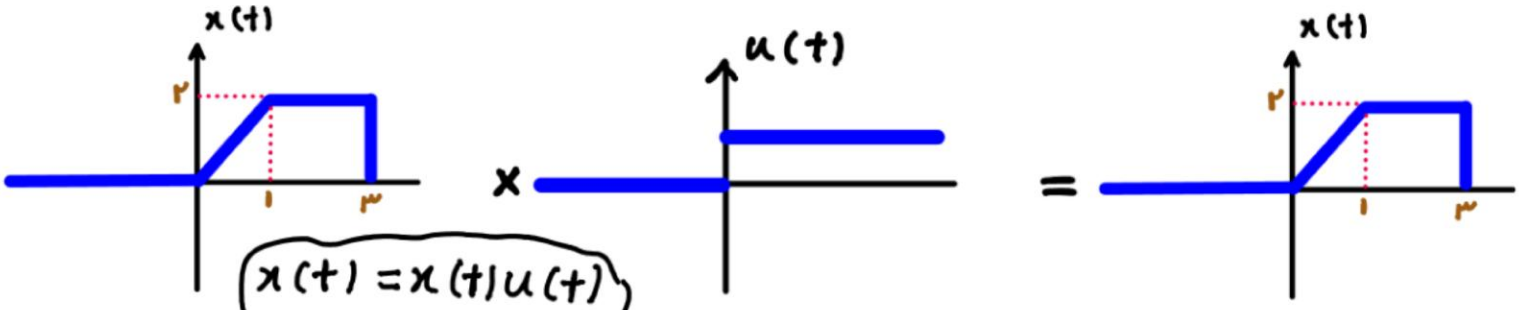
$$E_{x(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$$

$$E_{x[n]}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$$

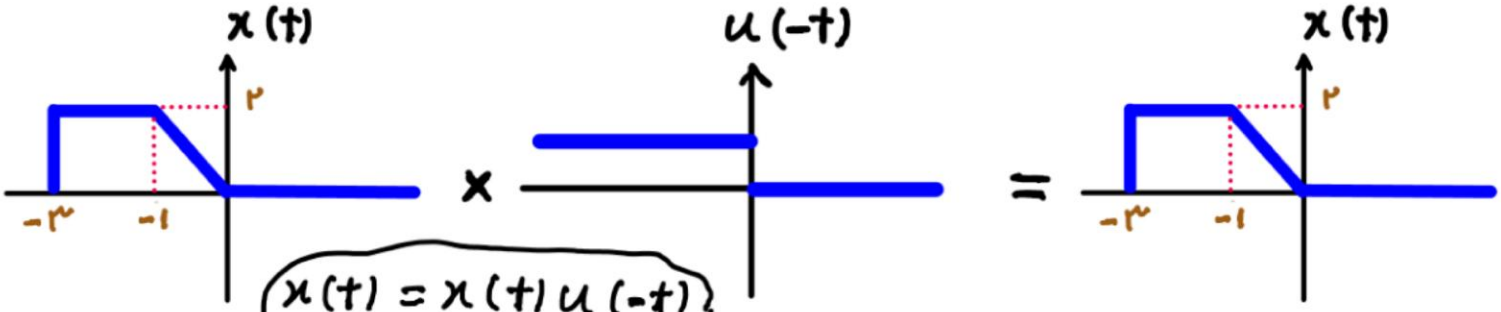
توان (P)

$$P_{x(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|x(t)|^2\,dt$$

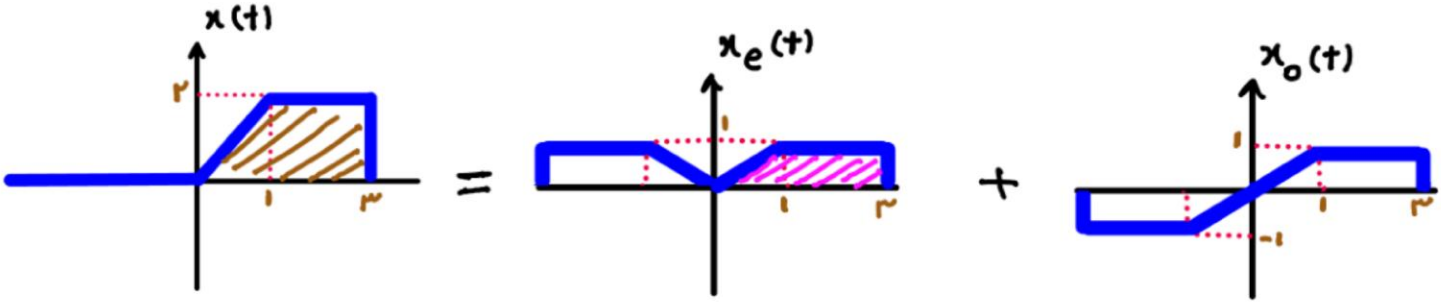
$$P_{x[n]}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}|x[k]|^2$$



$$x(t) = x(t)\,u(t)$$



$$x(t) = x(t)\,u(-t)$$



$x(t)$ عمّی است $\longrightarrow \begin{cases} 0 & t<0 \\ x_e(0) & t=0 \\ 2x_e(t) & t>0 \end{cases}$

$x(t)$ ضدعمّی است $\longrightarrow \begin{cases} 2x_e(t) & t<0 \\ x_e(0) & t=0 \\ 0 & t>0 \end{cases}$

$$\int_0^\infty x_e(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[S_R + S_L\right]$$

$$\int_0^\infty x_o(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[S_R - S_L\right]$$

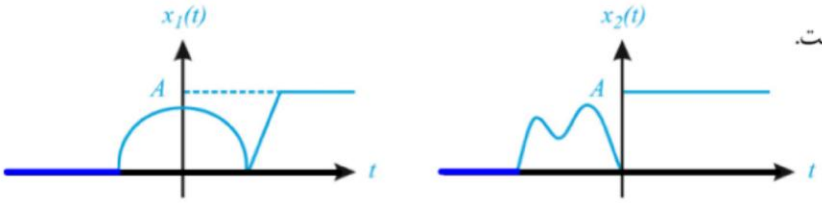
مفاهیم اولیه و کانولوشن — جلسه ۱

سیگنال انرژی	$0 < E < \infty$ $P = 0$	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(j\omega)\rvert^2 d\omega$ $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$
سیگنال توان	$E = \infty$ $0 < P < \infty$	$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \Longrightarrow P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert a_k\rvert^2$ $\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \Longrightarrow P_x = \sum_{k=\langle N\rangle} \lvert a_k\rvert^2$

هر سیگنال زمان گسسته متناوب، از نوع توان می باشد.

$E = \infty \quad , \quad 0 < P < \infty$

توان هر سیگنال با طول زمانی محدود و دامنه کراندار، برابر صفر می‌باشد. بنابراین دو سیگنال مختلف با دامنه‌های کراندار که فقط در یک بازه زمانی محدود با یکدیگر اختلاف دارند، توان یکسانی خواهند داشت.



$$\Rightarrow P_{x1} = P_{x2}$$

توان و انرژی هر سیگنال با مجموع توان و انرژی قسمت‌های زوج و فرد آن برابر است.

$$E\{x(t)\} = E\{x_e(t)\} + E\{x_o(t)\} \qquad P\{x(t)\} = P\{x_e(t)\} + P\{x_o(t)\}$$

توان سیگنال‌های متناوب $A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$ برابر $\frac{|A|^2}{2}$ است. توان سیگنال ثابت $x(t) = A$ و سیگنال $x(t) = A e^{j\omega_0 t}$ برابر $|A|^2$ است.

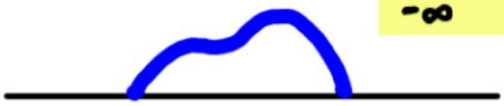
انرژی یک سیگنال متناوب بی‌نهایت است.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad , \quad |x| < 1 \qquad , \qquad \sum_{k=m}^{n} x^k = \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x}$$

$$a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + a_0 q^3 + \cdots + a_0 q^m = a_0 \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$$

$$a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots = \frac{\text{جمله اول}}{1 - \text{قدر نسبت}} = \frac{a_0}{1-q} \qquad |q| < 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$$



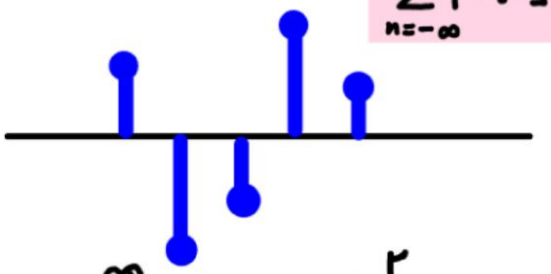
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt$$

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

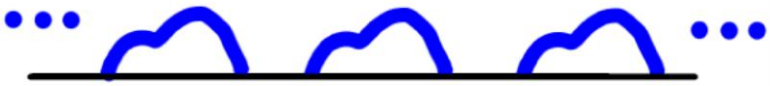


$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$x[n] \xrightarrow{FT} \tilde{X}(e^{j\omega})$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{X}(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |\tilde{X}(e^{j\omega})|^2\,d\omega}$$

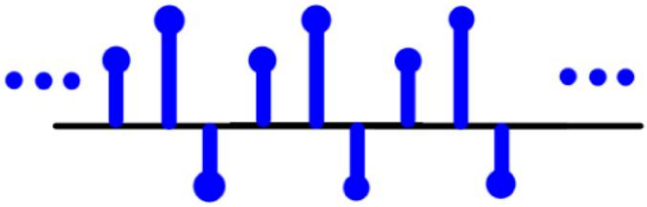


$$P_{\tilde{x}} = \frac{1}{T}\int_{T} |\tilde{x}(t)|^2\,dt$$

$$\tilde{x}(t) \xrightarrow{FS} a_k$$

$$P_{\tilde{x}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{T} |\tilde{x}(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2}$$



$$P_{\tilde{x}} = \frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} |\tilde{x}[n]|^2$$

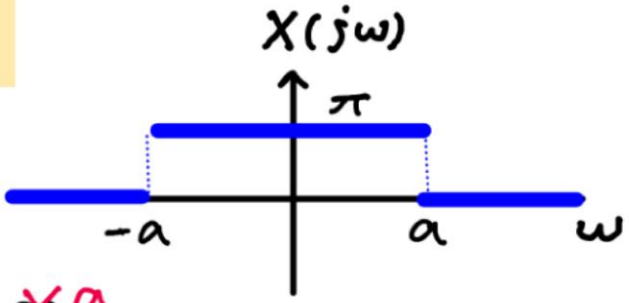
$$\tilde{x}[n] \xrightarrow{FS} \tilde{a}_k$$

$$P_{\tilde{x}} = \sum_{\langle N\rangle} |\tilde{a}_k|^2$$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} |\tilde{x}[n]|^2 = \sum_{\langle N\rangle} |\tilde{a}_k|^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$x(t) = \frac{\sin at}{t} \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}}$$



$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin at}{t}\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \pi^2 d\omega = \pi a$$

$$\frac{1}{T}\int_{T} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A f(t \mp kT) \xrightarrow{FS} a_k$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t \mp kT}{\tau}\right) \xrightarrow{FS} a_k = \frac{A\tau}{T}\,\Pi\left(\frac{k\tau}{T}\right)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t + 8k}{3}\right) \xrightarrow{FS} a_k = \frac{2\times 3}{8}\,\Pi\left(\frac{k\times 3}{8}\right)$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{3}{4} & k=0 \\ \frac{3}{4} & k=\pm 1 \\ 0 & k=\pm 2, \pm 3, \dots \end{cases}$$

$$P_{\tilde{x}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16} = \frac{27}{16}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} |\tilde{x}[n]|^2 = \sum_{\langle N\rangle} |\tilde{a}_k|^2$$

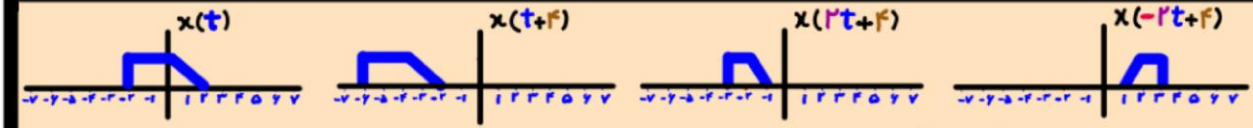
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3^{-|2n+6k|} \longrightarrow N = \frac{6}{2} = 3$$

$$E = \infty \quad , \quad 0 < P < \infty$$

مفاهیم اولیه و کانولوشن

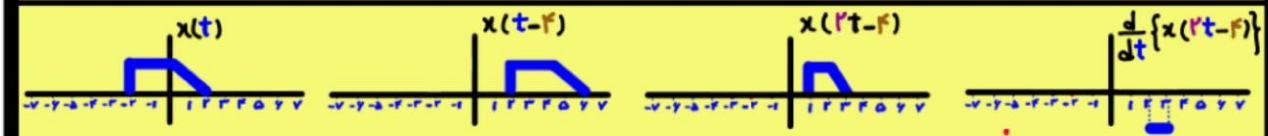
جلسه ۱

تبدیل های متغیر مستقل



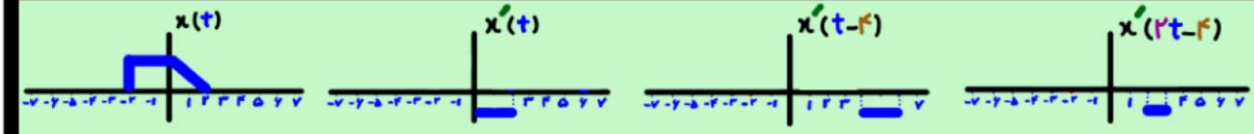
$x(t) \xrightarrow{t\to t+4} x(t+4) \xrightarrow{t\to 2t} x(2t+4) \xrightarrow{t\to -t} x(-2t+4)$

$x(at+b)$



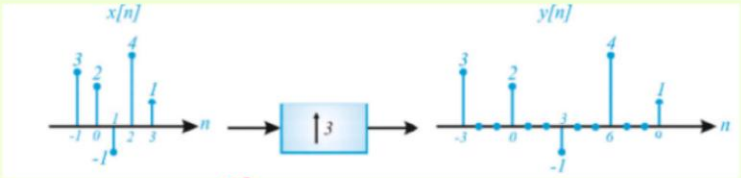
$x(t) \xrightarrow{t\to t-4} x(t-4) \xrightarrow{t\to 2t} x(2t-4) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d}{dt}\{x(2t-4)\}$

$\frac{d}{dt}\{x(at+b)\}$



$x(t) \xrightarrow{\text{مشتق}} x'(t) \xrightarrow{t\to t-4} x'(t-4) \xrightarrow{t\to 2t} x'(2t-4)$

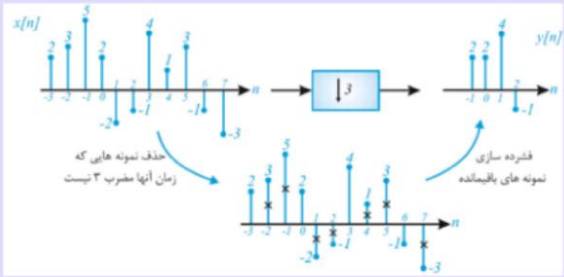
$x'(at+b)$



$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & \text{اگر } n \text{ مضرب } m \text{ باشد} \\ 0 & \text{ow} \end{cases}$$

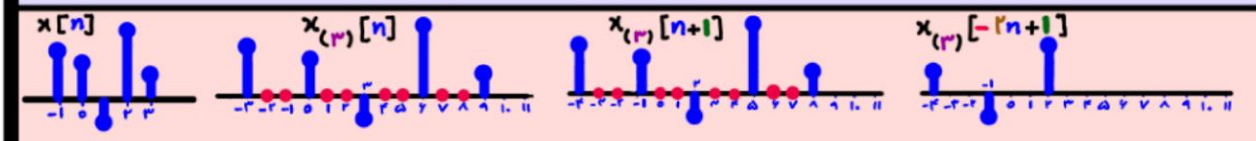
$$x_{(m)}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-mk]$$

$x_{(m)}[n]$



$$x[mn] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta\left[n-\frac{k}{m}\right]$$

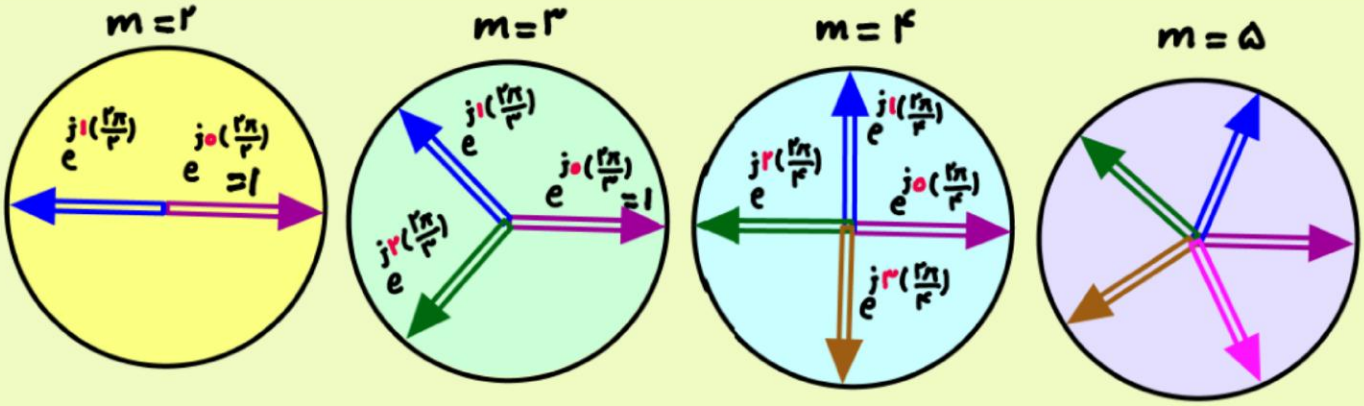
$x[mn]$

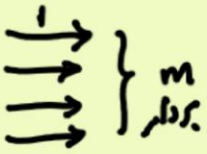


$x[n] \xrightarrow{\uparrow 3} x_{(3)}[n] \xrightarrow{n\to n+1} x_{(3)}[n+1] \xrightarrow{\downarrow 2} x_{(3)}[2n+1] \xrightarrow{n\to -n} x_{(3)}[-2n+1]$

$x_{(M)}[Nn+n_0]$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن





$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{jk\left(\frac{2\pi}{m}\right)} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{jk\left(\frac{2\pi}{m}\right)n} = \begin{cases} m & \text{اگر } n \text{ مضرب } m \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ مضرب } m \text{ نباشد} \end{cases}$$

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & \text{اگر } n \text{ مضرب } m \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ مضرب } m \text{ نباشد} \end{cases} \Longrightarrow y[n] = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} e^{jk\left(\frac{2\pi}{m}\right)n} x[n]$$

$$y[n] = \begin{cases} Ax[n] & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ Bx[n] & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases} \Longrightarrow y[n] = \begin{cases} Ax[n] & \text{اگر } n \text{ مضرب } 2 \text{ باشد} \\ Bx[n] & \text{اگر } n \text{ مضرب } 2 \text{ نباشد} \end{cases}$$

$$y[n] = \frac{A+B}{2} e^{j0\left(\frac{2\pi}{2}\right)n} x[n] + \frac{A-B}{2} e^{j1\left(\frac{2\pi}{2}\right)n} x[n]$$

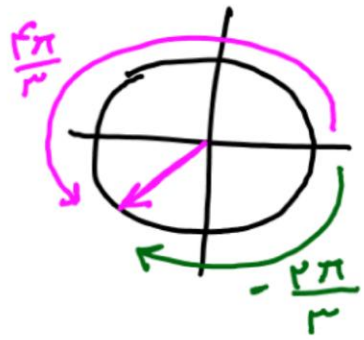
$$y[n] = \frac{A+B}{2}\, x[n] + \frac{A-B}{2}\,(-1)^n x[n]$$

$$y[n] = \begin{cases} 2x[n] & \text{اگر } n \text{ مضرب } 3 \text{ باشد} \\ -x[n] & \text{اگر } n \text{ مضرب } 3 \text{ نباشد} \end{cases}$$

$$y[n] = -x[n] + \begin{cases} 3x[n] & \text{اگر } n \text{ مضرب } 3 \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ مضرب } 3 \text{ نباشد} \end{cases}$$

$$y[n] = -x[n] + \frac{1}{3}\left\{1 + e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{4\pi}{3}n}\right\} 3x[n]$$

$$y[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} x[n] + \underbrace{e^{j\frac{4\pi}{3}n}}_{e^{-j\frac{2\pi}{3}n}} x[n]$$



$$y[n] = x\left[\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right] = x_{(3)}[n] + x_{(3)}[n-1] + x_{(3)}[n-2]$$

$$y[n] = x\left[\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right] = x_{(2)}[n] + x_{(2)}[n-1]$$

$$y[n] = x\left[\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right] = x_{(4)}[n] + x_{(4)}[n-1] + x_{(4)}[n-2] + x_{(4)}[n-3]$$

$$y[n] = \begin{cases} 2x[n] & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -3x[n] & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

$m=2$

$$y[n] = -3x[n] + \begin{cases} 5x[n] & \text{اگر } n \text{ مضرب ۲ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ مضرب ۲ نباشد} \end{cases}$$

$$y[n] = -3x[n] + \frac{1}{2}\left\{1 + (-1)^n\right\} 5x[n]$$

$$= -\frac{1}{2}x[n] + \frac{5}{2}(-1)^n x[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow m} \longrightarrow y[n]$$

① $y[n] = x_{(m)}[n]$

② $y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & \text{اگر } n \text{ مضرب } m \text{ باشد} \\ 0 & \text{ow} \end{cases}$

③ $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-mk]$

معکوس پذیر

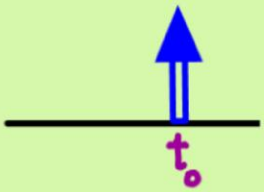
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow m} \longrightarrow y[n]$$

① $y[n] = x[mn]$

معکوس ناپذیر

② $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta\left[n - \frac{k}{m}\right]$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن



$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\text{غیرکراندار} & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}\quad,\quad \int_a^b \delta(t-t_0)\,dt=\begin{cases}1 & a<t_0<b\\ 0 & ow\end{cases}\qquad a<b$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$x(t)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_0)\,\delta(t-kT_0)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

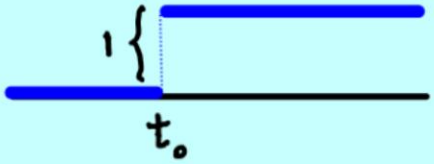
$$x(t)*\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t-kT_0)$$

$$x(t)*\delta^{(n)}(t-t_0)=x^{(n)}(t-t_0)$$

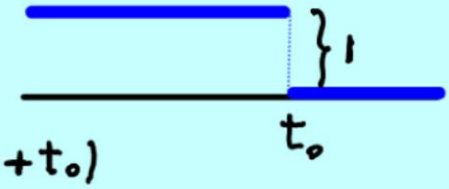
$$\delta^{(n)}(at+b)=\frac{1}{a^n|a|}\,\delta^{(n)}\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

$$x(t)\,\delta^{(n)}(t-t_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,x^{(k)}(t_0)\,\delta^{(n-k)}(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt=(-1)^n\,x^{(n)}(t)\Big|_{t=t_0}$$



$1u(t-t_0)$



$1u(-t+t_0)$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\delta(\tau-t_0)\,d\tau=u(\beta-t_0)-u(\alpha-t_0)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}u(\tau-t_0)\,d\tau=r(\beta-t_0)-r(\alpha-t_0)$$

$$(\beta-t_0)u(\beta-t_0)-(\alpha-t_0)u(\alpha-t_0)$$

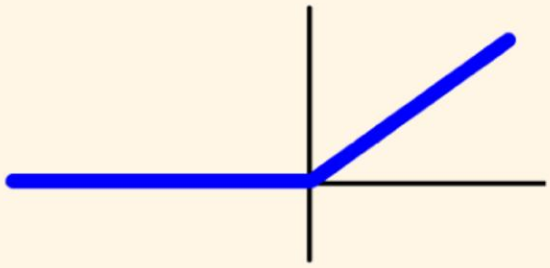
$$\int_{t-t_1}^{t-t_2}x(\lambda)\,d\lambda=x(t)*\left[u(t-t_2)-u(t-t_1)\right]$$

$$\sum_{k=n-n_1}^{n-n_2}x[k]=x[n]*\left\{u[n-n_2]-u[n-n_1-1]\right\}$$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2}\delta[k-m]=u[n_2-m]-u[n_1-1-m]$$

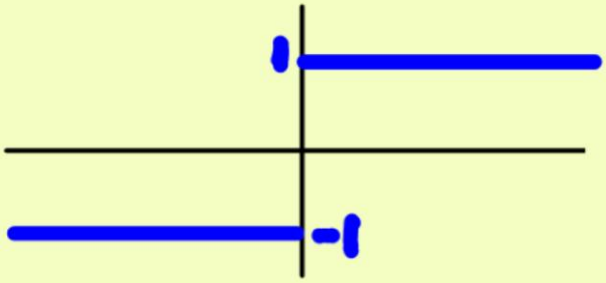
$$u[n]*u[n]=(n+1)\,u[n]$$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن



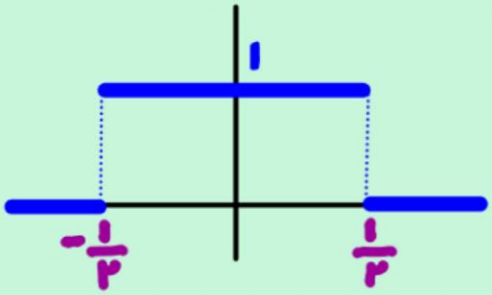
$$r(f(t)) = f(t)\,u(f(t)) = \begin{cases} 0 & f(t) < 0 \\ f(t) & f(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$r(t) = t\,u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$



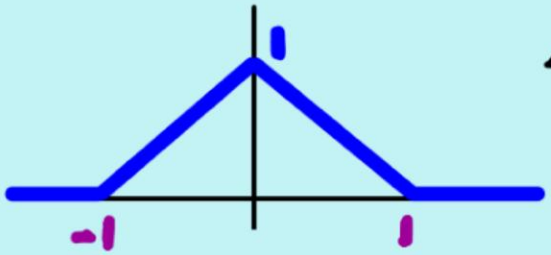
$$\mathrm{Sgn}(f(t)) = \begin{cases} -1 & f(t) < 0 \\ 0 & f(t) = 0 \\ 1 & f(t) > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



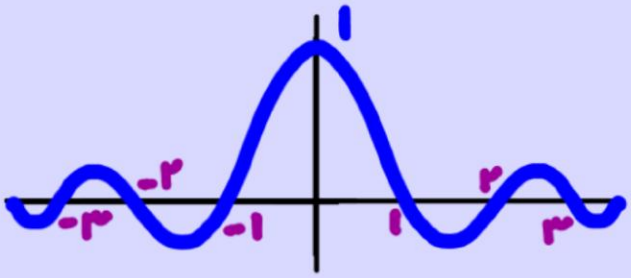
$$\Pi(f(t)) = \begin{cases} 1 & |f(t)| < \frac{1}{2} \\ 0 & |f(t)| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



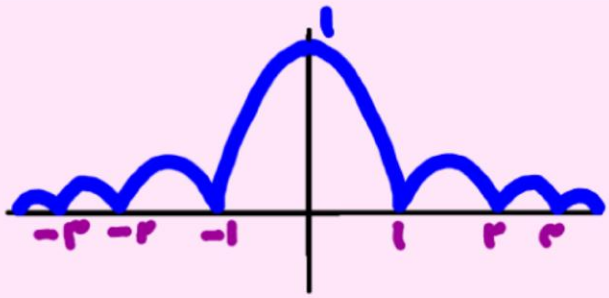
$$\Lambda(f(t)) = \begin{cases} 1 - |f(t)| & |f(t)| \leq 1 \\ 0 & |f(t)| > 1 \end{cases}$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$



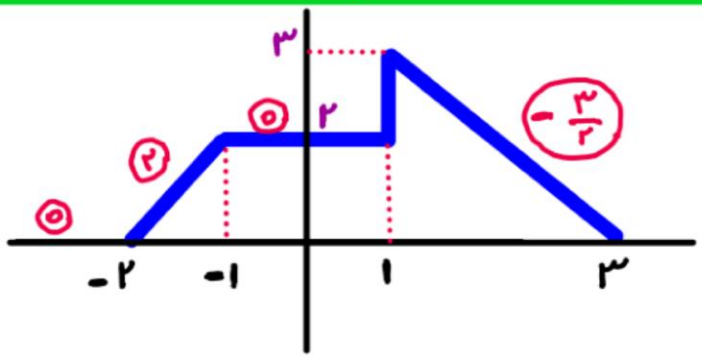
$$\frac{A\,\mathrm{Sin}\,Bt}{Ct} = \frac{AB}{C}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{Bt}{\pi}\right)$$

$$\mathrm{Sinc}(f(t)) = \frac{\mathrm{Sin}(\pi f(t))}{\pi f(t)}$$

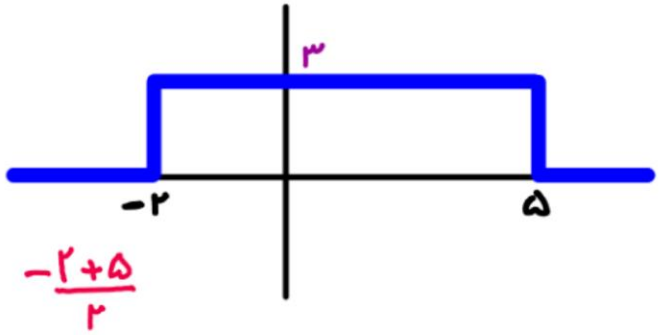


$$\frac{A\,\mathrm{Sin}^2 Bt}{Ct^2} = \frac{AB^2}{C}\,\mathrm{Sinc}^2\left(\frac{Bt}{\pi}\right)$$

$$\mathrm{Sinc}^2(f(t)) = \left(\frac{\mathrm{Sin}\,\pi f(t)}{\pi f(t)}\right)^2$$

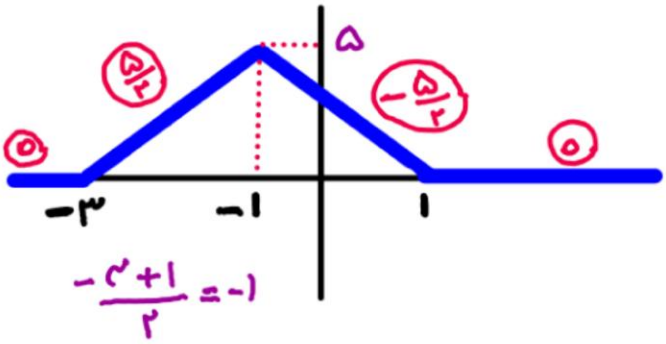


$$x(t) = ۲r(t+۲) - ۲r(t+۱) + ۱u(t-۱) - \frac{۳}{۲}r(t-۱) + \frac{۳}{۲}r(t-۳)$$



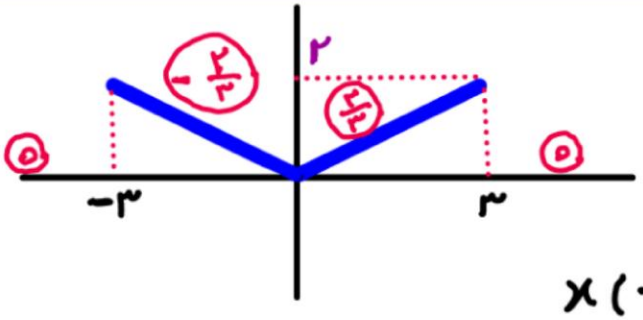
$$x(t) = ۳u(t+۲) - ۳u(t-۵)$$

$$x(t) = ۳\,\Pi\left(\frac{t-\frac{۳}{۲}}{۷}\right)$$



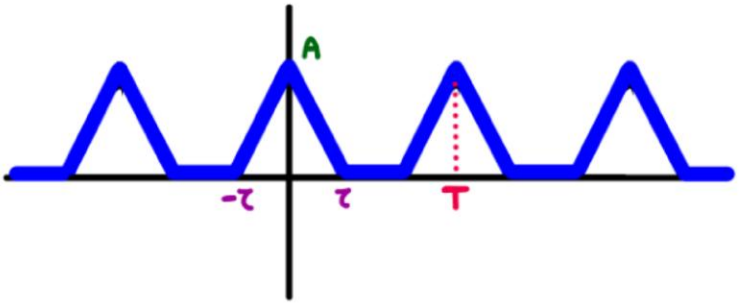
$$x(t) = \frac{۵}{۲}r(t+۳) - ۵r(t+۱) + \frac{۵}{۲}r(t-۱)$$

$$x(t) = ۵\Lambda\left(\frac{t+۱}{۲}\right)$$



$$x(t) = ۲u(t+۳) - \frac{۲}{۳}r(t+۳) + \frac{۴}{۳}r(t) - ۲u(t-۳) - \frac{۲}{۳}r(t-۳)$$

$$x(t) = ۲\,\Pi\left(\frac{t}{۶}\right) - ۲\Lambda\left(\frac{t}{۳}\right)$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A\Lambda\left(\frac{t-۰-kT}{\tau}\right)$$

$$a_k = \frac{A\tau}{T}\,\mathrm{sinc}^{۲}\left(\frac{k\tau}{T}\right)$$

$$\frac{2\,\cancel{\sin}5t}{t} = 10\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{5t}{\pi}\right)$$

$$\frac{5\,\cancel{\sin}^{2}(3t)^{2}}{t^{2}} = 45\,\mathrm{Sinc}^{2}\left(\frac{3t}{\pi}\right)$$

$$\mathrm{Sinc}(0)=1 \quad , \quad \mathrm{Sinc}(\pm 1)=0$$

$$\mathrm{Sinc}(\pm 2)=0$$

$$\vdots$$

$$\Pi\left(\frac{3}{8}\right)=1 \quad , \quad \Pi\left(-\frac{5}{2}\right)=0$$

$$\Lambda\left(\frac{1}{4}\right)=1-\left|\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}$$

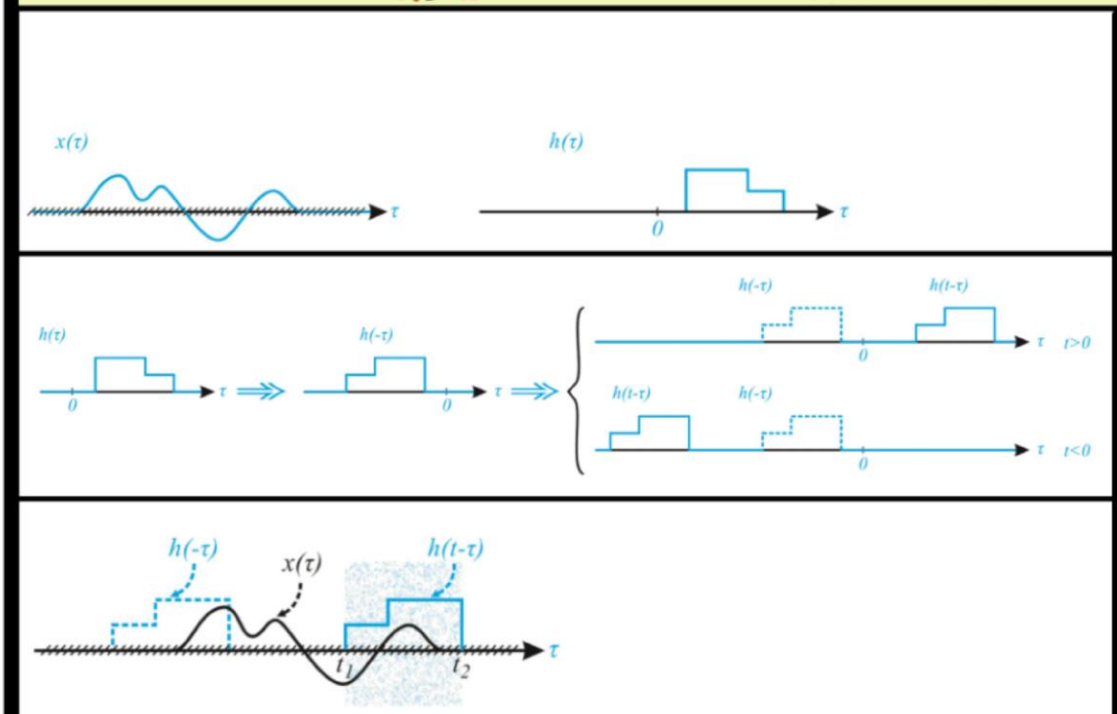
$$\Lambda(-2)=0$$

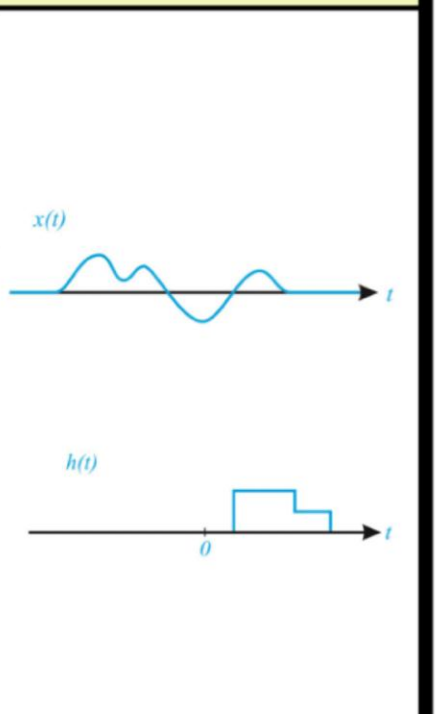
$$\Lambda\left(-\frac{2}{3}\right)=1-\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3}$$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k]$$





$$m_n(y)=\int_{-\infty}^{\infty}t^n y(t)dt \qquad m_n(y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}k^n x[k] \qquad \mu_y=\frac{m_1(y)}{m_0(y)} \qquad \sigma_y^2=\frac{m_2(y)}{m_0(y)}-\mu_y^2$$

$$x(at+t_1)*h(at+t_2)=\frac{1}{|a|}y(at+t_1+t_2) \qquad x^{(m)}(t)*h^{(n)}(t)=y^{(m+n)}(t)$$

$$\left[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right]*h(t)=\int_{-\infty}^{t}y(\lambda)d\lambda$$

$$y_e(t)=x_e(t)h_e(t)+x_o(t)h_o(t)$$

$$y_o(t)=x_e(t)h_o(t)+x_o(t)h_e(t)$$

$$S_y=\int_{-\infty}^{\infty}y(\lambda)d\lambda=S_x\cdot S_h$$

$$\Sigma_y=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y[k]=\Sigma_x\cdot\Sigma_h$$

$$m_1(y)=\int_{-\infty}^{\infty}t^1y(t)dt=m_{1x}m_{0h}+m_{0x}m_{1h}$$

$$\mu_y=\mu_x+\mu_h$$

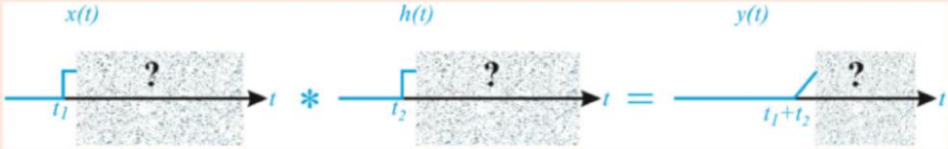
$$\sigma_y^2=\sigma_x^2+\sigma_h^2$$

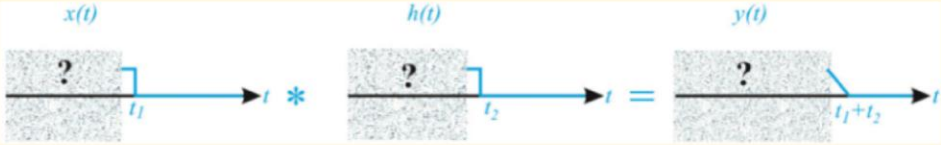
اگر نمودار تغییرات زمانی سیگنالهای $x(t)$ و $h(t)$ بالای محور زمان باشد و ماکزیمم دامنه سیگنال $h(t)$ برابر M باشد:

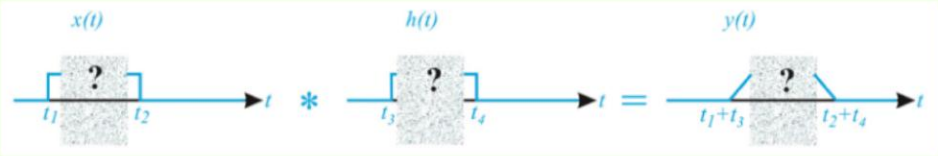
$$|y(t)|\leq M\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)d\tau=MS_x$$

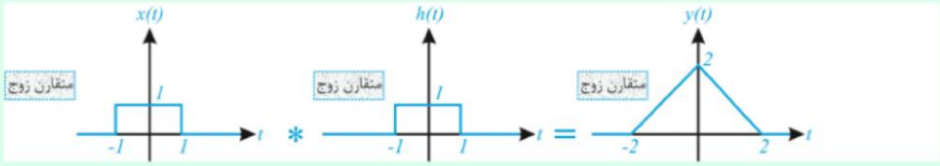
مفاهیم اولیه و کانولوشن

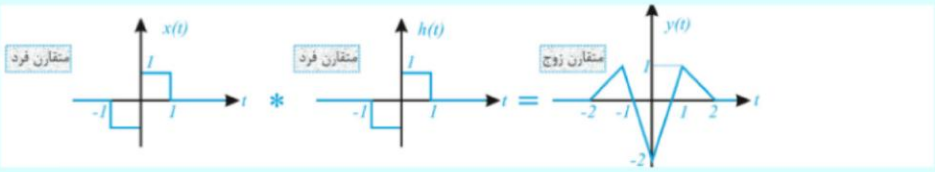
جلسه ۱

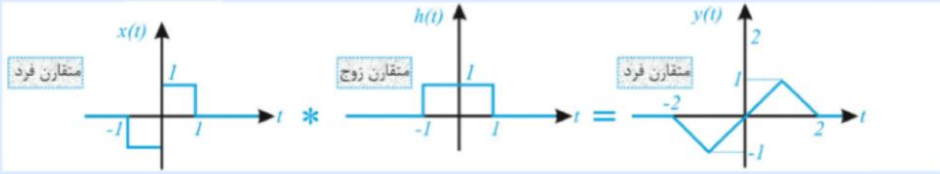


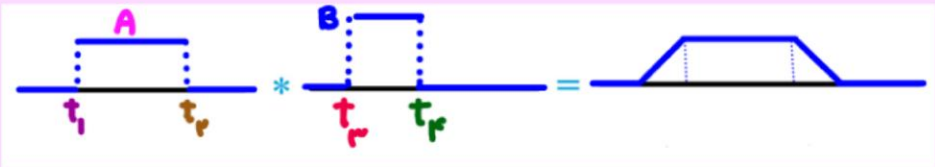


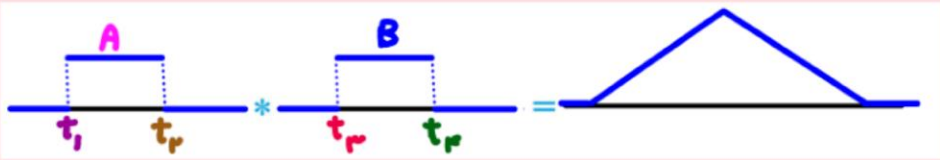


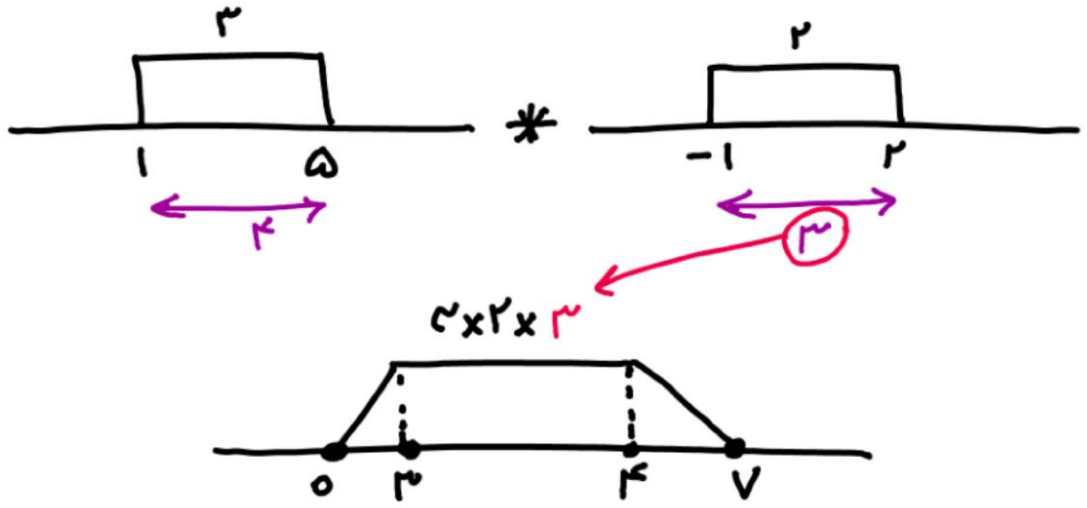


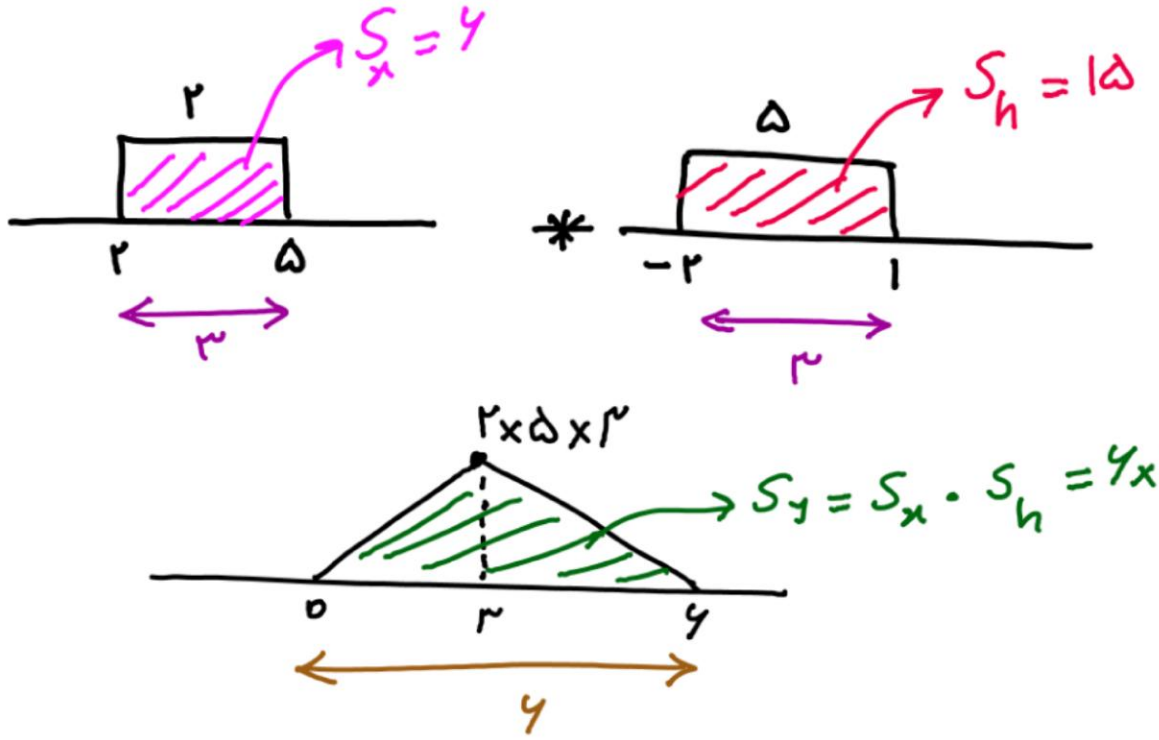








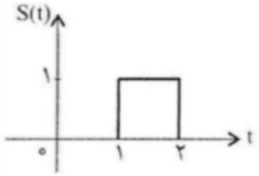

۳
۱
۵
۴
*
۲
-۱
۲
۳
۴×۲×۳
۰
۳
۴
۷

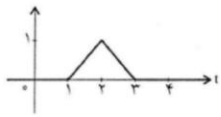

$S_x = 6$
۲
۲
۵
۳
*
$S_h = 15$
۵
-۲
۱
۳
۲×۵×۳
$S_y = S_x \cdot S_h = 6 \times 15 = 90$
۰
۳
۶
۶

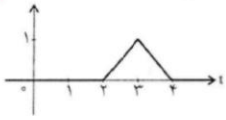
مفاهیم اولیه و کانولوشن — جلسه ۱

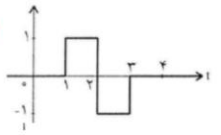
سؤالات کنکور سالهای گذشته

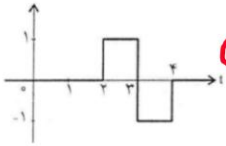
یک سیستم LTI با پاسخ پله $s(t)$ مطابق شکل ذیل را در نظر بگیرید. اگر دو سیستم از این نوع را با هم متوالی نمائیم، پاسخ پله سیستم حاصل کدام است؟ (۷۸)



۱) 

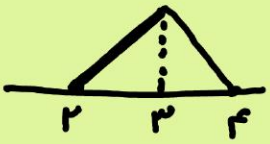
۲) 

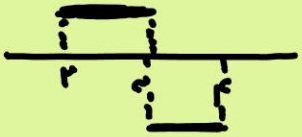
۳) 

۴) 

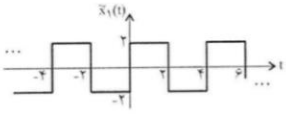
پاسخ هوشمندانه

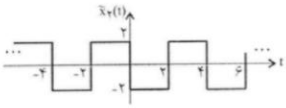
$$S_T(t) = \frac{d}{dt}\{S_1(t) * S_2(t)\}$$

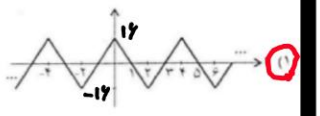
$$S_T(t) = \frac{d}{dt}$$ 

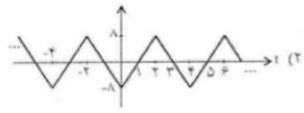
$$S_T(t) =$$ 

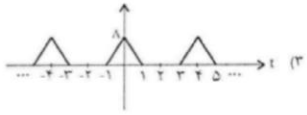
کانولوشن متناوب دو سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T_0، به صورت $y(t) = \int_{T_0} \tilde{x}_1(\tau)\tilde{x}_2(t-\tau)d\tau$ تعریف می‌شود. این کانولوشن برای دو سیگنال متناوب $\tilde{x}_1(t)$ و $\tilde{x}_2(t)$ در شکل مقابل با دوره تناوب اصلی $T_0 = 4$ کدام است؟ (۷۸)

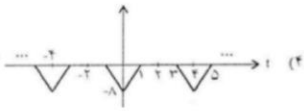




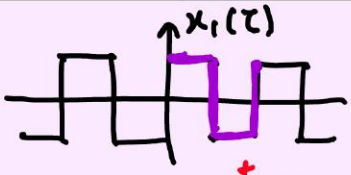
۱) 

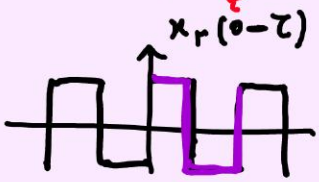
۲) 

۳) 

۴) 

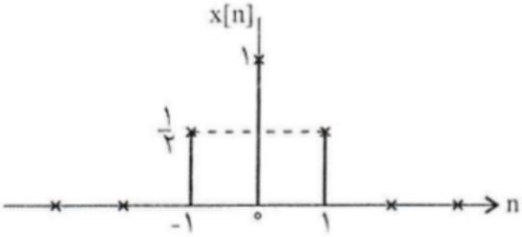
پاسخ هوشمندانه





$$y(0) = \int_{T_0} x_1(\tau)\, x_2(-\tau)\, d\tau > 0$$

برای رشته گسسته $x[n]$ مطابق شکل مقدار $z[n] = x[2-3n]u[n] * x[n]$ در $n = 0$ برابر چه مقدار است؟ (۷۹)



۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) صفر

پاسخ هوشمندانه

$$Z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[2-3k]u[k]\, x[n-k]$$

$$Z[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[2-3k]\, x[n-k]$$

$$Z[0] = \sum_{k=0}^{\infty} x[2-3k]\, x[-k]$$

$$= x[-1]x[-1] + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{4}$$

با تعاریف $a[n] \triangleq = x[n] * \delta[2n]$ ، $b(t) \triangleq x(t) * \delta(2t)$، کدام گزینه صحیح است؟ (۸۰)

۱) $a[n] = x[2n]$ ، $b(t) = x(2t)$

۲) $a[n] = x[n]$ ، $b(t) = x(2t)$

۳) $a[n] = x[n]$ ، $b(t) = \frac{1}{2}x(t)$

۴) $a[n] = \frac{1}{2}x[2n]$ ، $b(t) = \frac{1}{2}x(2t)$

پاسخ هوشمندانه

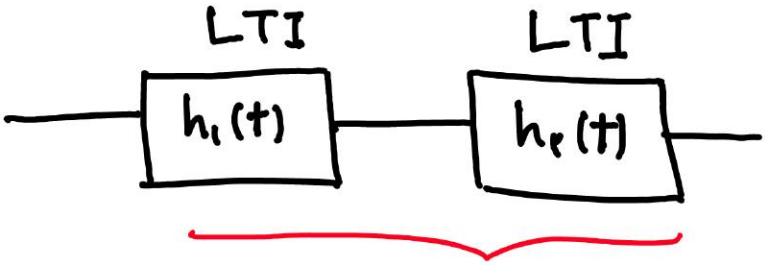
$$\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$$

$$\delta[2n] = \delta[n]$$

$$a[n] = x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$b(t) = x(t) * \frac{1}{2}\delta(t)$$

$$= \frac{1}{2}x(t)$$



$$h_T(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$S_T(t) = \int_{-\infty}^{t} h_T(\tau)\,d\tau = \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{t} h_1(\tau)\,d\tau}_{S_1(t)}\Big] * h_2(t)$$

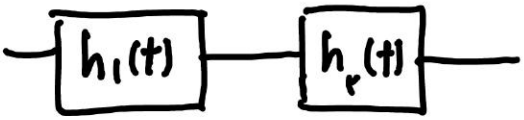
$$= h_1(t) * \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{t} h_2(\tau)\,d\tau}_{S_2(t)}\Big]$$

$$S_T(t) = S_1(t) * \underbrace{h_2(t)}_{\frac{d}{dt}S_2(t)} = \underbrace{h_1(t)}_{\frac{d}{dt}S_1(t)} * S_2(t)$$

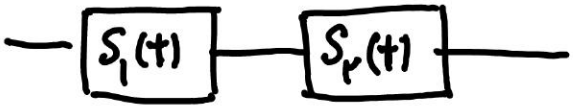
$$S_T(t) = S_1(t) * \Big[\frac{d}{dt} S_2(t)\Big] = \Big[\frac{d}{dt} S_1(t)\Big] * S_2(t)$$

$$S_T(t) = \frac{d}{dt}\Big\{ S_1(t) * S_2(t)\Big\}$$

$$h_T(t) = \frac{d}{dt} S_T(t) = \frac{d^2}{dt^2}\Big\{ S_1(t) * S_2(t)\Big\}$$



$$h_T(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



$$S_T(t) = \frac{d}{dt}\Big\{ S_1(t) * S_2(t)\Big\}$$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

سؤالات کنکور سالهای گذشته

مقدار $y(t)$ به ازاء $t=1$ در رابطه $y(t)=\left[e^{-t}u(t)\right]*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3k)$ تقریباً چقدر است؟ (۸۰)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{-1}{e}$ ۳) $\frac{2}{e}$ ۴) $\frac{-2}{e}$

$1-3k>0$

$3k<1$

$k<\frac{1}{3} \longrightarrow \dots,-2,-1,0$

پاسخ هوشمندانه

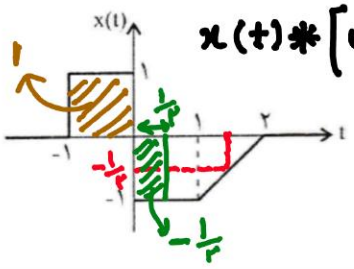
$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3k)}u(t-3k)$$

$$y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(1-3k)}u(1-3k)$$

$$y(1)=e^{-1}+e^{-4}+e^{-7}+\dots=\frac{e^{-1}}{1-\cancel{e^{-3}}}$$

$$\simeq e^{-1}=\frac{1}{e}$$

یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}\delta(t)+u(t-1)$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ که در زیر نمایش داده شده است در نقاط $t=\frac{3}{2}$ ، $t=+\infty$ به ترتیب با کدام گزینه برابر است؟ (۸۱)



۱) -1 ، 1

۲) 0 ، 1

۳) 0 ، $-\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$

$$x(t)*\left[u(t-t_1)-\cancel{u(t-t_2)}\right]=\int_{\cancel{t-t_2}\ -\infty}^{t-t_1}x(\lambda)d\lambda$$

پاسخ هوشمندانه

$$h(t)=\delta(t)+u(t-1)$$

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

$$=x(t)+\int_{-\infty}^{t-1}x(\lambda)d\lambda$$

$$y(\tfrac{3}{2})=x(\tfrac{3}{2})+\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}x(\lambda)d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

سطح زیر منحنی سیگنال $v(t)$ به صورت $A_v=\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)dt$ تعریف می‌شود. اگر رابطه ورودی و خروجی یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد، که $x(t)$ ورودی، $y(t)$ خروجی و $h(t)$ پاسخ ضربه آن است، سطح زیر منحنی سیگنال خروجی کدام است؟ (۸۱)

۱) $A_y=A_x+A_h$

۲) $A_y=A_x.A_h$

۳) $A_y=A_x*A_h$

۴) رابطه مشخصی بین A_y، A_x و A_h وجود ندارد.

$$S_y=S_x\cdot S_h$$

$$A_y=A_x\cdot A_h$$

اگر $x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]-\delta[n-3]$ و $h[n]=2\delta[n+1]+2\delta[n-1]$ باشد، حاصل عبارت $x[n]*h[n]$ کدام است؟ (۸۱)

۱) $2\{\delta[n+1]+2\delta[n]+\delta[n-1]\}+2\delta[n-4]$ ✗

۲) $\delta[n+1]+\delta[n-1]+2\delta[n]+\delta[n-2]-2\delta[n-3]$ ✗

۳) $4\delta[n-1]+4\delta[n-2]+2\delta[n]+\delta[n+1]-\delta[n-4]$ ✗

۴) $2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]-2\delta[n-4]$ ✓

$$\Sigma_x=2\ ,\ \Sigma_h=4$$

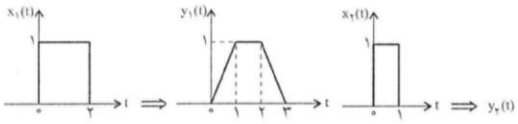
$$\Sigma_y=2\times4=8$$

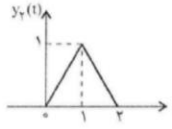
مفاهیم اولیه و کانولوشن

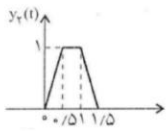
جلسه ۱

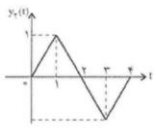
پاسخ هوشمندانه	سؤالات کنکور سالهای گذشته

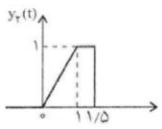
یک سیستم خطی مستقل از زمان (LTI) مفروض است. اگر به این سیستم سیگنال $x_1(t)$ اعمال شود در اینصورت $y_1(t)$ را در خروجی دریافت می‌کنیم. اگر $x_2(t)$ اعمال شود خروجی سیستم چه خواهد بود؟ (۸۲)

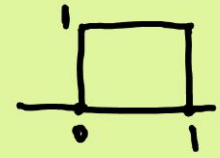


۱) 

۲) 

۳) 

۴) 



$y_2(t) = x_2(t) * h(t)$

پاسخ ضربهٔ یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان در شکل زیر نمایش داده شده است. اگر ورودی سیستم برابر با: (۸۲)

$x(t) = u_{-2}(t+1) - u_{-2}(t) - u_{-1}(t-3)$

باشد در این صورت مقدار خروجی سیستم در لحظهٔ $t = 2$ کدام است؟

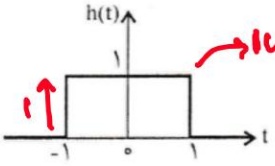
($u_{-1}(t)$ معرف تابع پله واحد و $u_{-2}(t)$ معرف تابع شیب واحد می‌باشد.)

۱) ۱

۲) ۲

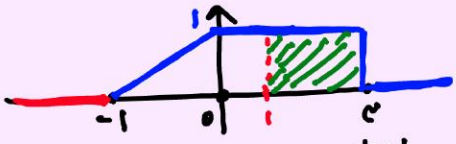
۳) ۳

۴) ۱/۵



$\to 1u(t+1) - 1u(t-1)$

$x(t) = 1r(t+1) - r(t) - u(t-3)$



$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\lambda)d\lambda$

$y(2) = \int_{1}^{3} x(\lambda)d\lambda = 2$

اگر $z(t) = x(t) * y(t)$ باشد، در آنصورت $x(2t) * y(2t)$ برابر است با: (۸۳)

۱) $z(2t)$

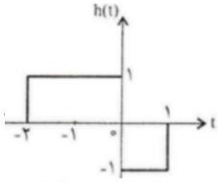
۲) $2z(2t)$

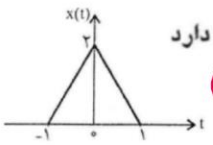
۳) $\frac{1}{4}z(2t)$

۴) $\frac{1}{2}z(2t)$

$x(2t) * y(2t) = \frac{1}{2} z(2t)$

ورودی $(x(t))$ و پاسخ ضربه $(h(t))$ یک سیستم LTI به شکل زیر است:





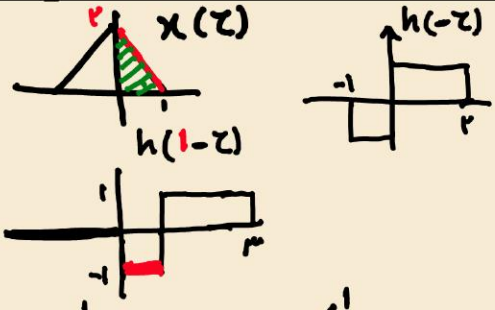
به ازای چه مقداری از t خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و مقدار خروجی در لحظه $t = 1$ چیست؟ (۸۴)

۱) به ازای $t = 1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t = 1$ مقدار خروجی برابر است با ۲

۲) به ازای $t = -1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t = 1$ مقدار خروجی برابر است با ۱-

۳) به ازای $t = 1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t = 1$ مقدار خروجی برابر است با ۱

۴) به ازای $t = -1$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t = 1$ مقدار خروجی برابر است با $-\frac{1}{2}$



$y(1) = \int_{0}^{1} x(\tau)h(1-\tau)d\tau = \int_{-1}^{1} 2p(\tau)x(\tau)d\tau$

$= -1$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

سؤالات کنکور سالهای گذشته

اگر $y(t)\overset{\Delta}{=}x(t)*h(t)$ باشد که در آن $h(t)=s(T-t)$ است. در آن صورت مقدار $y(nT)=x(t)*h(t)\big|_{t=nT}$ برابر است با: (۸۴)

$h(t-\tau)=s(T-(t-\tau))$

$=s(\tau+T-t)=s(\tau-t+T)$

۱) $x(t)*s(t)\big|_{t=nT}$

۲) $x(t)*s(t)\big|_{t=(n-1)T}$

۳) $x(t)*s(-t)\big|_{t=(n-1)T}$

۴) $x(t)*s(-t)\big|_{t=nT}$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)s(\tau-t+T)\,d\tau$$

$$y(nT)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)s(\tau-\underbrace{(n-1)T}_{t})\,d\tau$$

$$=x(t)*s(-t)\Big|_{t=(n-1)T}$$

اگر $f(t)$ سیگنالی به عرض T و ماکزیممی واقع بر $t=2$ باشد. در آن صورت عرض و محل ماکزیمم $r>0$، $f(rt-n)$ عبارتنداز: (۸۵)

۱) $\frac{n}{r},\frac{T}{r}-n$

۲) $\frac{2}{r},\frac{T}{r}$

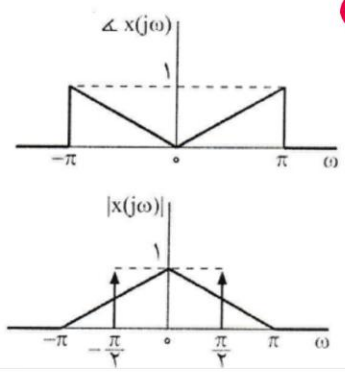
۳) $\frac{n-2}{r},\frac{T}{r}+n$

۴) $\frac{n+2}{r},\frac{T}{r}$

$rt-n=2$

$t=\frac{n+2}{r}$

سیگنال پیوستهٔ $x(t)$ را با تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ در نظر بگیرید که اندازه و فاز $X(j\omega)$ مطابق زیر می‌باشد. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟ (۸۵)



۱) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}$

۲) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}$

۳) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\infty$

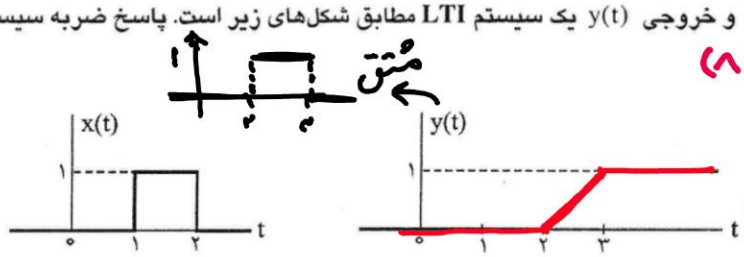
۴) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$$

$$=\infty$$

ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI مطابق شکل‌های زیر است. پاسخ ضربه سیستم چیست؟ (۸۵)



۱) $u(t-1)$

۲) $u(t-2)$

۳) $u(t-1)-u(t-2)$

۴) $\delta(t-1)-\delta(t-2)$

$$\frac{dy(t)}{dt}=x(t)*\frac{d}{dt}h(t)$$

$$x(t-1)=x(t)*\frac{d}{dt}h(t)$$

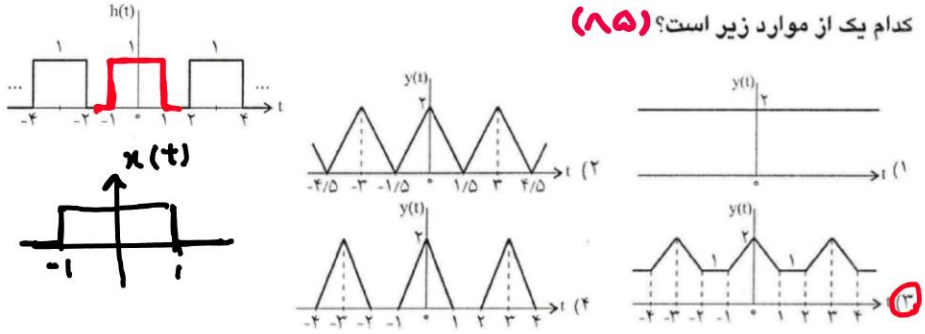
$$\frac{d}{dt}h(t)=\delta(t-1)$$

$$h(t)=u(t-1)$$

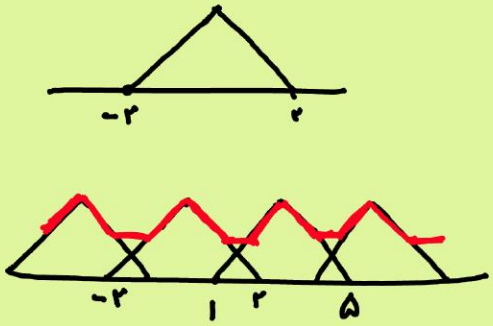
جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

سؤالات کنکور سالهای گذشته

فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI یک سیگنال پریودیک با پریود $T_0 = 3$ به صورت زیر باشد. اگر سیگنال ورودی به سیستم برابر $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$ باشد، خروجی سیستم کدام یک از موارد زیر است؟ (۸۵)



پاسخ هوشمندانه



توان (P) و انرژی (E) سیگنال $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n-2m|}$ به ترتیب عبارتند از: (۸۵)

گسسته در زمان متناوب

۱) $E = +\infty, p = \frac{41}{18}$

۲) $E = +\infty, p = 0$

۳) $E = +\infty, P = +\infty$

۴) $E = \frac{64}{9}, p = 0$

$E = \infty$

$0 < P < \infty$

در یک سیستم LTI ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ به صورت زیر می‌باشد: (۸۶)

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \le 0 \\ 1 & 0 < t \le 1 \\ 0 & 1 < t < \infty \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \le 0.5 \\ 2(t-0.5) & 0.5 < t \le 1.5 \\ 2 & 1.5 < t < \infty \end{cases}$$

پاسخ ضربه‌ی این سیستم عبارت است از:

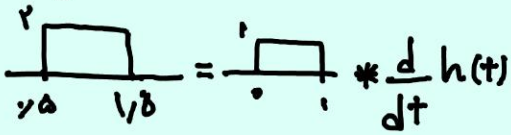
۱) $h(t) = u(t-1.5)$

۲) $h(t) = 2u(t-1.5)$

۳) $h(t) = u(t) - u(t-0.5)$

۴) $h(t) = 2u(t-0.5)$

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) * \frac{d}{dt}h(t)$$



$$2x(t-0.5) = x(t) * \frac{d}{dt}h(t)$$

$$\frac{d}{dt}h(t) = 2\delta(t-0.5)$$

اگر $y(t) \triangleq x(2t) * \delta(4-2t)$ در آن صورت $y(t)$ برابر است با: (۸۷)

$4-2t = 0 \rightarrow t = 2$

۱) $\frac{1}{2}x(2t-4)$

۲) $\frac{1}{2}x(4-2t)$

۳) $\frac{1}{2}x(2t-8)$

۴) $\frac{1}{2}x(8-2t)$

$$y(t) = x(2t) * \frac{1}{2}\delta(t-2)$$

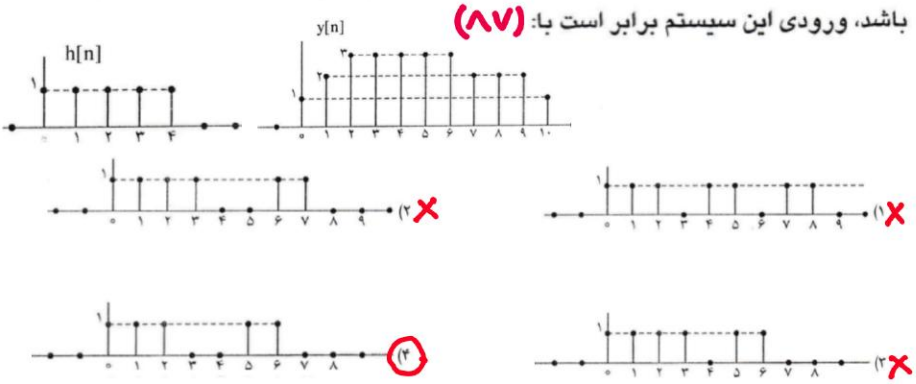
$$= \frac{1}{2}x(2(t-2))$$

$$= \frac{1}{2}x(2t-4)$$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

سؤالات کنکور سال‌های گذشته

در صورتی که خروجی یک سیستم LTI زمان گسسته با پاسخ ضربه h[n] به صورت y[n] باشد، ورودی این سیستم برابر است با: (۸۷)

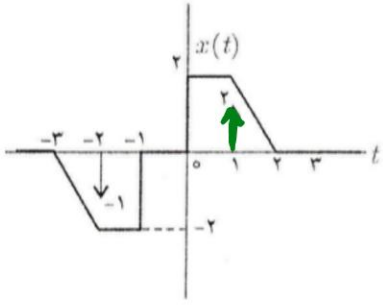


پاسخ هوشمندانه

$$\sum_h = 5 \quad , \quad \sum_y = 25$$

$$\sum_x = \frac{\sum_y}{\sum_h} = \frac{25}{5} = 5$$

اگر $x_o(t)$ بیانگر قسمت فرد سیگنال $x(t)$ که در زیر نمایش داده شده است باشد، در این صورت مقدار $\int_0^\infty x_o(t)dt$ برابر است با: (۸۷)



۱) ۴/۵
۲) ۳/۵
۳) ۳
۴) ۱

$$\int_0^\infty x_o(t)dt = \frac{1}{2}\left[S_R - S_L\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2+3) - (-1+(-3))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[5+4\right] = 4.5$$

رابطه بین ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم به صورت

$$y(t) = \int_{t-5}^{\infty} x(2-\tau)d\tau$$

می‌باشد، پاسخ سیستم به تابع پله واحد چیست؟ (۸۷)

$x(t) = u(t)$

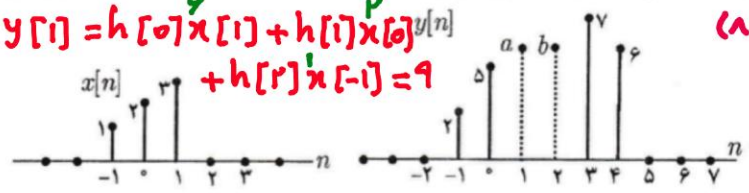
۱) $(t-7)u(t-7)$
۲) $(7-t)u(7-t)$
۳) $(3-t)u(3-t)$
۴) $(t-3)u(t-3)$

$$y(t) = \int_{t-5}^{\infty} u(\underbrace{2-\tau}_{\lambda})\,d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{7-t} u(\lambda)\,d\lambda$$

$$= r(7-t) = (7-t)u(7-t)$$

یک سیستم زمان گسسته‌ی LTI دارای پاسخ ضربه به طول ۴، به ازای ورودی x[n]، خروجی y[n] را ایجاد کرده است (شکل زیر). مقادیر مجهول $y[1] = a$ و $y[2] = b$ در دنباله‌ی خروجی برابرند با: (۸۸)

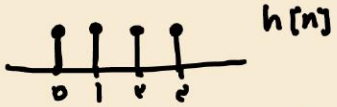


$y[1] = h[0]x[1] + h[1]x[0] + h[2]x[-1] = 9$

۱) $a = 8,\ b = 7$
۲) $a = 9,\ b = 8$
۳) $a = 8,\ b = 8$
۴) $a = 9,\ b = 7$

$y[2] = h[0]x[2] + h[1]x[1] + h[2]x[0] + h[3]x[-1] = 7$

پاسخ هوشمندانه



$$y[n] = \sum h[k]x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{3} h[k]x[n-k]$$

$y[-1] = 2 = h[0]$

$y[0] = 5 = 2h[0] + h[1] \longrightarrow h[1] = 1$

$y[2] = 6 = h[2] \times 3 \longrightarrow h[2] = 2$

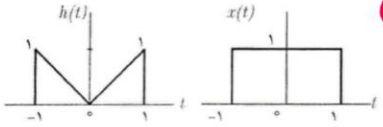
$y[3] = 7 = 2h[1] + 2h[2] \longrightarrow h[1] = 1$

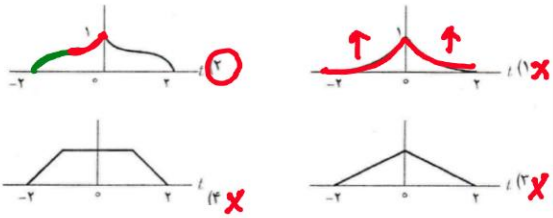
مفاهیم اولیه و کانولوشن

جلسه ۱

سؤالات کنکور سال‌های گذشته

اگر پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت h(t) باشد پاسخ سیستم به ورودی x(t) به صورت کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟ (۸۹)



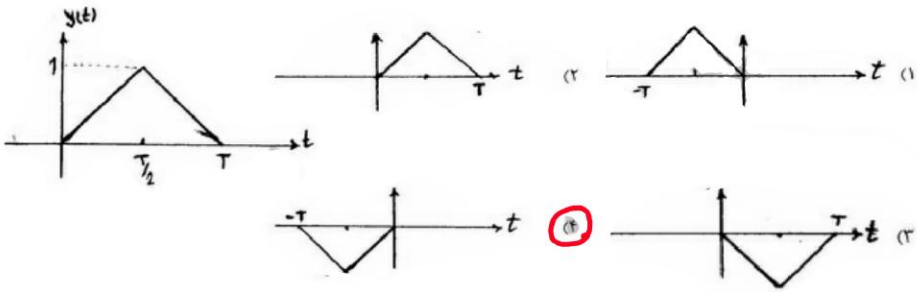


حاصل انتگرال زیر که در آن $\delta(t)$ تابع ضربه واحد و $\delta'(t)$ مشتق آن باشد چقدر است؟ (۹۰)

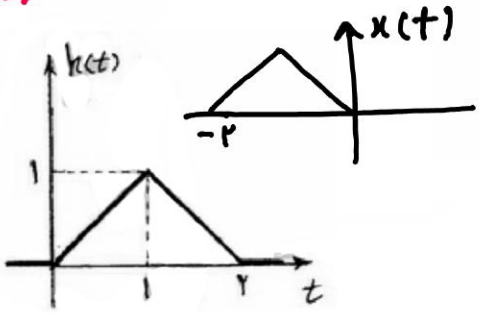
$$\int_{-\infty}^{\infty}[(t+2)\delta'(t+1)+(e^{-|t|}+t^2+2)\delta(e^{-|t|}+t^2+1)]dt$$

۱) -1 ۲) 1 ۳) 0 ۴) 2

پاسخ ضربه یک سیستم LTI یک سیگنال فرد است. اگر خروجی سیستم برای یک سیگنال x(t)، به صورت y(t) مطابق با شکل زیر باشد، خروجی سیستم برای سیگنال x(−t) چگونه است؟ (۹۱)



در صورتی‌که h(t) پاسخ ضربه یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان بصورت مقابل باشد و ورودی این سیستم بصورت x(t) = h(t+2) تعریف گردد. در چه زمانی خروجی ماکزیمم و مقدار ماکزیمم خروجی در این زمان چقدر خواهد بود. (۹۱)



۱) $y_{max}=2$, $t=1$

۲) $y_{max}=\frac{2}{3}$, $t=1$

۳) $y_{max}=\frac{2}{3}$, $t=0$

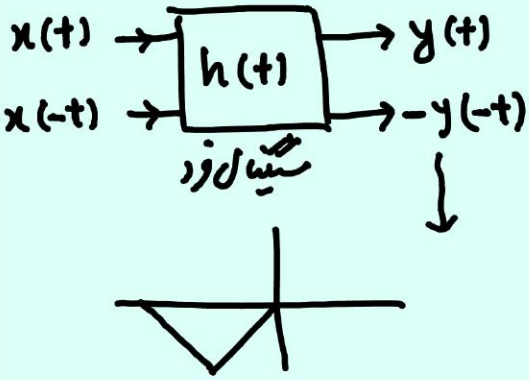
۴) $y_{max}=2$, $t=0$

پاسخ هوشمندانه

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t+2)\delta'(t+1)\,dt$$

$$=(-1)^1\,[t+2]'\Big|_{t=-1}$$

$$=-1$$



$y(t)=x(t)*h(t)$

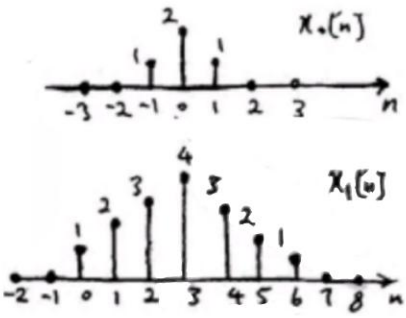
$$y(0)=\int_0^2 h(\tau)x(0-\tau)\,d\tau$$

$$y(0)\le 1 \qquad \underbrace{\int_0^2 h(\tau)\,d\tau}_{1}\le 1$$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

سؤالات کنکور سالهای گذشته

اگر $y_0[n]$ پاسخ یک سیستم LTI پایدار به ورودی $x_0[n]$ بوده و $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_0[n] = -1$ است. $y_1[n]$ پاسخ همان سیستم به ورودی $x_1[n]$ است، کدام گزینه زیر صحیح است؟ (۹۲)



$\sum y[n] = \sum y[-n]$

۱) $\sum_n y_1[-n] = -4$ ✓

۲) $\sum_n y_1[-n] = 0$

۳) $\sum_n y_1[-n] = 2$

۴) $\sum_n y_1[-n] = 4$

پاسخ هوشمندانه

$\Sigma x_0 = 4 \ , \ \Sigma y_0 = -1$

$\Sigma h = \frac{\Sigma y_0}{\Sigma x_0} = \frac{-1}{4}$

$\Sigma y_1 = \Sigma x_1 \times \Sigma h = 16 \times (\frac{-1}{4}) = -4$

اگر $x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(\underbrace{\frac{t}{3}}_{6\pi})\delta(\underbrace{t-k\pi}_{\pi})$ ، $x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(\pi t^2)\delta(t-k)$ ، $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ باشد در این صورت: (۹۲)

۱) $x_1(t)$ و $x_2(t)$ متناوب و $x_3(t)$ نامتناوب است.

۲) هر سه سیگنال متناوب هستند.

۳) $x_1(t)$ متناوب و $x_2(t)$ و $x_3(t)$ نامتناوب نمی‌باشند.

۴) هیچ‌کدام متناوب نیستند.

پاسخ هوشمندانه

$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\frac{k\pi}{3})\delta(t-k\pi)$

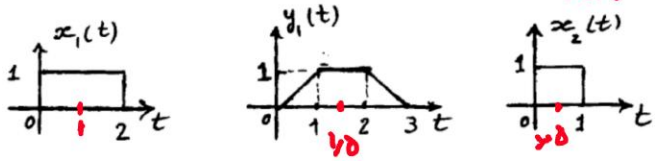
$T_{x_1} = 6\pi$

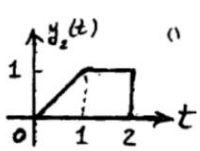
$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\pi \underbrace{k^2}_{4}) \delta(t-\underbrace{k}_{1})$

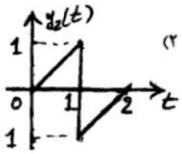
$T_{x_2} = 2$

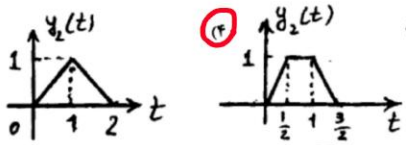
$\frac{T_{x_1}}{T_{x_2}} = 3\pi \notin Q \rightarrow x_3$ غیرمتناوب

با اعمال $x_1(t)$ به ورودی یک سیستم LTI، خروجی $y_1(t)$ حاصل می‌شود. اگر $x_2(t)$ به ورودی همین سیستم اعمال گردد، خروجی $y_2(t)$ کدام است؟ (۹۲)

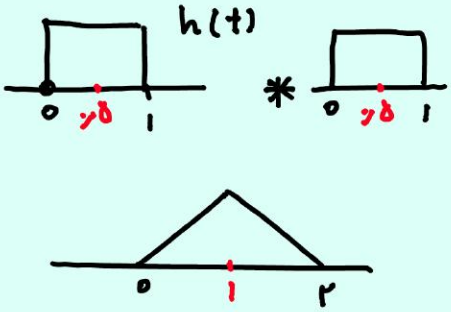


۱) 

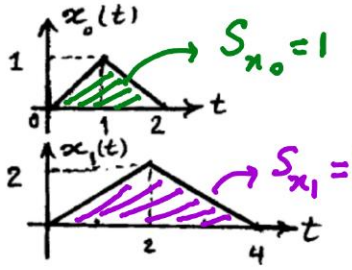
۲) 

۳) 

۴)



اگر $y_0(t)$ پاسخ یک سیستم LTI پایدار به ورودی $x_0(t)$ بوده و بدانیم $\int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t)dt = \pi$ می‌باشد، آن‌گاه در مورد $y_1(t)$ که پاسخ همان سیستم به ورودی $x_1(t)$ است، چه می‌توان گفت؟ (۹۲)



$S_{x_0} = 1 \longrightarrow S_{y_0} = \pi$

$S_{x_1} = 4 \longrightarrow S_{y_1} = 4\pi$

۱) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = 2\pi$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = -4\pi$

۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = +4\pi$ ✓

۴) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = 0$

جلسه ۱ — مفاهیم اولیه و کانولوشن

سؤالات کنکور سالهای گذشته

کدام سیستم زیر با رابطه‌ی داده شده بین ورودی دلخواه $x(t)$ و خروجی $y(t)$ می‌توانند LTI (خطی و تغییرناپذیر با زمان) باشند. ($f(t)$ و $g(t)$ توابعی معین و غیر صفر از t هستند.) (۹۳)

$x(t) \to$ [سیستم ۱] $\to y(t)$: $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)g(\alpha-t)\,d\alpha$ → LTI

$x(t) \to$ [سیستم ۲] $\to y(t)$: $y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\alpha)x(t-\alpha)\,d\alpha$ → LTI نیست

۱) فقط سیستم ۱ ۲) فقط سیستم ۲

۳) هم سیستم ۱ و هم سیستم ۲ ۴) نه سیستم ۱ و نه سیستم ۲

پاسخ هوشمندانه

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)g(\alpha-t)\,d\alpha$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\underbrace{u(t-\alpha)\,g(\alpha-t)}_{h(t-\alpha)}\,d\alpha$$

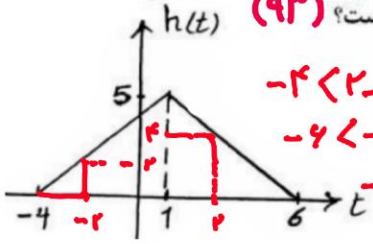
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\alpha)x(t-\alpha)\,d\alpha$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(\alpha)u(t-\alpha)}_{\neq h(\alpha)}\,x(t-\alpha)\,d\alpha$$

سیستم LTI زمان پیوسته با پاسخ ضربه $h(t)$ مطابق شکل زیر داده شده است.

سیگنال $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)\delta(t-4k)$ از این سیستم عبور می‌کند.

خروجی سیستم را $y(t)$ می‌نامیم. $y(2)$ برابر کدام است؟ (۹۳)



۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

$h(t)=5\Lambda\left(\frac{t-1}{5}\right)$

$h[-2]=5\Lambda\left(-\frac{3}{5}\right)=5\left(1-\frac{3}{5}\right)=2$

$h(2)=5\Lambda\left(\frac{1}{5}\right)=5\left(1-\frac{1}{5}\right)=4$

$-4<2-4k<6$

$-6<-4k<4$

$-1<k<\frac{3}{2} \to k=0,1$

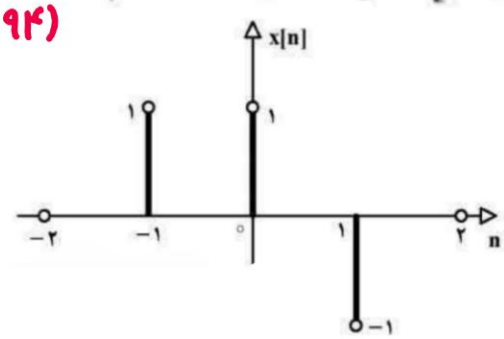
$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)h(t-4k)$$

$$y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)h(2-4k)$$

$$=h[2]+2h(-2)$$

$$=4+2\times2=8$$

مقدار کانولوشن $x[1-2n]*x[n]$ در نقطه $n=1$، کدام است؟ (۹۴)



۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

$$\sum x[1-2k]\,x[n-k]$$

$$\sum x[1-2k]\,x[1-k]$$

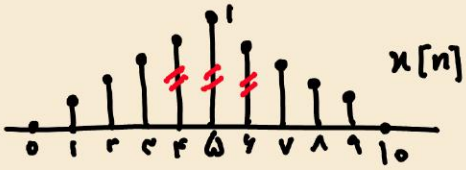
$$=x[1]x[1]+x[-1]x[0]$$

$$=1+1=2$$

اگر $h[n]=\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]$ پاسخ ضربهٔ سیستم و ورودی آن به شرح زیر بوده و خروجی را با $y(n)$ نشان دهیم، مقدار ماکزیمم $y[n]$، کدام است؟ (۹۵)

$$x[n]=\begin{cases}\frac{n}{5} & 0\le n\le 5\\ 2-\frac{n}{5} & 6\le n\le 10\\ 0 & \text{بقیهٔ جاها}\end{cases}$$

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{8}{5}$ ۳) $\frac{13}{5}$ ۴) 4



$$y_{max}=\frac{4}{5}+1+\frac{4}{5}=\frac{13}{5}$$

مفاهیم اولیه و کانولوشن

جلسه ۱

پاسخ هوشمندانه	سؤالات کنکور سالهای گذشته
$\cos 100\pi t$ $x(t)$ 0 5 $\cos 100\pi(\tau-1) = \cos 100\pi\tau$ $x(\tau-1)$ 1 6 $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$ $y(6)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(6-\tau)\,d\tau$	ورودی یک سیستم LTI، $x(t)=\cos(100\pi t)[u(t)-u(t-5)]$ و پاسخ ضربهٔ آن $h(t)=x(5-t)$ می‌باشد. $h(6-\tau)=x(\tau-1)$ مقدار خروجی در لحظهٔ $t=6$، $(y(6))$ برابر کدام است؟ (۹۵) ۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۵
$y(6)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau-1)\,d\tau$ $=\int_{1}^{5} \cos^2 100\pi\tau\,d\tau$ $=\frac{5-1}{2}=2$	